

Poincaré 8 august 1881 :
prima formulare a teoremei de uniformizare



Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

Istoria descoperirii grupurilor fuchsienne de catre Poincaré.

Vreau sa ma concentrez astazi pe doua momente foarte precise legate de zilele de 18 mai si 8 august 1881.

- Pe 18 mai 1881, Poincaré inventeaza metoda de continuitate care va deveni o unealta eficace.
- Pe 8 august 1881, Poincaré indrazneste sa enunte, pentru prima data, teorema de uniformizare.

Evocarea a doua rezultate splendide ale lui Poincaré, 4 pagini pierdute in mijlocul unui ocean de 11 volume.

Trebuie sa reamintesc contextul general al descoperirii grupurilor fuchsiane.

Pe 28 mai 1880, cu un an inainte, Poincaré propune un memoriu pentru Marele Premiu de Stiinte Matematice.

Pe 28 iunie, 6 septembrie si 20 decembrie, el trimite trei texte suplimentare.

Trei note, din 14, 21 februarie si 4 aprilie prezinta un rezumat al memoriului propus pentru Marele Premiu.

N° 5 ANNÉE 1880

Grand prix des Sciences mathématiques.

Devoir

Mon illustre premier,

Le mémoire que j'ai l'honneur de remettre au jugement de l'Académie se compose de deux parties bien distinctes, entre lesquelles il n'existe que des rapports très indirects. Je prie mes juges de vouloir bien excuser ce défaut d'unité auquel je n'ai pu trouver de remède, et que je n'aurais pu éviter qu'en sacrifiant complètement l'une des parties de mon travail.

Dans la première partie, mon but principal était l'étude des intégrales irrégulières. Tandis en effet que dans le domaine d'un point singulier on connaît parfaitement les propriétés des intégrales régulières, et qu'on ne sait presque rien des intégrales irrégulières; et qu'on ne sait même pas comment se comporte la fonction intégrale quand la variable tend vers le point singulier et s'en rapproche indéfiniment dans une direction donnée.

Grâce à une méthode particulière à laquelle j'ai eu recours, j'ai pu arriver aux résultats suivants:

1° J'ai intégré complètement l'équation différentielle

- Definitia grupurilor fuchsiane, subgrupuri discrete formate de transformari proiective de variabila complexa z , care lasa invariant discul unitate.
- Descoperirea ca aceste transformari nu sunt altceva decit isometriile geometriei neeuclidiene a lui Lobatchevsky.
- Constructia concreta a unor grupuri fuchsiane, plecind de la poligoane neeuclidiene si identificind laturile pare. Constructie luminoasa, gindita in termeni de geometrie neeuclidiană.

- Constructia explicita, cu ajutorul faimoaselor serii Poincaré, a functiilor fuchsiane : functii meromorfe definite pe discul unitate si invariante fata de actiunea unui grup fuchsian.
- Demonstratia, nu foarte convingatoare, ca oricare doua functii fuchsiane, asociate aceluiasi grup, sunt legate printr-o relatie algebrica.
- Si ajungem in sfirsit , la adevaratul interes al lui Poincaré : cu ajutorul functiilor fuchsiane putem rezolva unele ecuatii diferentiale liniare cu coeficienti algebrici.

Poincaré spera sa inteleaga toate curbele algebrice, si chiar mai mult- toate ecuatiile diferentiale liniare.

Un prieten al lui Poincaré, Lecornu, scrie despre el :

Imi amintesc ca fiind invitat la noi acasa pentru revelionul din 31 décembre 1879, el s-a plimbat toata seara, fara sa auda ce se spunea, raspunzind monosilabic, uitind orice notiune de timp, asa ca la miezul noptii i-am amintit ca am trecut in anul 1880. Numai in acel moment a parut ca isi aminteste unde este si a decis sa plece. Citeva zile mai tirziu, ne-am intilnit pe cheiurile portului din Caen , si mi-a zis : stiu sa integrez toate ecuatiile diferentiale.

Am studiat in particular functiile fuchsiane $f(z)$ astfel incit, daca

$$(1) \quad x = f(z), \quad y_1 = \sqrt{\frac{df}{dz}}, \quad y_2 = z\sqrt{\frac{df}{dz}},$$

atunci y_1 si y_2 satisfac o ecuatie de tip

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y\phi(x),$$

unde ϕ este o functie rationala de variabila x .

Am demonstrat ca :

- 1 Singularitatile ecuatiei (1), adica punctele unde ϕ ia valoarea infinit, sunt numere reale ;

[Marturisesc ca mi-a luat mult timp sa pricep ce intelegea Poincaré prin fraza de mai sus.]

- 2 putem alege $f(z)$ astfel incit punctele in care $\phi(x)$ ia valoarea infinit sa fie cit de multe vrem, si sa ia valorile reale pe care le vrem.

[Fraza de mai sus este importanta : o sa revin asupra ei mai tirziu.]

Cu ajutorul functiilor zetafuchsiene asociate functiilor $f(z)$, putem sa integram *toate ecuatiile liniare cu coeficienti rationali si cu singularitati aflate pe axa reala.*

[Aceasta este o aplicatie directa a punctului 2 importanta pentru Poincaré, interesat de rezolvarea ecuatiilor diferentiale.]

Eliminind cel puțin trei puncte situate pe axa reală a sferei lui Riemann, acoperirea universală este discul lui Poincaré.

Metoda lui Poincaré consta în utilizarea grupurilor fuchsiane generate de reflecțiile față de laturile unui poligon. O astfel de reflecție fiind anti-holomorfa, curbele algebrice construite cu acest procedeu posedă o simetrie anti-holomorfa : ele sunt deci curbe algebrice reale. Pentru a construi curbe algebrice care nu sunt reale, trebuie considerate grupuri fuchsiane mai complicate.

Cautam acum un grup fuchsian care sa uniformizeze complementara a n puncte oarecare in sfera lui Riemann. La fiecare din cele n puncte corespunde un element parabolic in grupul $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$. Un element parabolic depinde de doi parametri reali : avem deci $2n$ necunoscute. Trebuie sa exprimam faptul ca produsul celor n elemente parabolice este identitatea, ceea ce ne conduce la $2n - 3$ parametri reali.

Cum putem conjuga toate elementele parabolice cu un element din grupul $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$, care este de dimensiune 3, ne ramain $2n - 6$ parametri. Pe de alta parte n puncte pe o sfera depind de $2n$ parametri si grupul proiectiv $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ al automorfismelor sferei este de dimensiune 6. O configuratie (proiectiva) de n puncte pe sfera, depinde deci de $2n - 6$ parametri.

Avem acelasi numar de ecuatii si de necunoscute : un miracol pe care nu-l inteleg nici astazi. Putem deci spera ca exista destule grupuri fuchsiane pentru a uniformiza complementara a n puncte oarecare de pe sfera. Concluzia notei lui Poincaré este deci :

Daca reusesc sa arat ca aceste ecuatii admit intotdeauna o solutie, o sa demonstrez in acelasi timp ca toate ecuatiile diferentiale liniare cu coeficienti algebrici se integreaza cu transcendentele fuchsiane.

In ziua de 6 iunie 1881, incepe celebra corespondenta intre Klein si Poincaré.

Este incredibil, dar adevarat : in iunie 1881, Poincaré nu il citise inca pe Riemann.



Ajung acum la nota din 8 august 1881 ; cea in care Poincaré indrazneste sa enunte in sfirsit teorema de uniformizare.

El conchide ca :

- 1 Toate ecuatiile diferentiale liniare algebrice se integreaza cu ajutorul functiilor zetafuchsiene.
- 2 Coordonatele punctelor unei curbe algebrice oarecare se exprima prin functii fuchsiene care depind de o variabila auxiliara."

In aceeași zi, Poincaré adresează o scrisoare presedintelui Universității din Caen, unde lucra el atunci, conținând un raport al activității lui matematice în acel an. Matematicienii de astăzi gresesc când gîndesc că rapoartele de activitate adresate administrației sunt o invenție recentă ! Concluzia raportului lui Poincaré este impresionantă :

Am reușit să demonstrez :

- 1. că există funcții invariante pentru acțiunea unor grupuri de transformări liniare .*
 - 2. că aceste grupuri pot fi construite cu ajutorul unor reguli foarte simple.*
- [...]*

[...]

3. ca aceste functii sunt analoagele functiilor eliptice si ca exista astfel de functii definite prin dezvoltari in serie si care joaca acelasi rol ca transcendentele Θ si Z .

4. ca aceste functii permit rezolvarea tuturor ecuatiilor liniare cu coeficienti algebrici.

5. ca aceste functii permit sa se exprime prin functii uniforme coordonatele unei curbe algebrice oarecare si sa se calculeze integralele abeliene de prima specie.

6. ca constantele care apar in aceste functii si care joaca acelasi rol ca modulele in cazul functiilor eliptice se pot exprima prin functii uniforme in niste parametri, analoage cu functiile modulare.

De fapt, Poincaré triseaza !

Sa citim inceputul notei :

Construim la inceput o functie fuchsiana care evita n valori fixate, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Daca, in plus, impunem functiei sa ia toate valorile possible, cu exceptia numerelor α_i , numarul de parametri de care dispunem este egal cu numarul conditiilor pe care le impunem. Daca nu impunem aceasta conditie functiei, numarul de parametri este infinit. Din aceasta cauza, este foarte probabil ca problema continua sa aibe o infinitate de solutii. O sa demonstrez ca aceasta proprietate este adevarata in cazul general.

De fapt, Poincaré demonstrează teorema următoare. Fie X o curbă algebrică. Atunci există o mulțime finită $S \subset X$ astfel încât acoperirea universală a lui $X \setminus S$ este discul unitate. Poincaré se exprimă în felul următor : există un grup fuchsian astfel încât, suprafața Riemann asociată, adică citul discului prin acest grup, este $X \setminus S$. Bine înțeles, "adeverata" teorema de uniformizare afirmă că mulțimea S poate să fie aleasă vidă (dacă genul suprafeței X este cel puțin 2). Dar faptul că orice suprafață devine uniformizabilă după ce îi scoatem un număr finit de puncte este deja un rezultat important ! În orice caz, acest rezultat este suficient pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți algebrici.

Care este demonstratia data de Poincaré? Sa consideram o curba algebrica X si o functie rationala $f : X \rightarrow P^1$. Aceasta functie este ramificata deasupra unei submultimi finite S_1 a sferei lui Riemann. Daca S_1 era formata numai de numere reale, teorema ar fi demonstrata. Intradevar, ar ajunge atunci sa ridicam uniformizarea sferei fara acele puncte reale pentru a obtine o uniformizare a suprafetei $X \setminus S_1$. In general S nu este formata numai de numere reale si atunci Poincaré compune f cu un polinom adecvat P si considera $P \circ f$. Punctele critice ale functiei $P \circ f$ sunt $P(S_1) \cup Critique(P)$. Poincaré demonstreaza lema urmatoare. Daca S_1 este o submultime finita a lui C , atunci exista un polinom P astfel incit $P(S_1)$ est continut in R si valorile critice ale lui P sunt reale.

Demonstratia este detaliata, redactata ca intr-un manual de algebra pentru studentii din primii ani de facultate.

Un moment de claritate in mijlocul redactarilor incilcite ale lui Poincaré !

În ziua de 8 august 1881, Poincaré era probabil bucuros zicându-și că a rezolvat toate ecuațiile diferențiale. De fapt, el știe că trisează, dar, pe de altă parte, este atât de sigur că rezultatul este adevărat !

Povestea nu s-a sfârșit, dar cel puțin conjectura a fost formulată : acoperirea universală a curbilor algebrice de gen cel puțin 2 este discul unitate. Klein și Poincaré se vor lupta pe subiectul asta. Ei vor folosi metode apropiate, bazate pe metoda de continuitate inventată de Poincaré.

La sfirsitul anului 1882, amindoi vor afirma ca au demonstrat conjectura.

Poincaré si Klein erau convinsi de asta ? Nu imi dau sema. Citiva ani mai tirziu (dar asta este o alta poveste, cea a metodei de balayage si a teoriei potentialului), Poincaré revine la conjectura si, in 1907, in acelasi timp cu Koebe, obtine versiunea generala a teoremei de uniformizare : acoperirea universală a unei suprafete Riemann oarecare este planul, discul sau sfera.

Imi plac aceste doua note.

Prima nota introduce metoda de continuitate care are un viitor promitator si este foarte utila chiar si astazi. Este uimitor ca Poincaré a creat toate acestea intr-un fel de izolare stiintifica.

A doua nota, cea din 8 august, nu este foarte spectaculara in sine caci se reduce la un exercitiu destul de simplu, dar ea mi se pare de o importanta capitala deoarece in aceasta ocazie, sub presiunea concurentei cu Klein, Poincaré indrazneste sa enunte teorema de uniformizare, pe care Klein n-ar fi indraznit niciodata sa o formuleze.

Este probabil prima teorema importanta pe care tinarul Poincaré isi o atribuie. El isi termina raportul de activitate din 8 august cu mandrie :

Am rezolvat toate ecuatiile differentiale cu coeficienti algebrici !

72

- 1^o que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsienues.
- 2^o que les Coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsienues d'une variable auxiliaire.