Poincaré le 8 août 1881 : un premier énoncé du théorème d'uniformisation

L'histoire de la découverte des groupes fuchsiens par Poincaré, à partir de mai 1880, a été bien décrite, en particulier par Dieudonné, Gray, Walter et, plus récemment, par Saint Gervais. Je voudrais aujourd'hui me concentrer sur deux moments très précis : le 18 mai et le 8 août 1881, qui correspondent à deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Selon moi, ce sont deux moments importants dans la vie scientifique de Henri Poincaré.

Le 18 mai 1881, il met en place pour la première fois la méthode de continuité qui sera un outil puissant, une espèce de botte secrète de Poincaré, tout au long de sa carrière.

Le 8 août 1881, il osera énoncer pour la première fois le théorème d'uniformisation, certes limité aux courbes algébriques, certes dans une version affaiblie, mais avec une démonstration absolument magnifique et à un niveau finalement élémentaire.

Mon but est modeste : évoquer deux joyaux de Poincaré, quatre pages perdues au milieu de l'océan des onze volumes de œuvres. Je ne suis pas historien. Je cherche seulement à faire sortir de l'oubli deux pépites qui n'ont pas été exploitées comme il faudrait.

Avant de décrire ces deux notes, il me faut tout de même rappeler le contexte général de l'histoire des groupes fuchsiens. Le 28 mai 1880, un an auparavant donc, Poincaré soumet un mémoire pour le grand prix des sciences mathématiques. Les 28 juin, 6 septembre et 20 décembre, il envoie trois suppléments qui ont fait l'objet d'une analyse approfondie par Gray et Walter. Poincaré ne remportera qu'une mention honorable, en février 1881. A partir de cette date, il peut rompre l'anonymat imposé par le prix et commencer à publier ses résultats. Trois premières notes, les 14 et 21 février et le 4 avril résument en quelque sorte ce qu'il avait soumis pour le grand prix. Les résultats sont impressionnants et je ne peux qu'en donner ici une liste.

- La définition des groupes fuchsiens, sous-groupes discrets de transformations projectives d'une variable z, qui préservent le disque unité.

- La prise de conscience que ces transformations ne sont autres que les isométries de la géométrie non euclidienne de Lobatchevsky.

- La construction concrète de groupes fuchsiens à partir de polygones non euclidiens dont on identifie les côtés par paires. Construction lumineuse si on y pense en termes de géométrie non euclidienne.

- La construction explicite, grâce aux fameuses séries de Poincaré, de fonctions fuchsiennes : des fonctions méromorphes dans le disque invariantes par un groupe fuchsien.

- La démonstration, pas très convaincante, que deux fonctions fuchsiennes, associées au même groupe, sont liées par une certaine relation algébrique.

- Et enfin, mais je devrais dire, et d'abord, puisqu'il s'agit de la vraie motivation de Poincaré, les fonctions fuchsiennes permettent de résoudre certaines équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Certaines relations algébriques ? Certaines équations différentielles ? Pourquoi pas toutes ? Poincaré rêve de comprendre toutes les courbes algébriques, et plus encore toutes les équations différentielles linéaires. La dernière phrase de son troisième supplément disait d'ailleurs :

"Je ne doute pas que ces fonctions nouvelles ne permettent d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Il faudrait une longue discussion que je me réserve d'entreprendre plus tard mais dans laquelle je ne veux pas entrer pour le moment".

Un ami de Poincaré, Lecornu, écrit :

"Je me souviens qu'invité par moi à dîner chez mes parents le 31 décembre 1880, il passa la soirée à se promener de long en large, n'entendant pas ce qu'on lui disait ou répondant à peine par des monosyllabes, et oubliant l'heure à tel point que passé minuit, je pris le parti de lui rappeler doucement que nous étions en 1880. Il parut, à ce moment redescendre sur terre, et se décida à prendre congé de nous. Quelques jours après, m'ayant rencontré sur le quai du port de Caen, il me dit négligemment : je sais intégrer toutes les équations différentielles".

J'en viens à la première note, du 18 mai 1881 sur laquelle je voudrais insister un peu et qui, comme je l'ai dit, est la première apparition de la méthode de continuité. A vrai dire, il s'agit de deux notes puisque les démonstrations n'en seront esquissées que dans une autre note, la semaine suivante. Cette première note est si courte que je peux la lire intégralement.

"J'ai étudié en particulier les fonctions fuchsiennes $f(z)$ telles que si l'on pose
$$
x=f(z),\quad y_1=\sqrt{\frac{df}{dz}}, \quad y_2=z\sqrt{\frac{df}{dz}},
$$
y_1 et y_2 satisfassent à une équation de la forme
$$
\frac{d^2y}{dx^2}= y \phi(x),
$$
ϕ étant rationnel en x.

J'ai reconnu que : 1 {que les points singuliers de l'équation (1) qui sont les infinis de ϕ sont tous réels};

[Je dois avouer que j'ai mis beaucoup de temps avant de comprendre ce que Poincaré veut dire dans la phrase précédente.]

2. que l'on peut choisir $f(z)$ de telle façon que ces infinis de $\phi(x)$ soient aussi

nombreux que l'on veut, et aient telles valeurs réelles que l'on veut.

[Je vais revenir en détail sur ce point par la suite : c'est la phrase clé.]

En introduisant les fonctions zétafuchsiennes qui correspondent à ces fonctions $f(z)$, on intègre \emph{toutes les équations linéaires à coefficients rationnels dont tous les points singuliers sont réels.}

[Ce dernier point n'est qu'une application directe du point 2 et c'est ce qui importe à Poincaré : résoudre des équations différentielles.]

"

Alors, venons-en à la démonstration de Poincaré, qui sera largement détaillée plus tard, dans son mémoire de Acta Mathematica l'année suivante.

Le point 2, le point crucial de la note, consiste à affirmer, en termes modernes, que si l'on retire au moins trois points de l'axe réel de la sphère de Riemann, le revêtement universel de cette sphère épointée est le disque de Poincaré. En termes moins modernes, la sphère moins n points réels peut être uniformisée par le disque. Dans la terminologie de Poincaré, il existe une fonction fonction fuchsienne dont les valeurs évitent exactement n nombres réels pré-assignés.

Pourquoi cette démonstration ne pourrait-elle pas se généraliser pour montrer que le revêtement universel de la sphère privée de n points quelconques, non nécessairement réels, est également le disque ? Le problème est clair. La méthode envisagée par Poincaré consiste à utiliser des groupes fuchsiens engendrés par des réflexions par rapport aux côtés d'un polygone. Comme une réflexion est antiholomorphe, les courbes algébriques construites par ce type de procédé possèdent une symétrie antiholomorphe : ce sont donc des courbes algébriques réelles. Si l'on veut construire des courbes algébriques non réelles, il faut des groupes fuchsiens plus compliqués.

Le 30 mai, Poincaré fait une tentative de généralisation dans une note horriblement écrite qui ne contient aucun résultat mais exprime des souhaits. Cherchons un groupe fuchsien qui uniformise la sphère moins n points. A chacun des ces n points correspond un élément parabolique du groupe PSL(2,R). Un élément parabolique dépend de deux paramètres réels, ce qui fait que nous avons $2n$ inconnues. Il s'agit d'exprimer le fait que le produit de ces n éléments paraboliques est l'identité, ce qui nous ramène à $2n-3$ paramètres réels. Comme on peut toujours conjuguer l'ensemble de ces éléments paraboliques par un même élément de PSL(2,R), de dimension 3, il nous reste $2n-6$ paramètres. La donnée de n points sur une sphère dépend de $2n$ paramètres et le groupe projectif PGL(2,C) des automorphismes de la sphère est de dimension 6. Un n-uplet de points sur la sphère, à transformation projective près, dépend également de $2n-6$ paramètres. Il y a donc autant d'équations que d'inconnues : un miracle que je ne comprends toujours pas aujourd'hui. On peut donc espérer qu'il y a suffisamment de groupes fuchsiens pour uniformiser la sphère moins n points quelconques. La conclusion de la note de Poincaré est donc :

"Si j'arrive à démontrer que ces équations ont toujours une solution, j'aurai montré que toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques s'intègrent par les transcendantes fuchsiennes."

A vrai dire, il faudra attendre 26 ans avant que Poincaré ne réponde à cette question dans sa généralité !

Quelques jours plus tard, le 6 juin 1881, commence la célèbre correspondance entre Klein et Poincaré. Klein n'a lu que les trois premières note. Sa première lettre, un peu arrogante, consiste à informer Poincaré que Riemann, Schwarz, et Klein lui-même ont déjà démontré beaucoup de choses analogues. C'est vrai. C'est incroyable mais vrai : en juin 1881, Poincaré n'a pas lu Riemann. Mais d'un autre côté, ce n'était pas vrai. D'une part personne, à commencer par Klein, n'avait vu l'interprétation non euclidienne, mais surtout les groupes fuchsiens construits par Klein ou Schwarz n'étaient que des exemples, typiquement d'origines arithmétiques. Jamais, il me semble, ils n'avaient envisagé que la méthode pouvait décrire toutes les courbes algébriques. A partir de ce moment commence une concurrence entre Klein et Poincaré. Klein, le 2 juillet par exemple, essaye d'expliquer qu'il est facile de retrouver le résultat de la note de Poincaré du 18 mai en utilisant les résultats de Schwarz sur la représentation conforme des domaine à bords circulaires. Poincaré ne peut pas répliquer car il n'a pas lu Schwarz mais je dois vous dire que Klein exagère et que Schwarz n'a jamais démontré de que Klein lui attribue. Quoi qu'il en soit, le reste de la lettre de Klein du début juillet 1881 montre clairement qu'il n'a pas compris que les groupes fuchsiens pourraient bien être assez nombreux pour uniformiser toutes les courbes algébriques. Il n'a probablement pas lu la note de Poincaré du 30 mai : "Si j'arrive, j'aurais montré…"

J'en viens à la note du 8 août 1881; celle où Poincaré se lâche et ose énoncer enfin le théorème d'uniformisation. Il conclut fièrement :

"1. que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zêtafuchsiennes.

2. que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire."

En fait, le même jour, il écrit une lettre au président de l'Université de Caen, où il travaillait à l'époque, contenant un rapport sur son activité mathématique pendant l'année.
Les mathématiciens d'aujourd'hui ont tort de penser que l'écriture des rapports d'activité pour l'administration est une invention récente ! La conclusion de son rapport d'activité est impressionnante :

"Je suis arrivé à démontrer:

1. qu'il existe des fonctions uniformes inaltérées par certains groupes de substitutions linéaires.

2. que ces groupes sont aisés à former à l'aide de règles très simples.

3. que ces fonctions sont analogues aux fonctions elliptiques et qu'il existe des fonctions définies par de nombreux développements en séries et jouant le même rôle que les transcendantes Θ et Z.

4. que ces fonctions permettent de résoudre d'une infinité de manière toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

5. que ces fonctions permettent d'exprimer par des fonctions uniformes d'un paramètre les coordonnées d'une courbe algébrique quelconque et de calculer les intégrales abélienne de première espèce.

6. que les constantes qui entrent dans ces fonctions et qui y jouent le même rôle que le module dans les fonctions elliptiques peuvent s'exprimer par des fonctions uniformes de certains paramètres, analogues aux fonctions modulaires."

En fait, il triche ! et ne démontre pas tout à fait ce qu'il affirme. Mais il est si sûr du théorème qu'il lui faut l'annoncer, même au prix d'une arnaque. Il faut dire qu'en août 1881, Klein va finir par comprendre que les groupes fuchsiens uniformisent peut-être bien toutes les courbes. Il faut faire vite, il faut marquer le terrain, il faut s'approprier le théorème.

Quelle est la tricherie en question ? Lisons le début de la note :

"Construire une fonction fuchsienne ne pouvant prendre aucune des n valeurs données $\alpha_1, …, \alpha_n$. Si l'on assujettit de plus la fonction à pouvoir prendre toutes les valeurs possibles à l'exception des α_i, le nombre de paramètres dont on dispose est égal à celui des conditions que l'on impose. Si l'on ne s'assujettit pas à cette condition, il est infini. Grâce à cette circonstance, il était extrêmement probable que le problème était toujours susceptible d'une infinité de solutions. Je vais faire voir que cela est vrai dans le cas général."

En fait, Poincaré démontre le théorème suivant. Soit X une courbe algébrique. Alors il existe une partie finie $S \subset X$ telle que le revêtement universel de $X \setminus S$ est le disque. Dit à la manière de Poincaré, il existe un groupe fuchsien tel que la surface de Riemann associée, quotient du disque par le groupe, est $X \setminus S$. Bien sûr, le "vrai" théorème d'uniformisation affirme que la partie S peut-être choisie vide (si le genre de X est au moins 2). Montrer que le complémentaire d'une partie finie est uniformisable par le disque, c'est déjà pas mal ! en tous les cas bien suffisant pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Comment fait-il ? Partez d'une courbe algébrique X, et prenez une fonction rationnelle $f : X \rightarrow P^1$. Cette application ramifie sur une partie finie S_1 de la sphère de Riemann. Si S_1 était formé de points réels, le théorème serait démontré. Il suffit en effet de relever l'uniformisation de la sphère moins ces points réels, pour obtenir une uniformisation de $X\setminus S_1$. Si, comme il faut s'y attendre, S n'est pas formé de points réels, Poincaré compose f avec un polynôme bien choisi P et considère donc $P \circ f$. Les points critiques de $P \circ f$ sont $P(S_1) \cup Critique (P)$. Poincaré démontre alors le joli lemme suivant. Si S_1 est une partie finie de C, il existe un polynôme P tel que

$P(S_1)$ est contenu dans R et dont les valeurs critiques sont réelles.

Il s'agit d'un exemple assez agréable chez Poincaré. La preuve est complètement détaillée, rédigée à la manière d'un exercice d'algèbre pour étudiants de licence. Je recommande d'ailleurs cet exercice. Un moment rafraîchissement au milieu de ce fatras que représentent souvent les rédactions de Poincaré !

Le 8 août 1881, Poincaré est donc probablement heureux. Il a le sentiment d'avoir résolu toutes les équations différentielles. A la vérité, il sait bien qu'il triche, mais il est si sûr !

L'histoire n'est pas finie évidemment mais au moins la conjecture est là : le revêtement universel de n'importe quelle courbe algébrique de genre au moins 2 est le disque. Klein et Poincaré lutteront sur cette question. L'un et l'autre utiliseront des méthodes proches, fondées sur la méthode de continuité dont j'ai dit qu'elle est due à Poincaré. Les notes, les articles, les mémoires se succèderont. Fin 82, l'un et l'autre affirmeront avoir démontré la conjecture. Après avoir essayé de lire tout cela en détail, Henri-Paul de Saint Gervais considère que ni l'un ni l'autre n'ont été proches d'une démonstration, même avec les critères de rigueur de l'époque. Poincaré et Klein ont-ils été convaincus eux-mêmes ? Je n'en sais rien. Quelques années plus tard, mais c'est une autre histoire, celle de la méthode de balayage, de la théorie du potentiel etc., Poincaré reprendra la question et finalement, en 1907, en même temps que Koebe, il obtiendra la version générale du théorème d'uniformisation : le revêtement universel d'une surface de Riemann quelconque est le plan, le disque ou la sphère.

Il est temps de conclure. J'aime bien ces deux notes. La première marque l'éclosion de la méthode de continuité qui est promise à un grand avenir et qui est encore très utile aujourd'hui. Elle permet de démontrer des théorèmes d'existence par des méthodes topologiques, de type degré topologique, ou plus généralement homologiques. Ce qui me frappe, c'est que Poincaré crée cela dans une espèce d'isolement scientifique. D'une part, il est fort ignorant à l'époque, en particulier des travaux "allemands" et d'autre part, ses contacts naturels, Hermite en particulier, ne lui sont pas très utiles. Hermite, par exemple, lui écrit qu'il ne comprend pas grand-chose à la géométrie non-euclidienne.

Quant à la seconde note, celle du 8 août, en soi, elle n'est pas très importante puisqu'elle se réduit à un exercice de licence, mais elle me semble capitale puisque c'est à cette occasion que, sous la pression de la concurrence de Klein, Poincaré ose énoncer le théorème d'uniformisation que Klein n'aurait jamais osé conjecturer.

C'est peut-être le premier théorème important que le jeune Poincaré peut affirmer avec fierté. Dans son rapport d'activité du 8 août, il conclut :

"J'ai résolu toutes les équations différentielles à coefficients algébriques !"

=====

iPoincaré 8 august 1881 : prima formulare a teoremei de uniformizare

Istoria descoperirii grupurilor fuchsiene de catre Poincaré, à partir de mai 1880, a été bien décrite, en particulier par Dieudonné, Gray, Walter et, plus récemment, par Saint Gervais. **: Vreau sa ma concentrez astazi pe doua momente foarte precise legate de zilele de 18 mai si 8 august 1881**, qui correspondent à deux notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Selon moi, ce sont deux moments importants dans la vie scientifique de Henri Poincaré.

Pe 18 mai 1881, Poincaré inventeaza metoda de continuitate care va deveni o unealta eficace, une espèce de botte secrète de Poincaré, tout au long de sa carrière.

Pe 8 august 1881, Poincaré indrazneste sa enunte, pentru prima data, teorema de uniformizare, certes limité aux courbes algébriques, certes dans une version affaiblie, mais avec une démonstration absolument magnifique et à un niveau finalement élémentaire.

Mon but est modeste : **Evocarea a doua rezultate splendide ale lui Poincaré, 4 pagini pierdute in mijlocul unui ocean de 11 volume.** Je ne suis pas historien. Je cherche seulement à faire sortir de l'oubli deux pépites qui n'ont pas été exploitées comme il faudrait.

Avant de décrire ces deux notes, **trebuie sa reamintesc contextul general al descoperirii grupurilor fuchsiene. Pe 28 mai 1880, cu un an inainte, Poincaré propune un memoriu pentru Marele Premiu de Stiinte Matematice. Pe 28 iunie, 6 septembrie si 20 decembrie, el trimite trei texte suplimentare** qui ont fait l'objet d'une analyse approfondie par Gray et Walter. Poincaré ne remportera qu'une mention honorable, en février 1881. A partir de cette date, il peut rompre l'anonymat imposé par le prix et commencer à publier ses résultats. **Trei note, din 14, 21 februarie si 4 aprilie prezinta un rezumat al memoriului propus pentru Marele Premiu.** Les résultats sont impressionnants et je ne peux qu'en donner ici une liste.

- **Definitia grupurilor fuchsiene, subgrupuri discrete formate de transformari proiective de variabila complexa z, care lasa invariant discul unitate.**

- Descoperirea ca aceste transformari nu sunt altceva decit isometriile geometriei neeuclidiene a lui Lobatchevsky.

-Constructia concreta a unor grupuri fuchsiene, plecind de la poligoane neeuclidiene si identificind laturile pare. Constructie luminoasa, gindita in termeni de geometrie neeuclidiana.

- Constructia explicita, cu ajutorul faimoaselor serii Poincaré, a functiilor fuchsiene : functii meromorfe definite pe discul unitate si invariante fata de actiunea unui grup fuchsian.

- Demonstratia, nu foarte convingatoare, ca oricare doua functii fuchsiene,

asociate aceluiasi grup, sunt legate printr-o relatie algebrica.

-Si ajungem in sfirsit , la adevaratul interes al lui Poincaré : cu ajutorul functiilor fuchsiene putem rezolva unele ecuatii diferentiale liniare cu coeficienti algebrici.

Certaines relations algébriques ? Certaines équations différentielles ? Pourquoi pas toutes ? **Poincaré spera sa inteleaga toate curbele algebrice, si chiar mai mult- toate ecuatiile diferentiale liniare.** La dernière phrase de son troisième supplément disait d'ailleurs :

"Je ne doute pas que ces fonctions nouvelles ne permettent d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Il faudrait une longue discussion que je me réserve d'entreprendre plus tard mais dans laquelle je ne veux pas entrer pour le moment".

Un prieten al lui Poincaré, Lecornu, scrie despre el :

"Imi amintesc ca fiind invitat la noi acasa pentru revelionul din 31 décembre 1879, el s-a plimbat toata seara, fara sa auda ce se spunea, raspunzind monosilabic, uitind orice notiune de timp, asa ca la miezul noptii i-am amintit ca am trecut in anul 1880. Numai in acel moment a parut ca isi aminteste unde este si a decis sa plece. Citeva zile mai tirziu, ne-am intilnit pe cheiurile portului din Caen , si mi-a zis : stiu sa integrez toate ecuatiile diferentiale".

J'en viens à la première note, du 18 mai 1881 sur laquelle je voudrais insister un peu et qui, comme je l'ai dit, est la première apparition de la méthode de continuité. A vrai dire, il s'agit de deux notes puisque les démonstrations n'en seront esquissées que dans une autre note, la semaine suivante. Cette première note est si courte que je peux la lire intégralement.

"Am studiat in particular functille fuchsiene $f(z)$ astfel incit, daca

$$
x=f(z),\quad y_1=\sqrt{\frac{df}{dz}}, \quad y_2=z\sqrt{\frac{df}{dz}},
$$

atunci y_1 si y_2 satisfac o ecuatie de tip

$$
\frac{d^2y}{dx^2}= y \phi(x),
$$

unde ϕ este o functie rationala de variabila x.

Am demonstrat ca : 1 {Singularitatile ecuatiei (1), adica punctele unde ϕ ia valoarea infinit, sunt numere reale};

[Marturisesc ca mi-a luat mult timp sa pricep ce intelegea Poincaré prin fraza de mai sus.]

2. putem alege $f(z)$ astfel incit punctele in care $\phi(x)$ ia valoarea infinit

sa fie cit de multe vrem, si sa ia valorile reale pe care le vrem.

[Fraza de mai sus este importanta : o sa revin asupra ei mai tirziu.]

Cu ajutorul functiilor zetafuchsiene asociate functiilor $f(z)$, putem sa integram \emph{toate ecuatiile liniare cu coeficienti rationali si cu singularitati aflate pe axa reala.}

[Aceasta este o aplicatie directa a punctului 2 importanta pentru Poincaré, interesat de rezolvarea ecuatiilor diferentiale.]

"

Alors, venons-en à la démonstration de Poincaré, qui sera largement détaillée plus tard, dans son mémoire de Acta Mathematica l'année suivante.

Le point 2, le point crucial de la note, consiste à affirmer, en termes modernes, que **eliminind cel putin trei puncte situate pe axa reala a sferei lui Riemann, acoperirea universala este discul lui Poincaré.** En termes moins modernes, la sphère moins n points réels peut être uniformisée par le disque. Dans la terminologie de Poincaré, il existe une fonction fonction fuchsienne dont les valeurs évitent exactement n nombres réels pré-assignés.

ICI JE VAIS AU TABLEAU ET J'EXPLIQUE LA PREUVE, PROBABLEMENT EN ANGLAIS

Pourquoi cette démonstration ne pourrait-elle pas se généraliser pour montrer que le revêtement universel de la sphère privée de n points quelconques, non nécessairement réels, est également le disque ? Le problème est clair. **Metoda lui Poincaré consista in utilizarea grupurilor fuchsiene generate de reflectiile fata de laturile unui poligon. O astfel de reflectie fiind anti-holomorfa, curbele algebrice construite cu acest procedeu poseda o simetrie anti-holomorfa : ele sunt deci curbe algebrice reale. Pentru a construi curbe algebrice care nu sunt reale, trebuie considerate grupuri fuchsiene mai complicate.**

Le 30 mai, Poincaré fait une tentative de généralisation dans une note horriblement écrite qui ne contient aucun résultat mais exprime des souhaits. **Cautam acum un grup fuchsian care sa uniformizeze complementara a n puncte oarecare in sfera lui Riemann. La fiecare din cele n puncte corespunde un element parabolic in grupul PSL(2,R). Un element parabolic depinde de doi parametri reali : avem deci $2n$ necunoscute. Trebuie sa exprimam faptul ca produsul celor n elemente parabolice este identitatea, ceea ce ne conduce la $2n-3$ parametri reali.**
Cum putem conjuga toate elementele parabolice cu un element din grupul PSL(2,R), care este de dimensiune 3, ne ramin $2n-6$ parametri. Pe de alta parte n puncte pe o sfera depind de $2n$ parametri si grupul proiectiv PGL(2,C) al automorfismelor sferei este de dimensiune 6. O configuratie (proiectiva) de n puncte pe sfera, depinde deci de $2n-6$ parametri. Avem acelasi numar de ecuatii si de necunoscute : un miracol pe care nu-l inteleg

nici astazi. Putem deci spera ca exista destule grupuri fuchsiene pentru a uniformiza complementara a n puncte oarecare de pe sfera. Concluzia notei lui Poincaré este deci :

"Daca reusesc sa arat ca aceste ecuatii admit intotdeauna o solutie, o sa demonstrez in acelasi timp ca toate ecuatiile diferentiale liniare cu coeficienti algebrici se integreaza cu transcendentele fuchsiene."

A vrai dire, il faudra attendre 26 ans avant que Poincaré ne réponde à cette question dans sa généralité !

Quelques jours plus tard, **in ziua de 6 iunie 1881, incepe celebra corespondenta intre Klein si Poincaré.** Klein n'a lu que les trois premières note. Sa première lettre, un peu arrogante, consiste à informer Poincaré que Riemann, Schwarz, et Klein lui-même ont déjà démontré beaucoup de choses analogues. C'est vrai**. Este incredibil, dar adevarat : in iunie 1881, Poincaré nu il citise inca pe Riemann.** Mais d'un autre côté, ce n'était pas vrai. D'une part personne, à commencer par Klein, n'avait vu l'interprétation non euclidienne, mais surtout les groupes fuchsiens construits par Klein ou Schwarz n'étaient que des exemples, typiquement d'origines arithmétiques. Jamais, il me semble, ils n'avaient envisagé que la méthode pouvait décrire toutes les courbes algébriques. A partir de ce moment commence une concurrence entre Klein et Poincaré. Klein, le 2 juillet par exemple, essaye d'expliquer qu'il est facile de retrouver le résultat de la note de Poincaré du 18 mai en utilisant les résultats de Schwarz sur la représentation conforme des domaine à bords circulaires. Poincaré ne peut pas répliquer car il n'a pas lu Schwarz mais je dois vous dire que Klein exagère et que Schwarz n'a jamais démontré de que Klein lui attribue. Quoi qu'il en soit, le reste de la lettre de Klein du début juillet 1881 montre clairement qu'il n'a pas compris que les groupes fuchsiens pourraient bien être assez nombreux pour uniformiser toutes les courbes algébriques. Il n'a probablement pas lu la note de Poincaré du 30 mai : "Si j'arrive, j'aurais montré…"

Ajung acum la nota din 8 august 1881; cea in care Poincaré indrazneste sa enunte in sfirsit teorema de uniformizare. El conchide ca :

"1. toate ecuatiile diferentiale liniare algebrice se integreaza cu ajutorul functiilor zetafuchsiene.

2. coordonatele punctelor unei curbe algebrice oarecare se exprima prin functii fuchsiene care depind de o variabiala auxiliara."

In aceeasi zi, Poincaré adreseaza o scrisoare presedintelui Universitatii din Caen, unde lucra el atunci, continind un raport al activitatii lui matematice in acel an.
Matematicienii de astazi gresesc cind gindesc ca rapoartele de activitate adresate administratiei sunt o inventie recenta ! Concluzia raportului lui Poincaré este impresionanta :

"Am reusit sa demonstrez :

1. ca exista functii invariante pentru actiunea unor grupuri de transformari

liniare .

2. ca aceste grupuri pot fi construite cu ajutorul unor reguli foarte simple.

3. ca aceste functii sunt analoagele functiilor eliptice si ca exista astfel de functii definite prin dezvoltari in serie si care joaca acelasi rol ca transcendentele Θ si Z.

4. ca aceste functii permit rezolvarea tuturor ecuatiilor liniare cu coeficienti algebrici.

5. ca aceste functii permit sa se exprime prin functii uniforme coordonatele unei curbe algebrice oarecare si sa se calculeze integralele abeliene de prima specie.

6. ca constantele care apar in aceste functii si care joaca acelasi rol ca modulele in cazul functiilor eliptice se pot exprima prin functii uniforme in niste parametri, analoage cu functiile modulare."

De fapt, Poincaré triseaza ! et ne démontre pas tout à fait ce qu'il affirme. Mais il est si sûr du théorème qu'il lui faut l'annoncer, même au prix d'une arnaque. Il faut dire qu'en août 1881, Klein va finir par comprendre que les groupes fuchsiens uniformisent peut-être bien toutes les courbes. Il faut faire vite, il faut marquer le terrain, il faut s'approprier le théorème.

Quelle est la tricherie en question ? **Sa citim inceputul notei :**

"Construim la inceput o functie fuchsiana care evita n valori fixate, $\alpha_1, …, \alpha_n$. Daca, in plus, impunem functiei sa ia toate valorile possible, cu exceptia numerelor α_i, numarul de parametri de care dispunem este egal cu numarul conditiilor pe care le impunem. Daca nu impunem aceasta conditie functiei, numarul de parametri este infinit. Din aceasta cauza, este foarte probabil ca problema continua sa aibe o infinitate de solutii. O sa demonstrez ca aceasta proprietate este adevarata in cazul general."

De fapt, Poincaré demonstreaza teorema urmatoare. Fie X o curba algebrica. Atunci exista o multime finita $S \subset X$ astfel incit acoperirea universala a lui $X \setminus S$ este discul unitate. Poincaré se exprima in felul urmator : exista un grup fuchsian astfel incit, suprafata Riemann asociata, adica citul discului prin acest grup, este $X\setminus S$. Bine inteles, "adevarata" teorema de uniformizare afirma ca multimea S poate sa fie aleasa vida (daca genul suprafetei X este cel putin 2). Dar faptul ca orice suprafata devine uniformizabila dupa ce ii scoatem un numar finit de puncte este deja un rezultat important ! In orice caz, aceast rezultat este suficient pentru rezolvarea ecuatiilor diferentiale liniare cu coeficienti algebrici.

Care este demonstratia data de Poincaré ? Sa consideram o curba algebrica X si o functie rationala $f : X \rightarrow P^1$. Aceasta functie este ramificata deasupra unei submultimi finite S_1 a sferei lui Riemann. Daca

S_1 era formata numai de numere reale, teorema ar fi demonstrata. Intradevar, ar ajunge atunci sa ridicam uniformizarea sferei fara acele puncte reale pentru a obtine o uniformizare a suprafetei $X\setminus S_1$. In general S nu este formata numai de numere reale si atunci Poincaré compune f cu un polinom adecvat P si considera $P \circ f$. Punctele critice ale functiei $P \circ f$ sunt $P(S_1) \cup Critique ℗$. Poincaré demonstreaza lema urmatoare. Daca S_1 este o submultime finita a lui C, atunci exista un polinom P astfel incit $P(S_1)$ est continut in R si valorile critice ale lui P sunt reale.

JE VAIS AU TABLEAU, SI J'AI LE TEMPS, ET JE DEMONTRE LE LEMME

Il s'agit d'un exemple assez agréable chez Poincaré. **Demonstratia este detaliata, redactata ca intr-un manual de algebra pentru studentii din primii ani de facultate.** Je recommande d'ailleurs cet exercice. **Un moment de claritate in mijlocul redactarilor incilcite ale lui Poincaré !**

In ziua de 8 august 1881, Poincaré era probabil bucuros zicindu-si ca a rezolvat toate ecuatiile diferentiale. De fapt, el stie ca triseaza, dar, pe de alta parte, este atit de sigur ca rezultatul este adevarat !

Povestea nu s-a sfirsit, dar cel putin conjectura a fost formulata : acoperirea universala a curbelor algebrice de gen cel putin 2 este discul unitate. Klein si Poincaré se vor lupta pe subiectul asta. Ei vor folosi metode apropiate, bazate pe metoda de continuitate inventata de Poincaré. Les notes, les articles, les mémoires se succèderont. **La sfirsitul anului 1882, amindoi vor afirma ca au demonstrat conjectura.** Après avoir essayé de lire tout cela en détail, Henri-Paul de Saint Gervais considère que ni l'un ni l'autre n'ont été proches d'une démonstration, même avec les critères de rigueur de l'époque. **Poincaré si Klein erau convinsi de asta ? Nu imi dau sema. Citiva ani mai tirziu (dar asta este o alta poveste, cea a metodei de balayage si a teoriei potentialului), Poincaré revine la conjectura si, in 1907, in acelasi timp cu Koebe, obtine versiunea generala a teoremei de uniformizare : acoperirea universala a unei suprafete Riemann oarecare este planul, discul sau sfera.**

Il est temps de conclure. **Imi plac aceste doua note.**

Prima nota introduce metoda de continuitate care are un viitor promitator si este foarte utila chiar si astazi. Elle permet de démontrer des théorèmes d'existence par des méthodes topologiques, de type degré topologique, ou plus généralement homologiques. **Este uimitor ca Poincaré a creat toate acestea intr-un fel de izolare stiintifica.** D'une part, il est fort ignorant à l'époque, en particulier des travaux "allemands" et d'autre part, ses contacts naturels, Hermite en particulier, ne lui sont pas très utiles. Hermite, par exemple, lui écrit qu'il ne comprend pas grand-chose à la géométrie non-euclidienne.

A doua nota, cea din 8 august, nu este foarte spectaculara in sine caci se reduce la un exercitiu destul de simplu, dar ea mi se pare de o importanta capitala deoarece in aceasta ocazie, sub presiunea concurentei cu Klein, Poincaré indrazneste sa enunte teorema de uniformizare, pe care Klein n-ar fi

indraznit niciodata sa o formuleze.

Este probabil prima teorema importanta pe care tinarul Poincaré isi o atribuie. El isi termina raportul de activitate din 8 august cu mandrie :

"Am rezolvat toate ecuatiile diferentiale cu coeficienti algebrici !"