La coupe des vêtements selon Tchebychev

Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

Pafnouty

Pafnouty

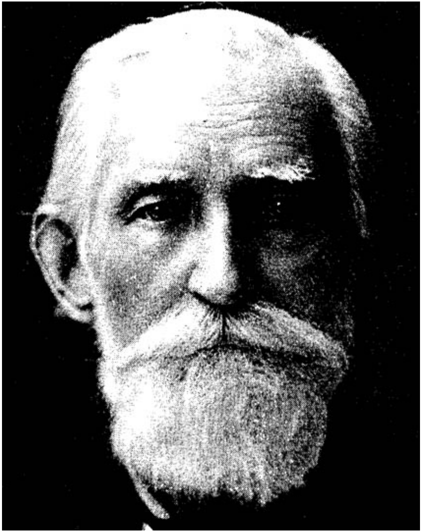
Tchebychev

Pafnouty

Tchebychev

(1821-1894)

Pafnouty Tchebychev 1821-1894



Probabilités

Probabilités

Théorie des nombres

Quatre thèmes de recherche :

Probabilités

Théorie des nombres

Analyse

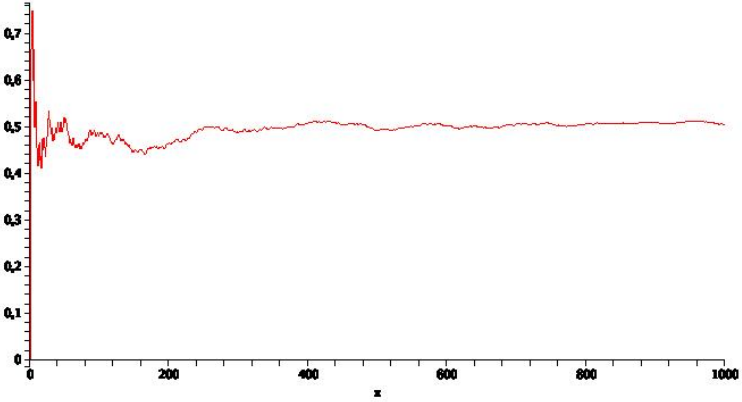
Probabilités

Théorie des nombres

Analyse

Géométrie

Probabilités : loi des grands nombres



Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités.

§ 1. La proposition, dont la démonstration sera l'objet de cette note, est la suivante:

«On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, que la probabilité «de ce que le rapport du nombre des répétitions de l'événement E à celui «des épreuves ne s'ecartera pas de la moyenne des chances de E au delà «des limites données, quelques resserrées que soient ces limites, s'approchera «autant qu'on le voudra de la certitude».

Cette proposition fondamentale de la théorie des probabilités, contenant comme cas particulier la loi de Jacques Bernoulli, est déduite par Mr. Poisson d'une formule, qu'il obtient en calculant approximativement la valeur d'une intégrale définie assez compliquée (V. Recherches sur les probabilités des jugements, chap. IV).

Toute ingénieuse que soit la méthode employée par le celèbre Géometre, elle ne fournit pas la limite de l'erreur que comporte son analyse approximative, et par cette incertitude sur la valeur de l'erreur la démonstration de la proposition manque de rigueur.

Je vais montrer ici comment on peut démontrer rigoureusement cette proposition par des considérations tout à fait élémentaires.

Les grands nombres sont rarement premiers...

Théorème : *Pour n grand, la probabilité pour qu'un nombre entier inférieur à n soit un nombre premier est de l'ordre de* $\frac{1}{\ln n}$

Il y a 404 204 997 nombres premiers inférieurs à 10^{10}.

La proportion est donc 0,0404204997.

Pas trop loin de $\frac{1}{\ln 10^{10}} \simeq 0,043429\ldots$.

Théorème : *Pour n grand, la probabilité pour qu'un nombre entier inférieur à n soit un nombre premier est de l'ordre de* $\frac{1}{\ln n}$

Il y a 404 204 997 nombres premiers inférieurs à 10^{10}.

La proportion est donc 0,0404204997.

Pas trop loin de $\frac{1}{\ln 10^{10}} \simeq 0,043429....$

Théorème : *Pour n grand, la probabilité pour qu'un nombre entier inférieur à n soit un nombre premier est de l'ordre de* $\frac{1}{\ln n}$

Il y a 404 204 997 nombres premiers inférieurs à 10^{10}.

La proportion est donc 0,0404204997.

Pas trop loin de $\frac{1}{\ln 10^{10}} \simeq 0,043429....$

Théorème : *Pour n grand, la probabilité pour qu'un nombre entier inférieur à n soit un nombre premier est de l'ordre de* $\frac{1}{\ln n}$

Il y a 404 204 997 nombres premiers inférieurs à 10^{10}.

La proportion est donc 0,0404204997.

Pas trop loin de $\frac{1}{\ln 10^{10}} \simeq 0,043429...$.

Preuve de la conjecture de Bertrand :

Théorème : *Pour tout entier n, il existe un nombre premier compris entre n et $2n$.*

Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.

§ 1. Legendre, dans sa Théorie des nombres *), propose une formule pour déterminer combien il y a de nombres premiers depuis 1 jusqu'à une limite donnée. Il commence par comparer sa formule avec l'énumération immédiate des nombres premiers faite dans les tables les plus étendues, nommément depuis 10000 jusqu'à 1000000, et l'applique ensuite à la solution de plusieurs questions. Malgré la concordance prononcée de la formule de Legendre avec les tables des nombres premiers, nous nous permettons néanmoins d'élever quelques doutes sur son exactitude, et par conséquent aussi sur les résultats qu'on en a tirés. Nous fondons notre assertion sur un théorème, relatif aux propriétés de la fonction qui détermine combien il y a de nombres premiers inférieurs à une limite donnée, théorème dont on peut déduire plusieurs conséquences curieuses. Nous allons d'abord donner la démonstration du théorème en question, et nous en présenterons ensuite quelques applications.

I-er Théorème.

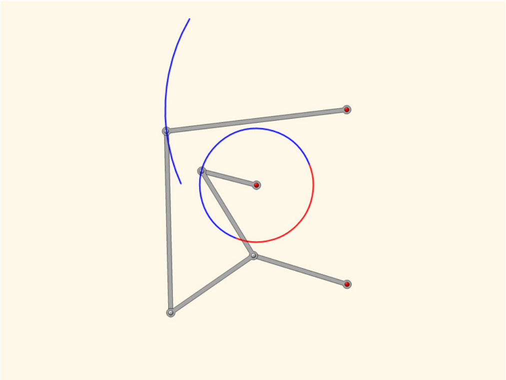
§ 2. *Si l'on représente par $\varphi(x)$ la totalité des nombres premiers inférieurs à x, par n un entier quelconque, enfin par ρ une quantité > 0, la somme*

$$\sum_{x=2}^{x=\infty}\left[\varphi(x+1)-\varphi(x)-\frac{1}{\log x}\right]\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

jouira de la propriété de s'approcher d'une limite finie, à mesure que ρ converge vers zéro.

Analyse et mathématiques appliquées

Théorie de l'approximation (polynômes de Tchebychev) :



Sur la coupe des vêtements.

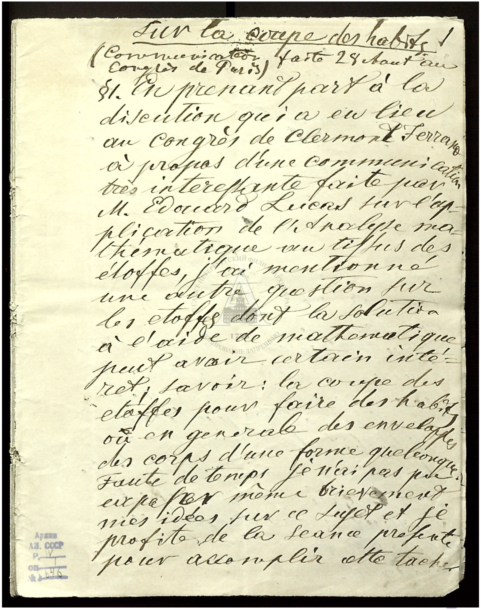
(Association française pour l'avancement des sciences. 7 session. Paris. Séance du 28 août 1878).

Après avoir indiqué que l'idée de cette étude lui est venue lors de la communication faite, il y a deux ans, au Congrès de Clermont-Ferrand, par M. Edouard Lucas, sur la géometrie du tissage des étoffes à fils rectilignes, M. Tchébichef pose les principes généraux pour déterminer les courbes suivant lesquelles on doit couper les differents morceaux d'une étoffe, pour en faire une gaine bien ajustée, servant à envelopper un corps de forme quelconque.

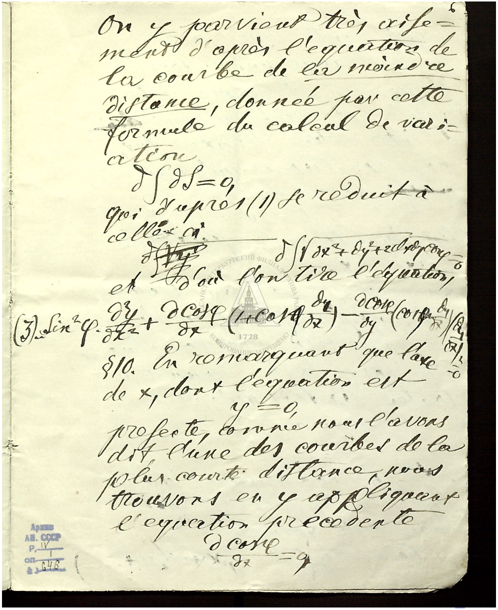
En prenant pour point de départ ce principe d'observation que dans la déformation d'un tissu on ne doit considérer d'abord, dans une première approximation, que l'altération des angles respectifs formés par les fils de chaîne et les fils de trame, sans tenir compte de l'allongement des fils, il donne les formules qui permettent de déterminer les contours imposés à deux, trois ou quatre morceaux d'étoffe pour recouvrir la surface d'une sphère, avec la meilleure approximation désirable. M. Tchébichef présente à la section une balle de caoutchouc recouverte d'une étoffe dont les deux morceaux ont été coupés suivant ses indications; il fait observer que le problème différerait essentiellement si l'on remplaçait l'étoffe par une peau. D'ailleurs les formules proposées par M. Tchébichef donnent aussi la méthode à suivre pour la juxtaposition des pièces par la couture.

Conformément à la volonté de Tchebychef, l'étude «Sur la coupe des habits» trouvée dans ses papiers ne doit pas être imprimée, car le manuscrit ne porte pas l'inscription: «*imprimer*».

La coupe des habits


Sur la coupe des habits !
(Communication faite 28 Août au Congrès de Paris)
§1. En prenant part à la discussion qui a eu lieu au Congrès de Clermont Ferrand à propos d'une communication très interessante faite par M. Edouard Lucas sur l'application de l'Analyse mathématique au tissus des étoffes, j'ai mentionné une autre question sur les étoffes dont la solution à l'aide de mathématique peut avoir certain intérêt, savoir : la coupe des étoffes pour faire des habits où en generale des enveloppes des corps d'une forme quelconque. Faute de temps je n'ai pas pu exposer même brièvement mes idées sur ce sujet et je profite de la séance présente pour accomplir cette tache.

La coupe des habits


6

On y parvient très aisément d'après l'équation de la courbe de la moindre distance, donnée par cette formule du calcul de variation

$$\delta\int ds=0,$$

qui d'après (1) se réduit à celle-ci

$$\delta\int\sqrt{dx^2+dy^2+2dx\,dy\cos\varphi}=0$$

et d'où l'on tire l'équation,

$$(3)\quad \sin^2\varphi\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d\cos\varphi}{dx}\left(1+\cos\varphi\frac{dy}{dx}\right)-\frac{d\cos\varphi}{dy}\left(\cos\varphi+\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

§10. En remarquant que l'axe de x, dont l'équation est

$$y=0$$

profecte, comme nous l'avons dit, l'une des courbes de la plus courte distance, nous trouvons en y appliquant l'équation précédente

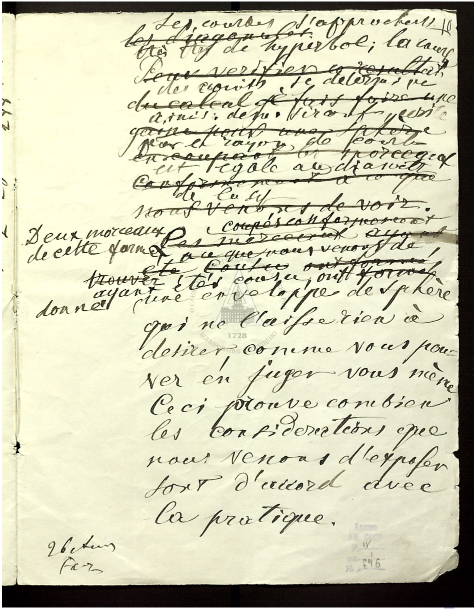
$$\frac{d\cos\varphi}{dx}=0$$

correspondantes de la surface du corps.

§14. Pour montrer sur un exemple l'usage de ces formules, nous avons déterminé d'après elles la forme que l'on doit donner aux morceaux de l'étoffe pour faire une gaine bien ajustée à une sphère seulement de deux pièces, dont chacune couvrait une demi sphère. La forme trouvée est celle-ci: c'est un quadrilatère composée des lignes courbes, dont les coins sont arondis. – Les fils primitifs ~~suivant~~ sont dirigés suivant les diagonales

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{3\frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{72}x^4 \ldots = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{6\pi+\pi^3}{288}x^4 \ldots$$

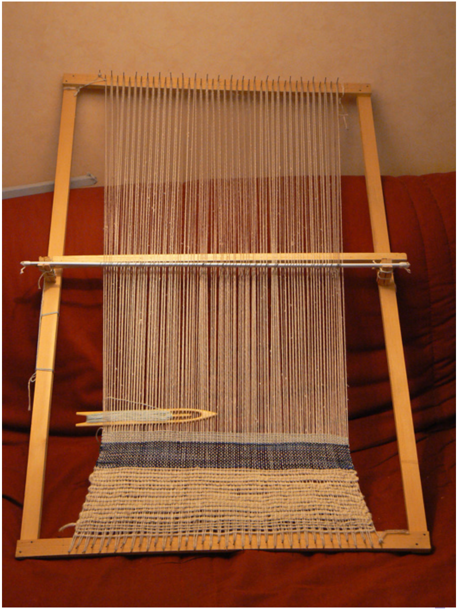
$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y^2 + \frac{6\pi+\pi^3}{288}y^4 \ldots$$


Les courbes s'approchent
très très de hyperbol; la courbe

nous venons de voir.

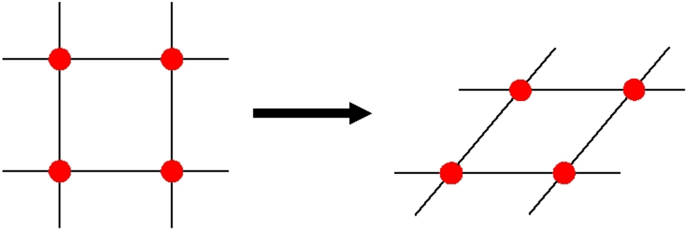
Deux morceaux de cette forme coupés conformement à ce que nous venons de trouver ayant étés cousu, ont donné une envelope de sphère qui ne laisse rien à desirer comme vous pouvez en juger vous même. Ceci prouve combien les considerations que nous venons d'exposer sont d'accord avec la pratique.

Tissu



Tissu

Les petits carrés deviennent des losanges.



Quelles sont les surfaces qu'on peut habiller ?

Définition : *Une surface est "habillable" si elle peut être paramétrée par* $\Phi : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *de telle sorte que* $\partial\Phi/\partial x$ *et* $\partial\Phi/\partial y$ *sont de norme 1 (mais peut-être pas orthogonaux).*

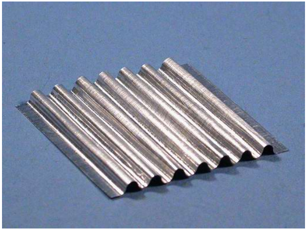
Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?

Définition : *Une surface est plate si elle peut être paramétrée par* $\Phi : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *de sorte que* $\partial\Phi/\partial x$ *et* $\partial\Phi/\partial y$ *ont une norme 1 et sont orthogonaux.*

Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?

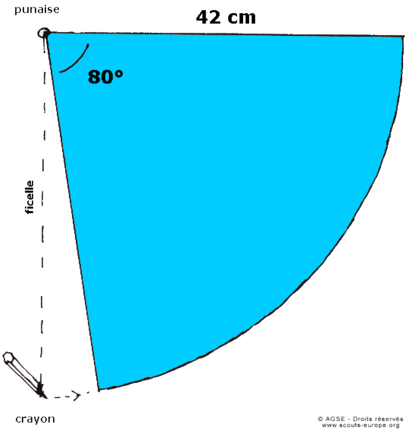
Définition : *Une surface est plate si elle peut être paramétrée par* $\Phi : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *de sorte que* $\partial\Phi/\partial x$ *et* $\partial\Phi/\partial y$ *ont une norme 1 et sont orthogonaux.*

Un cylindre...



Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?

Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?



Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?

Un cône

Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?

Un cône

D'autres surfaces ?

Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?

Vieux théorème : *Une surface plate est réglée.*

Quelles sont les surfaces qu'on peut couvrir avec du papier sans faire de plis ?

Vieux théorème : *Une surface plate est réglée.*

Vieux théorème : *Une surface est plate si et seulement si elle est développable.*

Réglé mais pas développable

Réglé et développable

Réglé et développable

Réglé et développable

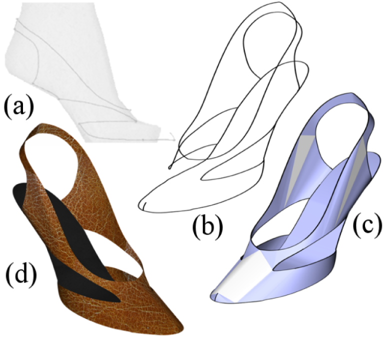
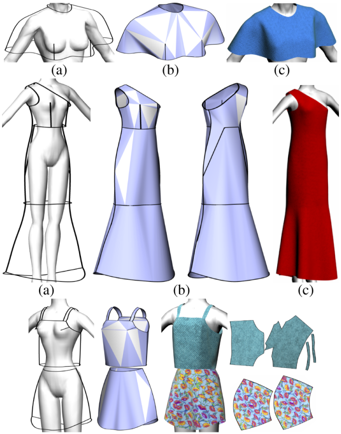


Figure 1: *Modeling developable surfaces (shoe upper and sole) from sketched boundaries: (a) upper boundary sketched over a foot model; (b) extracted contours; (c) structure of the obtained developable surface with torsal surfaces shown in blue and planar transition regions in white; (d) textured model.*

Rose, Sheffer, Wither, Cani, Thibert : *Developable Surfaces from Arbitrary Sketched Boundaries*, Eurographics Symposium on Geometry Processing (2007)

Réglé et développable



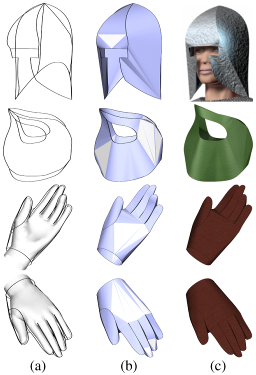


Figure 12: *Metal and leather: helmet (six panels), purs (three panels), and glove (ten panels).*

Rose, Sheffer, Wither, Cani, Thibert : *Developable Surfaces from Arbitrary Sketched Boundaries*, Eurographics Symposium on Geometry Processing (2007)

Théorème : *TOUTES les surfaces sont LOCALEMENT habillables.*

Il faut peut-être un nombre très grand de morceaux.

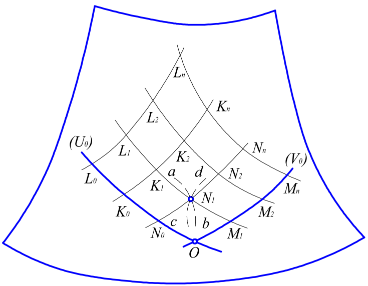
Théorème : *TOUTES les surfaces sont LOCALEMENT habillables.*

Il faut peut-être un nombre très grand de morceaux.

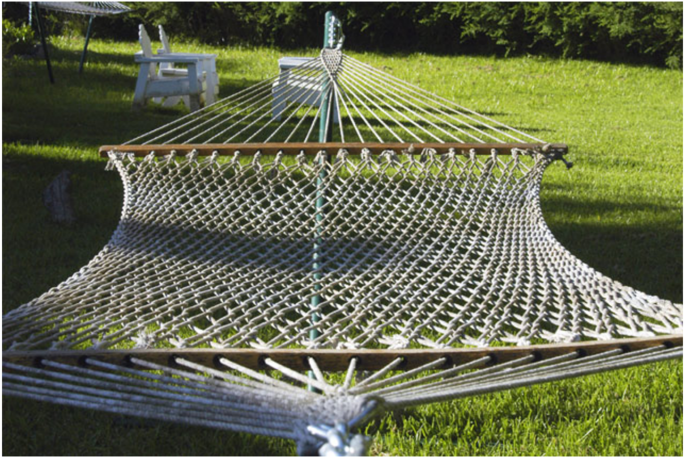
Théorème : *TOUTES les surfaces sont LOCALEMENT habillables.*

Il faut peut-être un nombre très grand de morceaux.

"Preuve : "



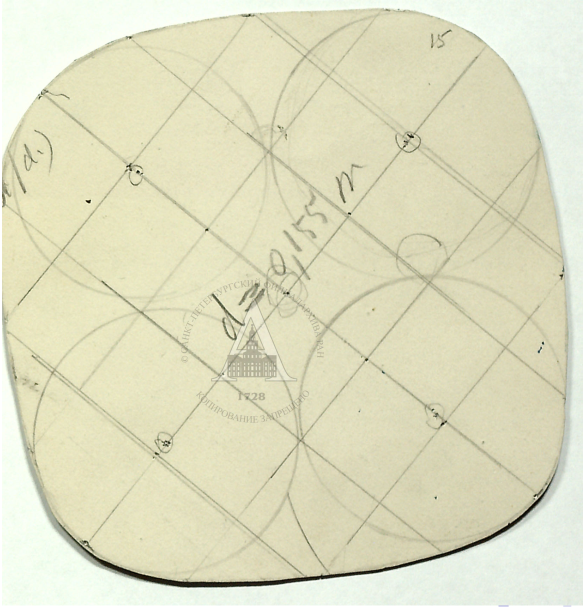
Hamac



Un théorème de Tchebychev ?

Théorème : *On peut habiller la sphère avec DEUX pièces, chacune couvrant un hémisphère.*

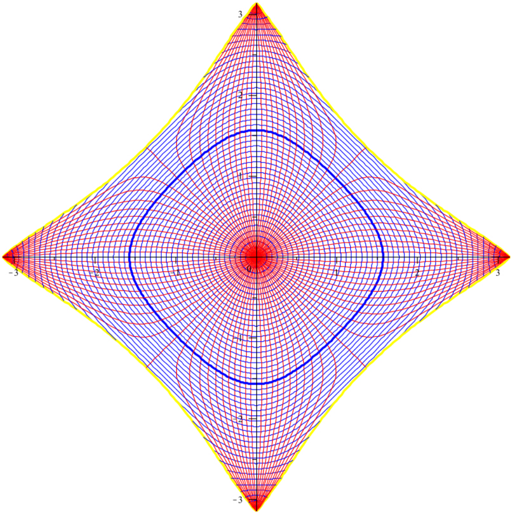
La coupe des habits



Mieux...

Théorème : *On peut habiller la sphère avec UNE pièce.*

Le patron



Habiller la sphère

Si on veut habiller la sphère, l'angle entre les fils $\omega(x, y)$ doit vérifier la relation suivante :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = -\sin \omega.$$

C'est l'équation de sine-Gordon.

Il y a une unique solution de la forme $\omega(x, y) = U(xy)$ où U est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $U(0) = \pi/2$.

Une équation aux dérivées partielles

Si on veut habiller la sphère, l'angle entre les fils $\omega(x, y)$ doit vérifier la relation suivante :

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x \partial y} = -\sin\omega.$$

C'est l'équation de sine-Gordon.
Il y a une unique solution de la forme $\omega(x, y) = U(xy)$ où U est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que $U(0) = \pi/2$.

Une équation différentielle ordinaire

$$xU''(x) + U'(x) + \sin U(x) = 0$$

$$U(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{18} + \cdots$$

Une équation différentielle ordinaire

$$xU''(x) + U'(x) + \sin U(x) = 0$$

$$U(x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{18} + \cdots$$

Une série

$$
\begin{aligned}
U(x) = {} & \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{18}x^3 - \frac{7}{1800}x^5 \\
& + \frac{521}{1587600}x^7 - \frac{31139}{1028764800}x^9 \\
& + \frac{18279367}{6224027040000}x^{11} \\
& - \frac{11159392859}{37866980511360000}x^{13} \\
& + \frac{25289583956249}{834966920275488000000}x^{15} \\
& - \frac{4078693576473449}{1286962346451285504000000}x^{17} \\
& + \frac{1518554408236687 2679}{4515847916709844730695 6800000}x^{19} \\
& - \frac{211331787274262639578 97}{5857320386085416253637632 00000000}x^{21} \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

Une remarque

Si on change les signes...

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = +\sin \omega,$$

On habille le plan non-euclidien...

Supposons [...] un monde renfermé dans [un grand cercle] et soumis aux lois suivantes :
La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint [le cercle] où ce monde est renfermé.
[...]

[...]
Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon [du cercle] limite ; soit r la distance du point considéré au centre de [ce cercle]. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.
Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.
Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.
Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera [du cercle] limite.
[...]

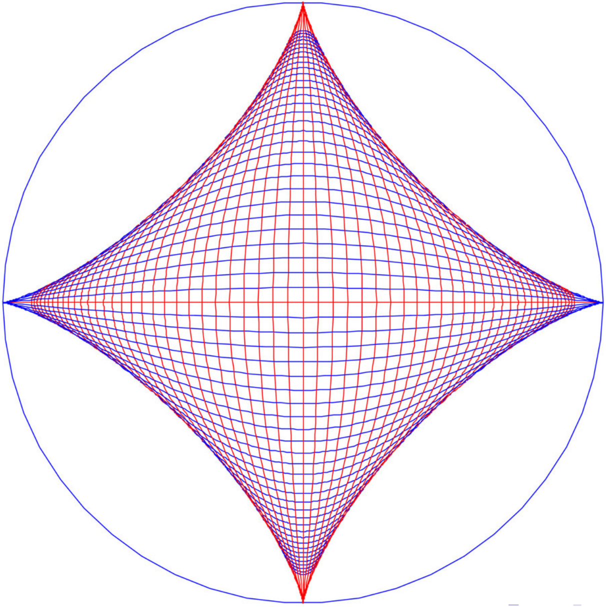
Le monde non-euclidien

Le monde non-euclidien

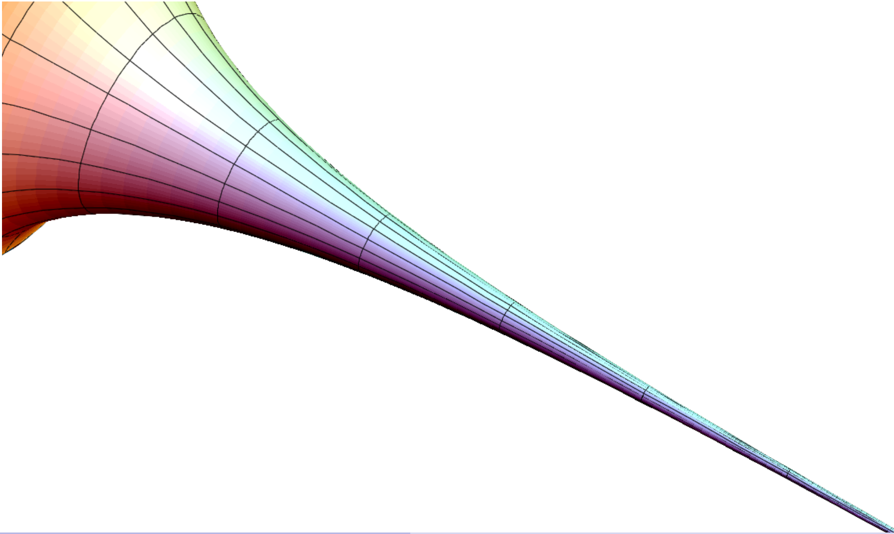
Le monde non-euclidien

[..]
Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.
Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher [du cercle] limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre [le cercle] limite.
Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables ; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler. [...] Qu'on me permette pour abréger le langage, d'appeler un pareil mouvement déplacement non euclidien.
Ainsi des êtres comme nous, dont l'éducation se ferait dans un pareil monde, n'auraient pas la même géométrie que nous. [Si ces êtres imaginaires] fondent une géométrie, [...] ce sera la géométrie non euclidienne.

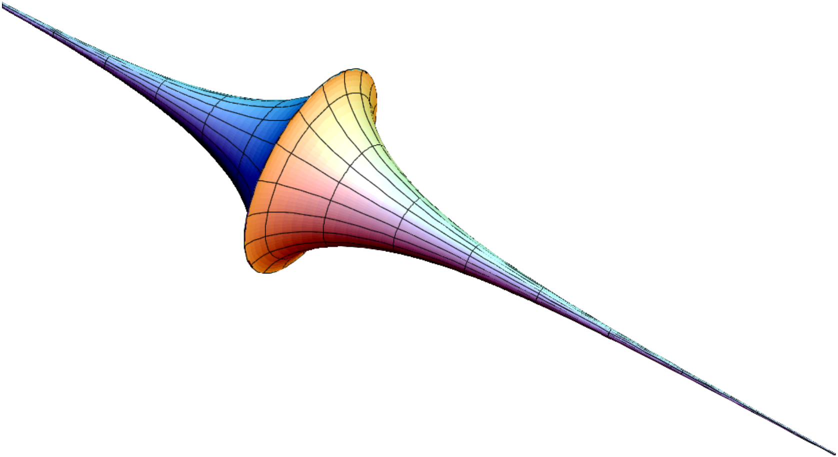
Habillage d'une partie du plan non-euclidien



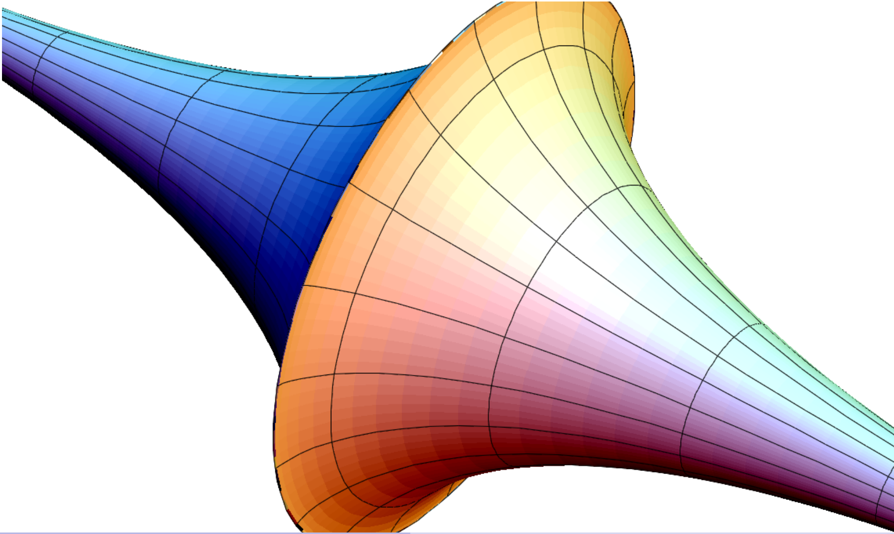
Représenter le plan non-euclidien dans l'espace euclidien de dimension 3 ?



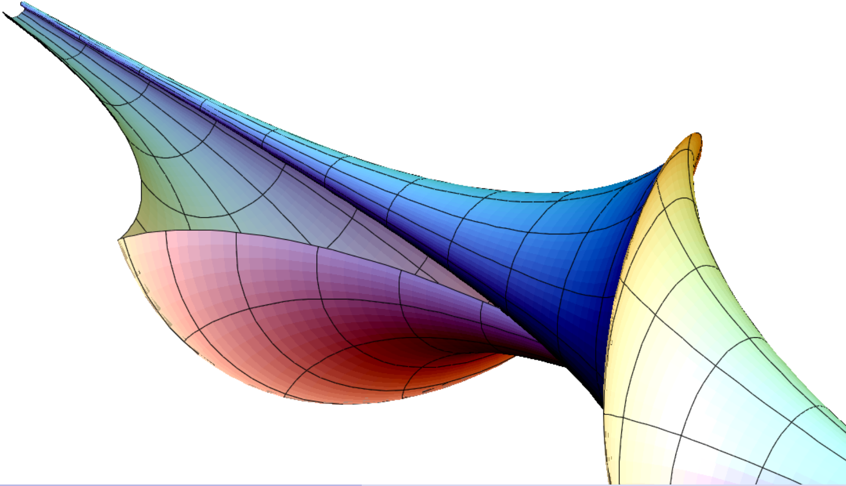
Représenter le plan non-euclidien dans l'espace euclidien de dimension 3 ?



Représenter le plan non-euclidien dans l'espace euclidien de dimension 3 ?



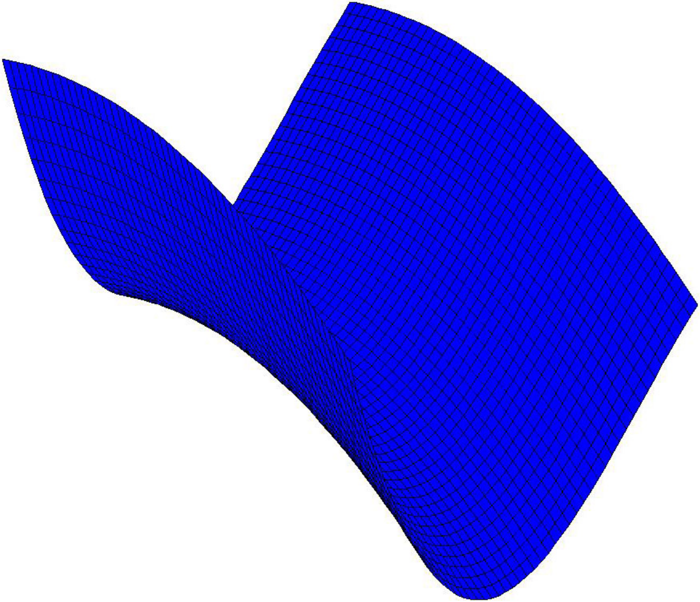
Représenter le plan non-euclidien dans l'espace euclidien de dimension 3 ?



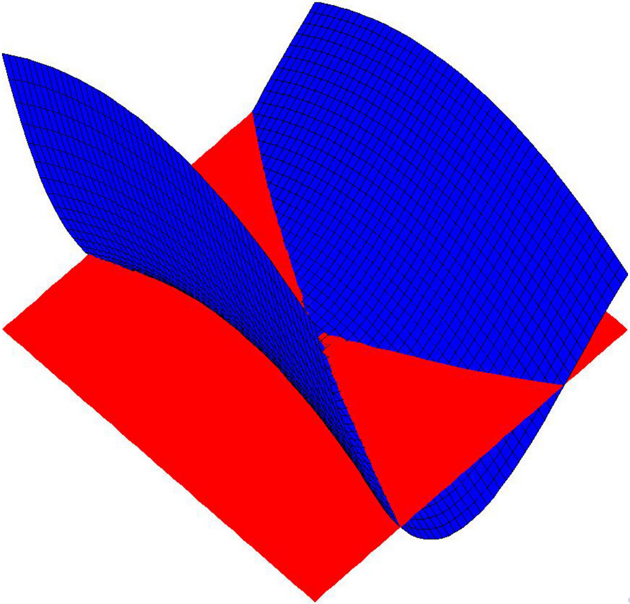
Proposition de Hilbert

Théorème : *Les courbes asymptotiques d'une surface non-euclidienne définissent un tissu de Tchebychev.*

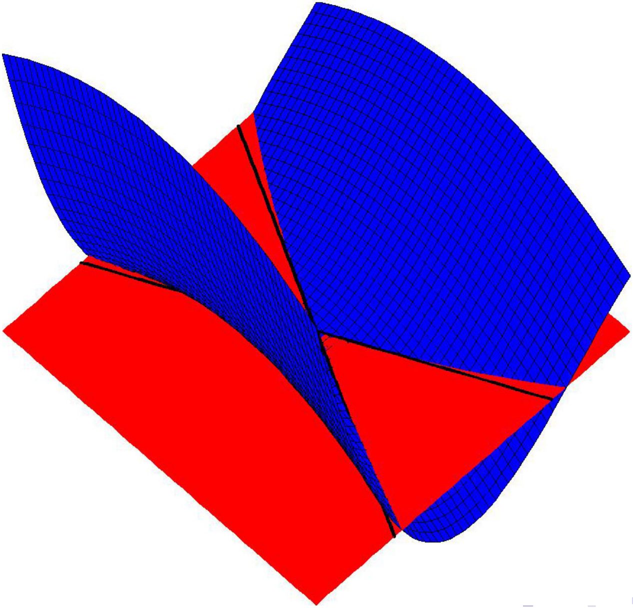
Courbes asymptotiques



Courbes asymptotiques



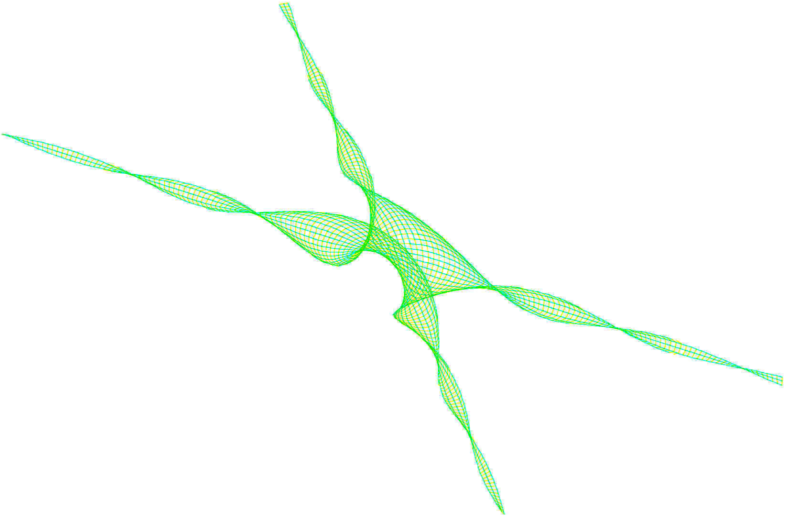
Courbes asymptotiques



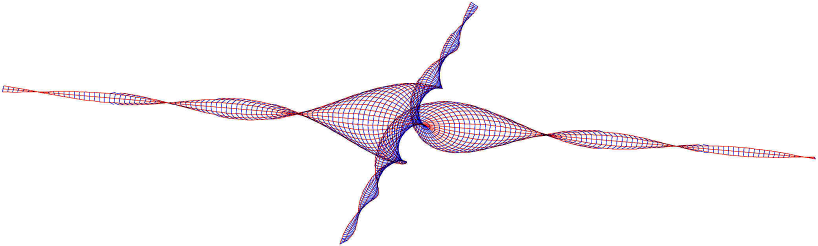
Théorème de Hilbert

Théorème : *Le plan non-euclidien ne peut pas se représenter dans l'espace euclidien de dimension 3*

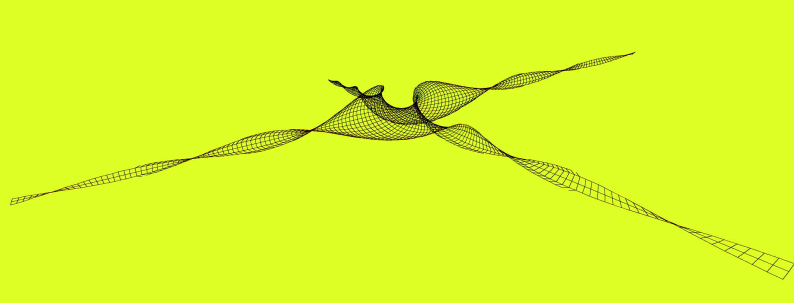
Un surface “nouvelle”



Un surface "nouvelle"



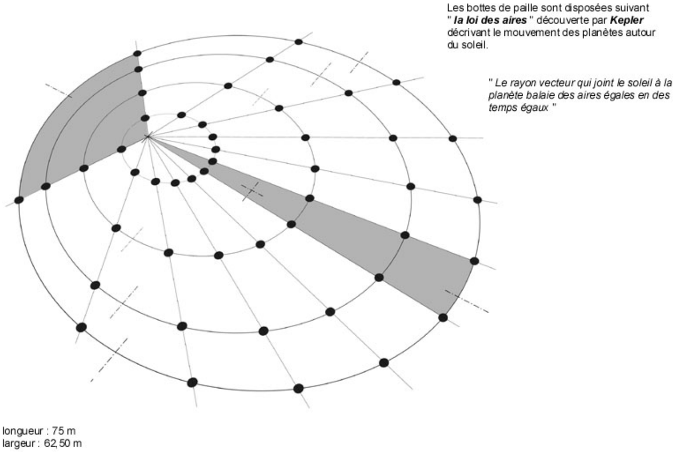
Un surface "nouvelle"



Un surface "nouvelle"

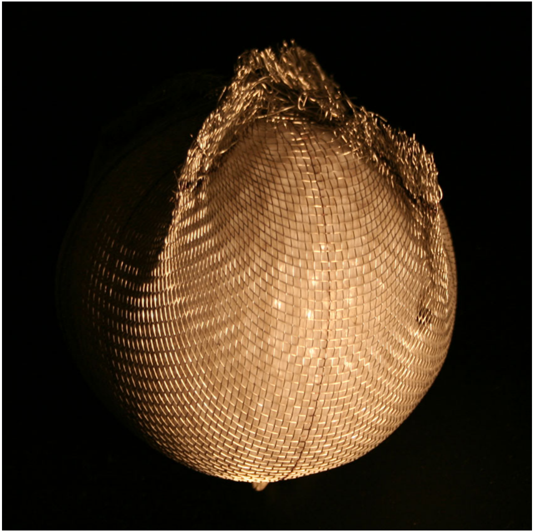
Pierre Gallais

Pierre Gallais



Pierre Gallais

Pierre Gallais



Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

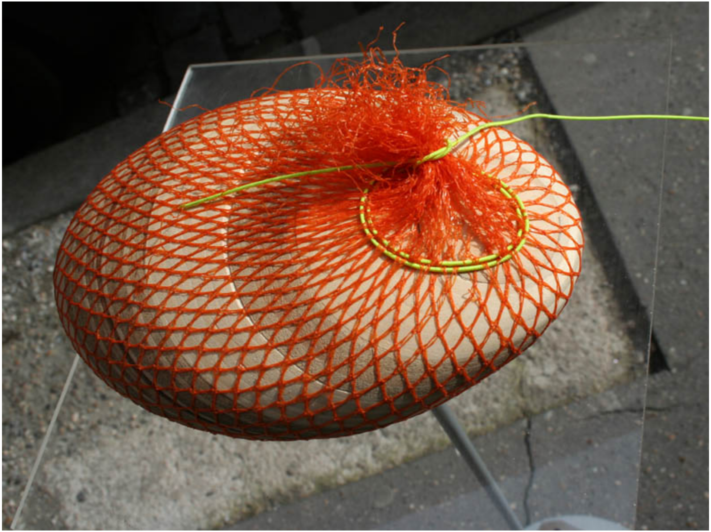
Pierre Gallais

Pierre Gallais

Pierre Gallais

Habiller un ellipsoïde

Habiller un ellipsoïde



Habiller un ellipsoïde

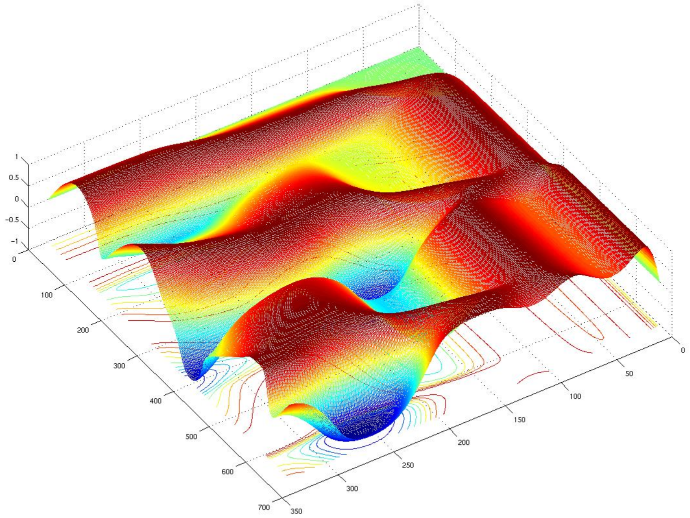
Théorème : *On peut habiller un ellipsoïde s'il est presque rond...*

Une équation !

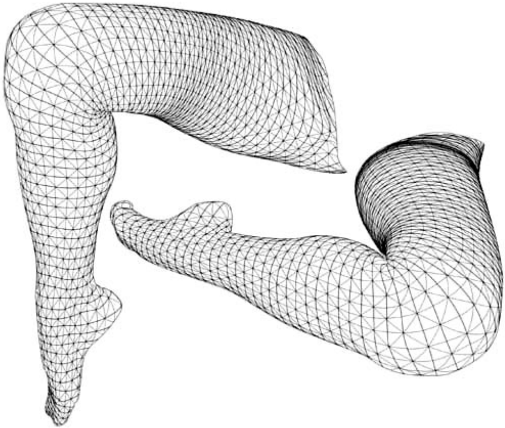
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \Gamma^1_{11} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \Gamma^1_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \Gamma^1_{22}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \Gamma^2_{11} \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \Gamma^2_{22}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$$

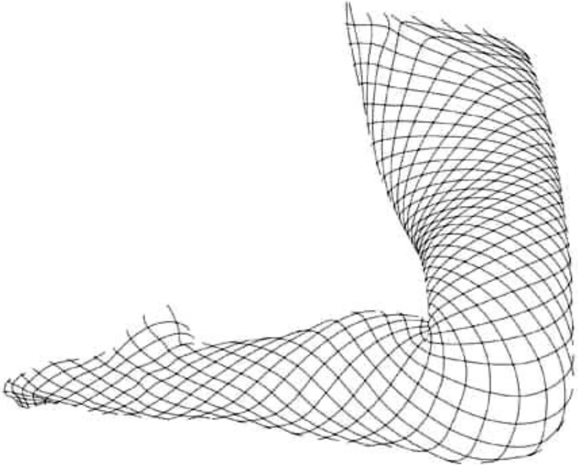
Habiller un ellipsoïde



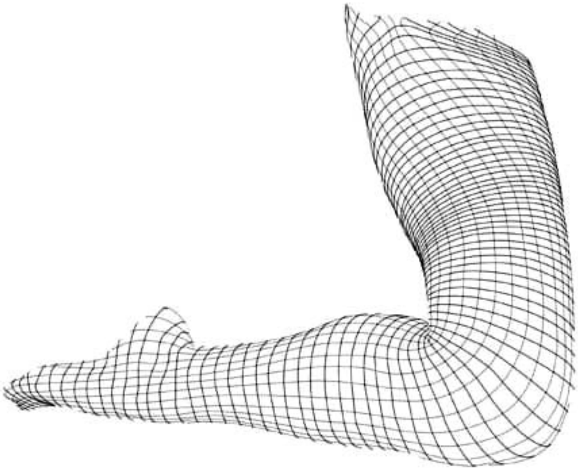
Pierre Gallais



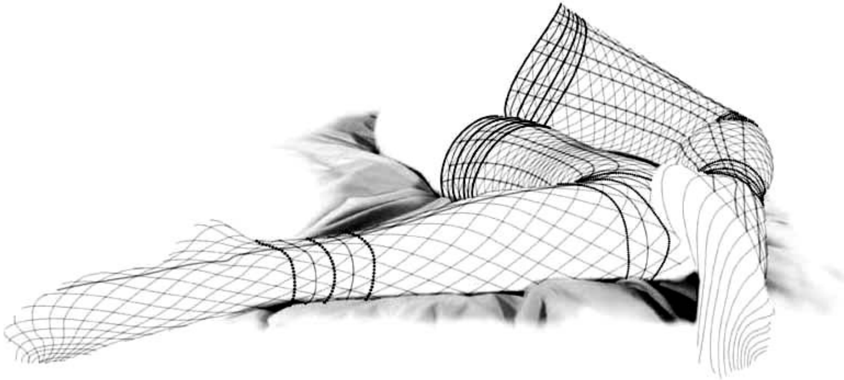
Pierre Gallais



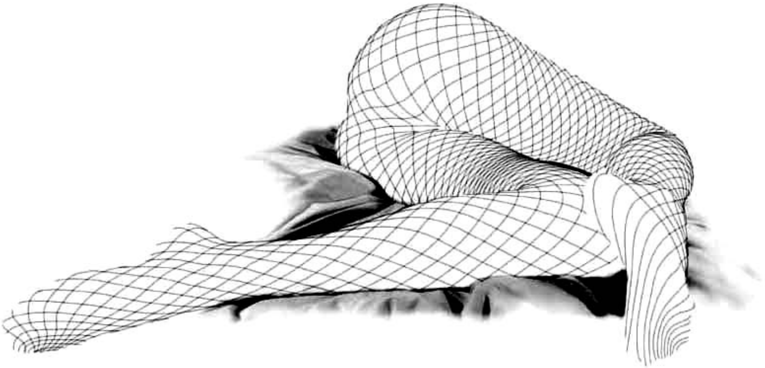
Pierre Gallais



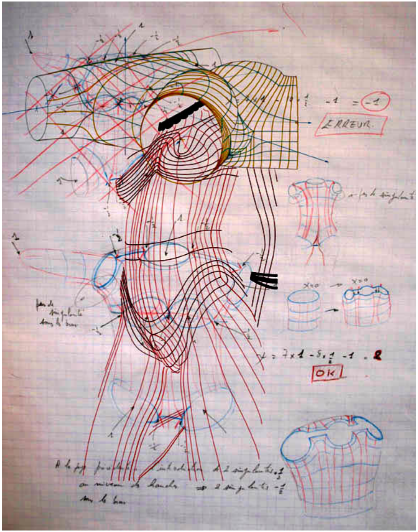
Pierre Gallais



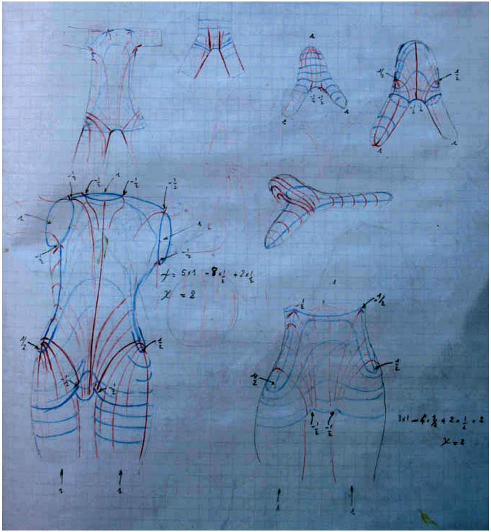
Pierre Gallais



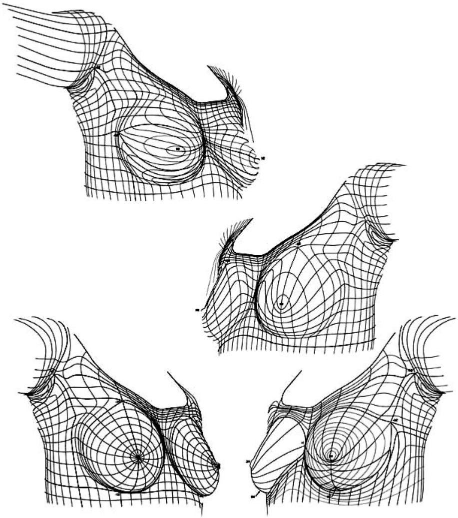
Pierre Gallais



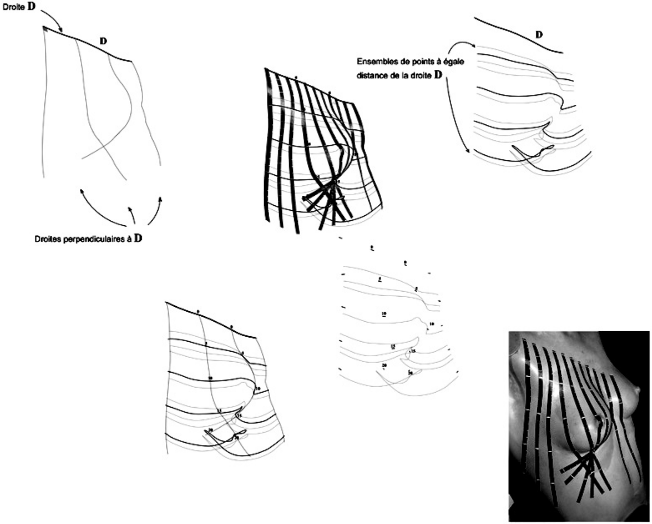
Pierre Gallais



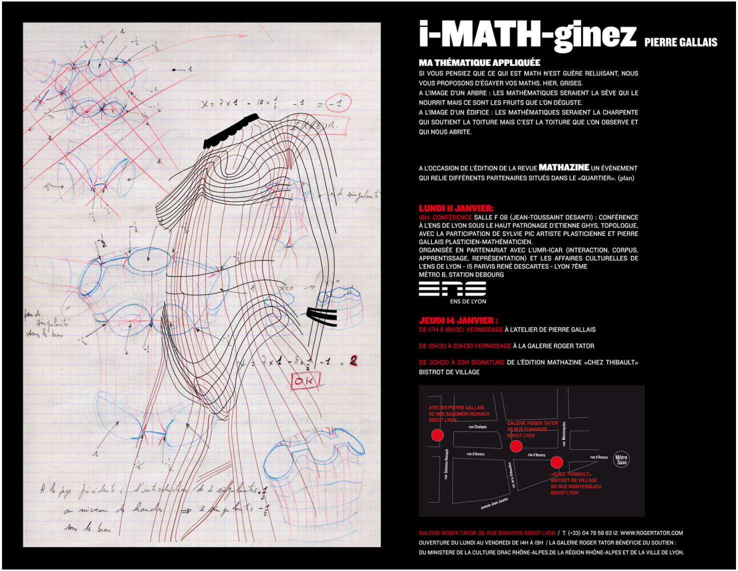
Pierre Gallais



Pierre Gallais



I-Math-ginez



i-MATH-ginez PIERRE GALLAIS
MA THÉMATIQUE APPLIQUÉE
SI VOUS PENSIEZ QUE CE QUI EST MATH N'EST GUÈRE RELUISANT, NOUS VOUS PROPOSONS D'ÉGAYER VOS MATHS, HIER, GRISES.
A L'IMAGE D'UN ARBRE : LES MATHÉMATIQUES SERAIENT LA SÈVE QUI LE NOURRIT MAIS CE SONT LES FRUITS QUE L'ON DÉGUSTE.
A L'IMAGE D'UN ÉDIFICE : LES MATHÉMATIQUES SERAIENT LA CHARPENTE QUI SOUTIENT LA TOITURE MAIS C'EST LA TOITURE QUE L'ON OBSERVE ET QUI NOUS ABRITE.
A L'OCCASION DE L'ÉDITION DE LA REVUE MATHAZINE UN ÉVÈNEMENT QUI RELIE DIFFÉRENTS PARTENAIRES SITUÉS DANS LE «QUARTIER». (plan)
LUNDI 11 JANVIER:
18H: CONFÉRENCE SALLE F 08 (JEAN-TOUSSAINT DESANTI) : CONFÉRENCE À L'ENS DE LYON SOUS LE HAUT PATRONAGE D'ETIENNE GHYS, TOPOLOGUE, AVEC LA PARTICIPATION DE SYLVIE PIC ARTISTE PLASTICIENNE ET PIERRE GALLAIS PLASTICIEN-MATHÉMATICIEN.
ORGANISÉE EN PARTENARIAT AVEC L'UMR-ICAR (INTERACTION, CORPUS, APPRENTISSAGE, REPRÉSENTATION) ET LES AFFAIRES CULTURELLES DE L'ENS DE LYON - 15 PARVIS RENÉ DESCARTES - LYON 7ÈME
MÉTRO B, STATION DEBOURG
ENS DE LYON
JEUDI 14 JANVIER :
DE 17H À 18H30: VERNISSAGE À L'ATELIER DE PIERRE GALLAIS
DE 18H30 À 20H30 VERNISSAGE À LA GALERIE ROGER TATOR
DE 20H30 À 23H SIGNATURE DE L'ÉDITION MATHAZINE «CHEZ THIBAULT» BISTROT DE VILLAGE
ATELIER PIERRE GALLAIS
52 RUE SALOMON REINACH
69007 LYON
GALERIE ROGER TATOR
36 RUE D'ANVERS
69007 LYON
rue Chalopin
rue Montesquieu
rue d'Anvers
rue Salomon Reinach
rue de la Thibaudière
avenue Jean Jaurès
Métro Saxe
«CHEZ THIBAULT»
BISTROT DE VILLAGE
80 RUE MONTESQUIEU
69007 LYON
GALERIE ROGER TATOR 36, RUE D'ANVERS 69007 LYON / T. (+33) 04 78 58 83 12 WWW.ROGERTATOR.COM
OUVERTURE DU LUNDI AU VENDREDI DE 14H À 19H / LA GALERIE ROGER TATOR BÉNÉFICIE DU SOUTIEN :
DU MINISTERE DE LA CULTURE DRAC RHÔNE-ALPES,DE LA RÉGION RHÔNE-ALPES ET DE LA VILLE DE LYON.