Les « éléments de géométrie de Clairaut » (1741) : une manière moderne d'enseigner la géométrie ?

Entre 1734 et 1736, Alexis Clairaut rédige une petite merveille : les « éléments de géométrie », qui seront publiés en 1741. Il n'a que 21 ans en 1734 : c'est alors un savant qui prépare son expédition dans le grand Nord. Quelle peut-être sa motivation pour écrire, dans une période scientifiquement intense pour lui, un livre *élémentaire*, destiné à des débutants ? Peut-être s'inspirait-il de son père, qui avait enseigné les mathématiques ? Peut-être s'agit-il de la rédaction des cours de géométrie qu'il a donnés à la marquise du Châtelet ? Quoi qu'il en soit, ce fut un succès ; le livre fut réédité un grand nombre de fois. En deux exemples, en latin et en allemand.

Cet exposé ne sera ni historique, ni mathématique, ni pédagogique. Je voudrais simplement transmettre mon admiration pour ce livre et pour son auteur, et essayer d'en tirer quelques conclusions qui pourraient avoir de l'intérêt aujourd'hui.

Bien évidemment, le système scolaire de l'ancien Régime était bien différent de ce que nous connaissons aujourd'hui. Le nombre total d'enfants scolarisés en France était probablement inférieur à 100000. Une bonne partie d'entre eux étaient dans des collèges — uniquement de garçons bien sûr — tenus par des jésuites ou des oratoriens. On y apprenait essentiellement le latin et le grec et on n'abordait les mathématiques que la dernière année, dite de « philosophie ».

La géométrie s'apprenait à travers les « Éléments d'Euclide », écrits 2000 ans plus tôt.

En voici une copie en grec, du 9 ème siècle,

Une en arabe, du 13 ème

---

une en latin, du 15 ème,

---

et en français, du 17 ème.

Il est difficile de s'imaginer aujourd'hui le rôle que jouait alors cet ouvrage dans l'enseignement. On dit qu'après la Bible, ce serait le livre qui aurait été imprimé dans le plus grand nombre d'exemplaires. On dit aussi que l'enfant

Clairaut avait appris à lire dans les Éléments d'Euclide, qui pouvaient donc servir également d'abécédaire.

Hélas, Euclide n'est pas facile à lire. D'ailleurs son but n'est en aucun cas pédagogique. Il se propose de présenter l'ensemble des connaissances mathématiques de son époque de manière logique et implacablement déductive. Il commence donc par des définitions et des axiomes abstraits et déroule ensuite une liste de théorèmes et de démonstrations. Chaque théorème se déduit des précédents par la logique pure. Les objets dont il s'agit, les triangles, quadrilatères ou les cercles, ne sont que des abstractions, des « idées » chères aux philosophes grecs. Il n'y a aucune tentative de les relier à des objets qu'on peut rencontrer autour de soi, dans la vie de tous les jours. Les « Éléments d'Euclide » — même si un lecteur moderne ne manque pas d'y voir des défauts — constituent pour le mathématicien *professionnel* une première tentative d'atteindre l'idéal de perfection pour une théorie mathématique formalisée.

Mais Clairaut s'insurge ! Il trouve que l'ouvrage d'Euclide est sec ! Cela dit, il a bien raison.

> « Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, (écrit-il dans sa préface) il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les éléments ordinaires (sous-entendu, les éléments d'Euclide). On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes préliminaires, qui ne semblent promettre rien que de sec au Lecteur. »

Clairaut se propose donc d'écrire un livre destiné à des débutants, des « commençants », comme il dit, qui souhaitent *apprendre* la géométrie, tout simplement. C'est l'un des tout premiers livres *pédagogiques* de géométrie. Clairaut est prêt à faire quelques entorses avec l'ordre logique froid, mais surtout il centre son livre sur l'aspect *expérimental* de la géométrie. Les rectangles ne sont plus des idées mais des terrains agricoles dont il s'agit par exemple d'évaluer numériquement la superficie.

Clairaut suit une méthode historique :

> « La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y a de plus propre à faire naître les premières propositions de géométrie ; et c'est

> en effet l'origine de cette science, puisque Géométrie signifie mesure de Terrain. Quelques auteurs prétendent que les égyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines ».

Voilà donc le grand débat, qui fait encore rage aujourd'hui. Faut-il enseigner une mathématique implacablement logique et dépourvue de tout aspect expérimental, mais remarquablement efficace dans la formation intellectuelle des enfants ? Ou, au contraire, faut-il transformer les livres de mathématiques en des sortes de manuels pratiques de l'arpenteur, pleins de formules toutes faites, de recettes prêtes à l'emploi ?

Le compromis choisi par Clairaut me semble remarquablement bien dosé. D'un côté, il souhaite laisser une place au *bon sens*.

> « Qu'Euclide se donne la peine de démontrer que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, (...), on n'en sera pas surpris. Ce géomètre avait à convaincre des Sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes ; il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les Lecteurs ».

Faire usage du bon sens plutôt que des froids syllogismes ? N'est-ce pas un crime de lèse mathématiques ? Clairaut est très attaché aux démonstrations dans son livre, mais il a conscience qu'on ne présente pas les choses de la même manière aux débutants et aux mathématiciens aguerris.

D'un autre côté, Clairaut se garde bien d'écrire un manuel d'arpentage.

> « Comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les commençants, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces éléments avec les traités ordinaires d'arpentage ? (...) la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce livre, mais (...) seulement l'occasion pour faire découvrir les principales vérités mathématiques ».

Clairaut consacre par exemple un joli chapitre à la détermination de la surface d'une sphère de rayon R. Les preuves sont intuitives, peut-être pas tout à fait complètes, mais jamais il n'aurait osé faire ce que le programme actuel des classes de troisième impose aujourd'hui à nos enfants : leur demander d'apprendre *par cœur* la formule $4\pi R^2$ comme une recette toute faite, sans la moindre explication. Dans ces conditions, il me semblerait préférable de ne pas enseigner du tout cette formule ; il est bien rare qu'un citoyen ordinaire ait besoin de calculer la surface d'une sphère et, s'il lui arrive d'en avoir besoin, il trouvera la formule sur *Wikipedia*. Apprendre des maths, c'est tout autre chose qu'apprendre des formules.

Il est grand temps de vous montrer quelques extraits de ce livre. Je vous en propose trois qui concernent la définition de la droite, le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès, ces grands classiques du collège.

Comment définir ce qu'est une *droite* ?

Faut-il prendre la définition officielle qui fut infligée à tous les élèves de 4ème de France et de Navarre en 1972, par la circulaire $n°$ 71 370 du ministère de l'Education nationale.

> « On appelle droite un ensemble D d'éléments dits points, muni d'une bijection g de D sur $\mathbf{R}$, et de toutes celles f qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire, on a : soit $f(M) = g(M) + a$, soit $f(M) = -g(M) + a$. La famille des bijections f s'appelle une structure euclidienne. Si M, M' sont deux points de D, le nombre positif $d(MM') = |f(M') - f(M)|$ ne dépend pas du choix de f et par suite ne dépend que de la structure euclidienne de D : $d(M, M')$ est la distance des deux points M et M'. »

Cette définition, parfaitement ridicule au collège (mais, je vous l'assure, très intéressante mathématiquement) a beaucoup fait rire et probablement beaucoup pleurer également. François Mitterrand a même écrit un petit article moqueur sur le sujet.

Faut-il définir les droites comme le propose Hilbert en 1899, dans ses « Fondements de la Géométrie » dans lequel il cherche à mettre Euclide à l'abri des attaques logiques. Hilbert propose tout simplement de *ne pas définir* les mots « droites », « points » etc. et de se contenter de jouer logiquement avec des phrases comme « par deux points distincts passe une seule droite ».

Jouer avec des mots et des symboles... La syntaxe plutôt que la sémantique.

Vous ne serez pas surpris par le choix de Clairaut, le géodésien, l'arpenteur... Le plus court chemin entre deux points :

> « La ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, et par conséquent la mesure de la distance entre deux points. »

Voyez un exemple d'une figure typique qu'on trouve dans le livre de Clairaut. Regardez, en dessous de la figure, Clairaut a placé un petit mètre étalon, je devrais dire une toise étalon, qui joue le rôle de l'échelle sur une carte de géographie. Il a même dessiné un petit carré pour indiquer l'unité de superficie. Ce serait inconcevable chez Euclide : ses figures sont bien sûr sans dimensions, elles n'ont aucune existence réelle.

Chez Clairaut, certaines figures sont même traversées par des rivières ; il y a des arbres, des petites maisons etc. Bien sûr, il est géodésien, sa vision de la Géométrie est liée aux mesures sur le Terrain. Sa géométrie n'a rien de sec...

La présentation par Clairaut du *théorème de Thalès* nous réserve une petite surprise. Je précise en passant que ce théorème ne porte ce nom qu'en France... Clairaut commence avec un triangle ABC et il considère un point b sur le côté AB de sorte que Ab soit la moitié de AB.

Il mène alors la parallèle bc à BC et il montre alors que Ac est la moitié de AC. La démonstration est parfaitement correcte. Il lui est alors facile de généraliser : si Ab est par exemple 3/5 de AB, alors Ac est également 3/5 de AC. En général, si les longueurs AB et Ab ont une « commune mesure », c'est-à-dire contiennent toutes les deux un nombre entier de fois une certaine unité, de toises, de millimètres, ou de microns, l'argument montre que $AB/Ab = AC/Ac$, c'est-à-dire le fameux théorème de Thalès.

La suite de la « preuve » de Clairaut est rédigée de manière délibérément ambiguë ; on laisse entendre qu'il est en effet toujours possible de trouver une unité commune à deux longueurs quelconques, ce qui n'est pas correct, mais ce n'est pas dit explicitement. Un lecteur pressé accepte facilement comme « du bon sens » que deux longueurs quelconques s'expriment comme un nombre entier d'une certaine unité suffisamment petite. C'est du bon sens, ce n'est pas vrai, Clairaut le sait bien, mais il n'en informe pas le lecteur... à ce stade du livre !

Je passe au *théorème de Pythagore*, qui est un bien joli passage dans le livre. Clairaut commence par poser le problème suivant :

« Faire un carré double d'un autre. »

La solution est toute simple.

On part du carré en rouge ici, et on fabrique un rectangle formé de deux copies du carré.

On découpe chacun des deux carrés en deux triangles et, comme dans un puzzle, on en déplace deux pour transformer le rectangle en un carré.

Il est bien clair que l'aire du grand carré rouge est double de celle du petit carré initial.

Après avoir résolu ce petit problème, Clairaut en pose un autre.

« Faire un carré égal à deux autres pris ensemble. »

On dispose donc de deux carrés côte à côte par exemple, et il s'agit de construire un troisième carré dont l'aire est la somme des deux. C'est donc une généralisation du cas précédent dans lequel les deux carrés étaient de mêmes dimensions.

Voici le puzzle que construit Clairaut. Vous voyez, à gauche, les deux carrés, bleu et rouge, plus les deux triangles rectangles verts. Ils couvrent la même zone que le carré jaune plus les deux triangles verts. L'aire du carré jaune est donc la somme des aires des deux carrés. CQFD.

Le carré jaune est construit sur l'hypoténuse du triangle rectangle vert et les carrés, rouge et bleu, dont on est parti sont construits sur les autres côtés.

Le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des autres côtés. Nous avons démontré le théorème de Pythagore ! Il se trouve que cette preuve avait été découverte bien des siècles plus tôt en Chine, mais Clairaut ne pouvait pas le savoir et puis, cela n'a guère d'importance.

C'est après avoir démontré le théorème de Pythagore que Clairaut nous explique qu'il n'y a aucune commune mesure entre le côté d'un carré et sa diagonale. La racine carrée de 2 est irrationnelle :

> « Donc, qu'on divise le côté d'un carré en tel nombre de parties qu'on voudra, la diagonale de ce carré ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties : ce qu'on exprimerait dans le langage des Géomètres, en disant, que le côté du carré et sa diagonale sont incommensurables. »

Dommage que Clairaut ne le démontre pas de manière géométrique. Voici ce que j'aurais aimé que Clairaut écrive... Supposez qu'il y ait une commune mesure entre a et b, entre le côté d'un carré et sa diagonale. J'ai indiqué cette commune mesure potentielle comme un petit segment noir.

Repliez le triangle rouge le long de la ligne pointillée, la bissectrice de l'angle en haut à droite, pour que le côté vienne sur la diagonale, comme ceci.

Vous voyez apparaître en bas un petit triangle rouge, isocèle et rectangle. Ses côtés mesurent $b - a$

---

et $a - (b - a) = 2a - b$.

Les longueurs des côtés du petit triangle rouge sont donc encore des entiers, dans la même unité de mesure. Mais il est plus petit et on peut recommencer l'opération. On obtiendra ainsi une suite de triangles isocèles rectangles dont les longueurs des côtés décroissent sans cette et dont les longueurs sont toujours des nombres entiers de toises ! C'est une contraction ! Le côté d'un carré et sa diagonale sont incommensurables.

Plus de cinquante pages après son « presque mensonge » sur le théorème de Thalès — lorsqu'il avait implicitement laissé entendre que tous les nombres sont rationnels — Clairaut revient enfin sur la question :

> « Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables. (...) On en vu qu'en comparant ces figures, nous avons toujours supposé qu'elles avaient une échelle

> qui pouvait également servir à mesurer toutes les parties : supposition qui maintenant permettrait devoir être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit. Il faut donc que nous revenions sur nos pas et que nous examinions si nos propositions, pour être vraies, n'auraient pas elles-mêmes besoin de quelques modifications. »

Revenir sur ses pas dans un livre de mathématiques ! Euclide n'en reviendrait pas. Bourbaki ne pourrait pas le concevoir. Mais ni Euclide, ni Bourbaki n'ont des buts pédagogiques. Clairaut revient donc sur ses pas, prend acte du fait que certains nombres ne sont pas rationnels, et reprend la preuve du théorème de Thalès.

Sa preuve utilise alors un argument de continuité, assez convaincant. En termes modernes, il explique que tout nombre peut être arbitrairement approché par un nombre rationnel. Il conclut :

> « Donc nous avons rigoureusement démontré que lorsque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, soit que leurs côtés aient une commune mesure, soit qu'ils n'en aient pas. »

Certes, un mathématicien aurait beaucoup à dire sur le « rigoureusement » qui n'est pas vraiment rigoureux. Il me semble cependant que pour un débutant, le choix pédagogique fait par Clairaut est très pertinent. Le débutant comprend pourquoi le théorème est vrai, mais surtout le petit tour que Clairaut lui a joué, en lui faisant croire dans un premier temps à une preuve qui n'était pas correcte, a certainement aiguisé son esprit critique. Le débutant comprend qu'il lui faut sans cesse se remettre en question.

Observons le théorème de Thalès tel qu'il est enseigné *aujourd'hui* dans les collèges de notre pays. Voici quelques pages d'un très bon manuel de quatrième.

On traite d'abord, comme Clairaut, du théorème du milieu : « la droite joignant les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté ». D'abord, l'élève est invité à tester expérimentalement le théorème, grâce à un logiciel de géométrie dynamique,

---

puis on le démontre très convenablement.

Puis, on passe au cas du rapport 1/3, fort convenablement également.

Puis, on passe au cas général. L'élève est invité à tester le théorème avec son double décimètre,

---

puis à le « vérifier » avec le logiciel. Et puis... c'est tout ! On laisse l'élève au milieu du chemin.

L'énoncé du théorème de Thalès arrive entouré dans son rectangle rouge qui le rend prestigieux et surtout incontestable ! Le théorème est vrai puisque le professeur le dit, puisque c'est écrit dans mon livre, et puisque je l'ai vérifié avec mon double décimètre ! La suite du manuel ne remettra jamais en question cette vérité que l'élève doit accepter comme un credo. Pauvre élève ! Comment peut-il comprendre qu'on lui demande parfois de chicaner, qu'on l'ennuie en lui demandant des justifications complètes, par exemple pour le théorème du milieu, alors qu'il lui suffirait de mesurer les dimensions sur son cahier, et que, dans d'autres occasions, pour le théorème de Thalès général par exemple, il a le droit de se contenter de mesurer sur son cahier ? N'a-t-on pas oublié qu'il s'agit de mathématiques et pas d'arpentage ?

Il est temps de conclure. L'enseignement de la Géométrie oscille entre deux extrêmes.

D'un côté, il peut s'agir de présenter une démarche intellectuelle abstraite, logique, dont l'adéquation au monde réel n'a finalement aucune importance. L'élève peut tirer d'innombrables profits de cette approche, allant bien au delà des mathématiques, au delà même de la science. Une formation de l'esprit utile, et peut-être même nécessaire, à tous les citoyens. L'écueil est de tomber dans les excès des maths modernes, dans les années 70, qui ont dérouté tant de nos concitoyens.

D'un autre côté, on peut présenter une science utile dans la vie de tous les jours, aux problèmes d'arpentage par exemple, mais pas seulement. Il est bon de connaître la géométrie pour construire des ponts ou pour construire des avions. Je pense que l'architecte de la tour gherkin de Londres, de 180 mètres de haut, connaît un peu de géométrie !

L'écueil est alors de confondre la géométrie avec un manuel d'arpentage, plein de recettes et de formules toutes faites. Hélas, c'est dans cet excès que nous sommes tombés aujourd'hui.

Il me semble que la proposition de Clairaut est un excellent compromis qui pourrait être pris comme exemple. L'aspect expérimental de la géométrie est omniprésent. Mais l'arpentage n'est présent que comme une motivation. Jamais il n'oublie l'essence des mathématiques : son caractère logique et déductif.

Un autre aspect du livre de Clairaut est que son contenu est raisonnable : il contient beaucoup moins de mathématiques que les éléments d'Euclide par exemple. Là encore, nous pourrions peut-être nous en inspirer aujourd'hui. Il y a tant de choses, à l'extérieur de la géométrie, que nos élèves doivent apprendre, qui n'existaient pas à l'époque de Clairaut. Il est bien normal que la géométrie laisse un peu de place aux autres... Laisser de la place aux autres parties des mathématiques, bien sûr, comme la théorie des probabilités par exemple. Mais également laisser de la place à d'autres disciplines qui ont émergé, comme la biologie ou l'informatique ! Ce qui est important, ce n'est pas la quantité de géométrie qu'on enseigne, c'est la manière dont on l'enseigne.

Il va de soi qu'il ne serait pas une bonne idée de conserver intégralement le contenu du livre de Clairaut dans les manuels de géométrie modernes. Depuis Clairaut, la géométrie s'est métamorphosée et il ne s'agit plus d'étudier seulement des triangles ou des cercles dans le plan. Le concept de symétrie par exemple a envahi les mathématiques et les groupes jouent maintenant un rôle central. De même, la brave géométrie d'Euclide a dû cohabiter avec d'autres géométries bien différentes.

Aujourd'hui, nous vivons dans plusieurs géométries qui se superposent : celle du cyber-espace ou celle de la SNCF par exemple. L'arpentage des terrains n'a plus la même importance scientifique. Il me semble d'ailleurs que la jeunesse de 2013 est peu motivée par l'arpentage ! Je me demande si Clairaut parlerait d'arpentage s'il écrivait son livre aujourd'hui ? Il aurait peut-être discuté de la géométrie des grands réseaux de neurones ou de Facebook, pour motiver la géométrie discrète ?

Un dernier mot admiratif sur Clairaut. Je l'ai dit, il n'était pas un professionnel de l'enseignement mais un chercheur actif. Il lui a pourtant semblé important qu'un chercheur écrive un manuel de géométrie pour débutants. Dans son livre il n'a pas hésité à inclure des considérations qui concernent sa propre recherche, la géodésie, certes à un niveau très élémentaire.

> « J'espère que cette méthode aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir. »

La Recherche scientifique en contact avec l'enseignement élémentaire. L'esprit de la *Main à la Pâte* en quelque sorte.

Quel exemple, quel défi pour nous !