Les « éléments de géométrie » de Clairaut (1741) : une manière moderne d'enseigner la géométrie ?

ELEMENS
DE
GEOMETRIE.

Alexis Claude
Par M. Clairaut, *de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.*

A PARIS ;
Chez Lambert & Durand, Libraires, ruë Saint-Jacques, au Grifon.

M DCC XLI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

Étienne Ghys, CNRS et École Normale Supérieure de Lyon

ELEMENTA GEOMETRIÆ

Alexis Claude

A D. CLAIRAUT

REGIÆ SCIENTIARUM PARISIENSIS ACCADEMIÆ, ET REGIÆ SOCIETATIS LONDINENSIS SOCIO

Gallico sermone edita, Latine reddita.

VENETIIS,

MDCCXLIX.

APUD JOANNEM BAPTISTAM RECURTI.

SUPERIORUM PERMISSU, AC PRIVILEGIO.

Des

Herrn Clairaut,

der Königl. Französischen und Königl. Preußischen Akademien der Wissenschaften, der Königl. Gesellschaften zu London, Upsal und Edimburg, und der Akademie des Instituts zu Bologna Mitgliedes,

Anfangsgründe der Geometrie.

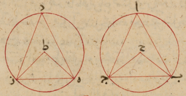
Aus dem Französischen übersetzt von

F. J. Bierling.

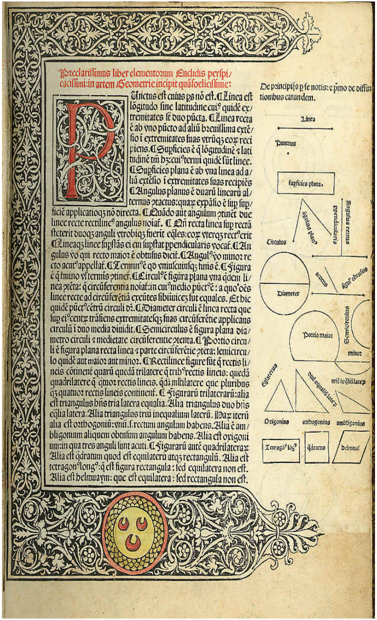
Neue Auflage.

Hamburg, bey Christian Herolds Wittwe.
1773.

او على المحيط مثال ذلك انا نخط دايرتين متساويتين على احدهما اب ج وعلى
الاخرى د ه ز ومركزاهما ح ط ونقيم على المركزين زاويتين متساويتين
وهما زاويتا ب ح ج و ه ط ز فاقول ان قوس ب ج مثل قوس ه ز ونعلم على قوس ب ا ج ونصل بج هز
وعلى قوس ه د ز نقطتين وهما ا د ونصل ا ب و ا ج و ه د و د ز والدايرتان
متساويتان فالخطوط التى تخرج من مركزيهما الى الخطين المحيطين بهما
هي متساوية فيجب مثل ط ه و ح ج مثل ط ز فكل خطي ب ح ح ج مثل كل خطي
ه ط ط ز كل واحد مثل نظيره وزاوية ب ح ج مثل زاوية ه ط ز فقاعدة
ب ج مثل قاعدة ه ز والزاوية التي على المركز مثلا الزاوية التي على القوس اذا كانت
قاعدتهما واحدة فزاوية ب ح ج مثلا زاوية ب ا ج ولذلك يكون التي من ه ط ز مثلي
ه د ز ولكن زاوية ب ح ج مثل زاوية ه ط ز وزاوية ب ا ج مثل زاوية ه د ز والقطعة
التي عليها ب ا ج مثل القطعة التي عليها ه د ز فقوس ب ا ج مثل قوس ه د ز اذا
والزاويتان متساويتان
و ب ج مثل ه ز فقد استبان
ان الزوايا المتساوية التي
في دواير متساوية تكون
على قسي متساوية ولئن
كانت الزوايا على المراكز



او كانت على القسي وذلك ما اردنا ان نبين :: كو :: القسي المتساوية
في الدواير المتساوية يفصلها زوايا متساوية اذا كانت على المراكز او على المحيط
مثال ذلك انا نخط دايرتين متساويتين وهما دايرتا اب ج د ه ز ونقيم على قوسي
ب ج ه ز المتساويتين زاويتين ونخطهما اولا على المركزين وهما زاويتا ب ط ج
ه ح ز فاقول انهما متساويتان لا يمكن الا ذلك فان امكن فليكن زاوية ب ط ج
اصغر من زاوية ه ح ز ونقيم على نقطة ح من خط ه ح زاوية مثل الزاوية
التي من ب ط ج وهي زاوية ه ح ك والزوايا المتساوية التي في الدواير المتساوية
هي على قسي متساوية ان كانت على المراكز وان كانت على القسي فقوس ب ج اذا



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspi/
cacissimi: in artem Geometrie incipit quã foelicissime:

Punctus est cuius ps nõ est. ¶ Linea est lõgitudo sine latitudine cui⁹ quidẽ ex/ tremitates sũt duo pũcta. ¶ Linea recta ẽ ab vno pũcto ad aliũ brevissima extẽ/ sio i extremitates suas vtrũqz eoꝝ reci piens. ¶ Supficies ẽ q̃ lõgitudinẽ ꝛ lati tudinẽ tm̃ hz: cui⁹ termi quidẽ sũt linee. ¶ Supficies plana ẽ ab vna linea ad a/ liã extẽsio i extremitates suas recipiẽs ¶ Angulus planus ẽ duarũ linearũ al/ ternus ꝯtactus: quaꝝ expãsio ẽ sup sup/ ficiẽ applicatioqz nõ directa. ¶ Quãdo aũt angulum ꝯtinẽt due linee recte rectiline⁹ angulus noiaẗ. ¶ Qñ recta linea sup rectã steterit duoqz anguli vtrobiqz fuerit eq̃les: eoꝝ vterqz rect⁹ erit ¶ Lineaqz linee supstãs ei cui supstat ppendicularis vocaẗ. ¶ Angulus vo qui recto maior ẽ obtusus dicit. ¶ Angul⁹ vo minor recto acut⁹ appellaẗ. ¶ Termin⁹ ẽ qd vniuscuiusqz finis ẽ. ¶ Figura ẽ q̃ tmino vl terminis ꝯtineẗ. ¶ Circul⁹ ẽ figura plana vna qdem linea ꝯtẽta: q̃ circũferentia noiaẗ: in cui⁹ medio pũct⁹ ẽ: a quo oẽs linee recte ad circũferẽtiã exeũtes sibiĩuicez sũt equales. Et hic quidẽ pũct⁹ cẽtrũ circuli dr̃. ¶ Diameter circuli ẽ linea recta que sup ei⁹ centꝝ trãsiens extremitatesqz suas circũferẽtie applicans circulũ i duo media diuidit. ¶ Semicirculus ẽ figura plana diametro circuli ꝛ medietate circũferentie ꝯtenta. ¶ Portio circuli ẽ figura plana recta linea ꝛ parte circũferẽtie ꝯtẽta: semicirculo quidẽ aut maior aut minor. ¶ Rectilinee figure sũt q̃ rectis lineis cõtinenẗ quarũ quedã trilatere q̃ trib⁹ rectis lineis: quedã quadrilatere q̃ q̃tuor rectis lineis. q̃dã mltilatere que pluribus q̃ quatuor rectis lineis continenẗ. ¶ Figurarũ trilaterarũ: alia est triangulus hñs tria latera equalia. Alia triangulus duo hñs eq̃lia latera. Alia triangulus triũ inequalium laterũ. Haꝝ iterũ alia est orthogoniũ: vnũ .s. rectum angulum habens. Alia ẽ ambligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigonium: in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarũ autẽ quadrilateraꝝ Alia est q̃dratum quod est equilaterũ atqz rectangulũ. Alia est tetragon⁹ long⁹: q̃ est figura rectangula: sed equilatera non est. Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

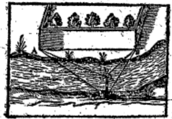
De principijs p se notis: ꝛ pmo de diffinitionibus earundem.

LES QVINZE LIVRES

DES ELEMENTS GEOMETRIQVES D'EVCLIDE:

Traduicts en François par D. HENRION Professeur és Mathematiques, imprimez, reueus & corrigez du viuant de l'Autheur: auec des Commentaires beaucoup plus amples & faciles, & des figures en plus grand nombre qu'en toutes les impreßions precedentes.

Plus le Liure des DONNEZ du mesme Euclide aussi traduict en François par ledit Henrion, & imprimé de son viuant.



A PARIS,
De l'Imprimerie d'Isaac Dedin.
Et se vendent en l'Isle du Palais, à l'Image S. Michel, par la veufue dudit Henrion.

M. DC. XXXII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

PREFACE.

QUOIQUE la Géométrie ſoit par elle-même abſtraite, il faut avoüer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer; viennent le plus ſouvent de la maniére dont elle eſt enſeignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toûjours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, & de principes préliminaires, qui ſemblent ne promettre rien que de ſec

La meſure des Terrains m'a paru ce qu'il y avoit de plus propre à faire naître les premieres propoſitions de Géométrie ; & c'eſt, en effet, l'origine de cette Science, puiſque Géométrie ſignifie *meſure de Terrain*. Quelques Auteurs prétendent que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Héritages détruites par les débordemens du Nil, jettérent les premiers fondemens de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'aſſurer exactement de la ſituation de l'étenduë & de la figure de leurs domaines.

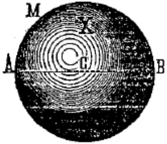
Qu'Euclide ſe donne la peine de démontrer, que deux cercles qui ſe coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, a la ſomme de ſes côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il eſt renfermé ; on n'en ſera pas ſurpris. Ce Géométre avoit à convaincre des Sophiſtes obſtinés, qui ſe faiſoient gloire de ſe refuſer aux vérités les plus évidentes : il falloit donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le ſecours des raiſonnemens en forme, pour fermer la bouche à la chicanne. Mais les choſes ont changé de face. Tout raiſonnement qui tombe ſur ce que le bon ſens ſeul décide d'avance, eſt aujourd'hui en pure perte, & n'eſt propre qu'à obſcurcir la vérité, & à dégoûter les Lecteurs.

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les Commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Elémens avec les Traités ordinaires d'Arpentage ? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considéreront pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques.

La surface d'une sphère est formée par la révolution d'un demi-cercle autour de son diamètre. On peut comparer la surface d'une sphère à celle qui est produite par un polygone régulier d'un nombre infini de côtés tournant autour de son diamètre.

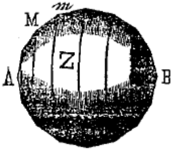
Soit X (*fig.* 136) la sphère dont on veut mesurer la superficie; il est évident que l'on peut concevoir ce solide comme produit par la révolution d'un demi-cercle AMB autour de son diamètre AB.

Fig. 136.



Supposons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence nous ayons un polygone régulier d'un nombre infini de petits côtés, ou, si l'on veut, d'un très-grand nombre de côtés, et proposons-nous seulement de mesurer la surface Z (*fig.* 137), produite par la révolution de ce polygone. Il sera facile de passer ensuite de la mesure de cette surface à la mesure de la surface de la sphère, ainsi que nous avons passé de la mesure des figures rectilignes à celle du cercle.

Fig. 137.



Circulaire n° 71 370 du ministère de l'Education nationale (1972, classes de quatrième ☺ ☹).

« On appelle droite un ensemble D d'éléments dits points, muni d'une bijection g de D sur **R***, et de toutes celles f qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire, on a : soit $f(M) = g(M) + a$, soit $f(M) = -g(M) + a$. La famille des bijections f s'appelle une structure euclidienne. Si M, M' sont deux points de D, le nombre positif $d(MM') = |f(M') - f(M)|$ ne dépend pas du choix de f et par suite ne dépend que de la structure euclidienne de D : $d(M, M')$ est la distance des deux points M et M'. »*

« La ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, et par conséquent la mesure de la distance entre deux points. »

Fig. 34.

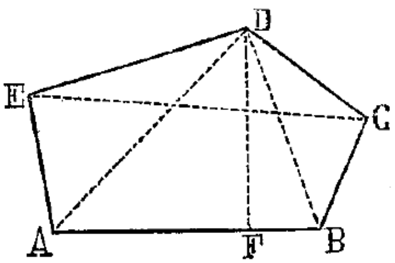


Fig. 35.

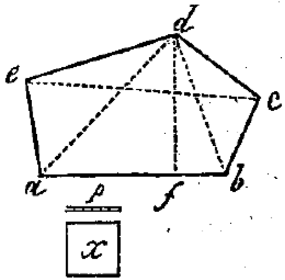


Fig. 91.

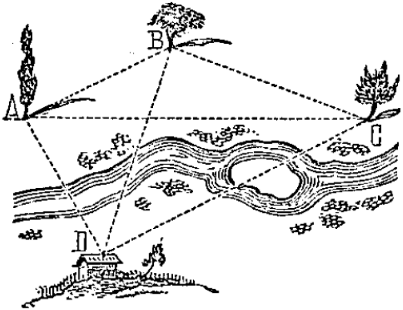
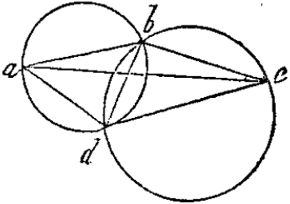
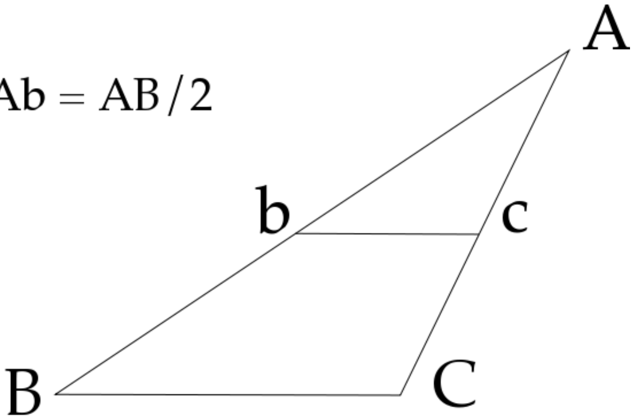


Fig. 92.

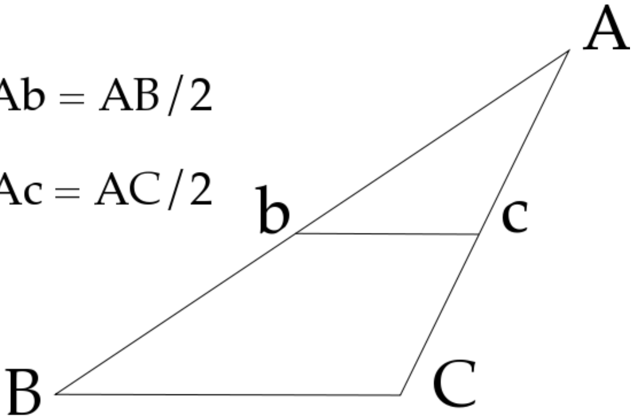


$$Ab = AB/2$$

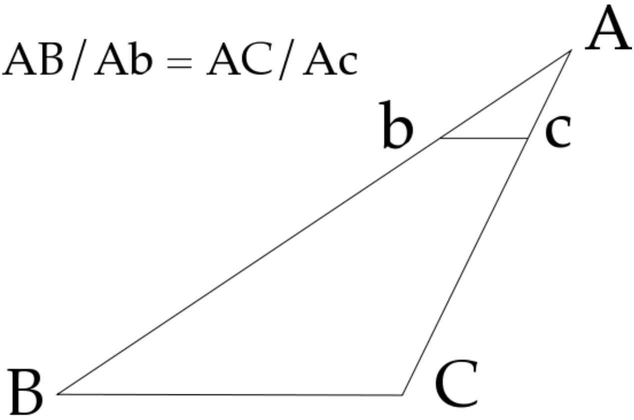


$$Ab = AB/2$$

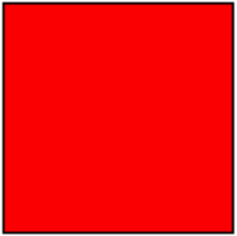
$$Ac = AC/2$$



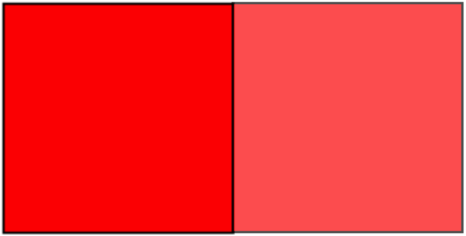
$$AB / Ab = AC / Ac$$



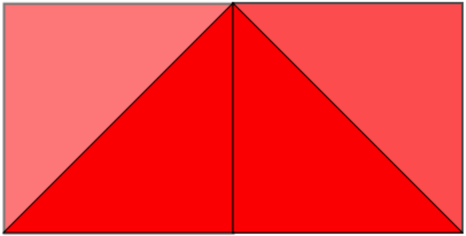
« Faire un carré double d'un autre. »



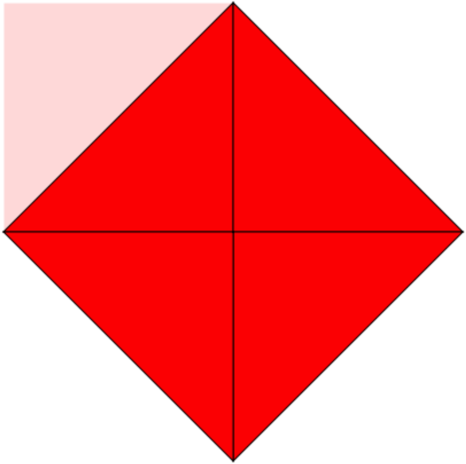
« Faire un carré double d'un autre. »

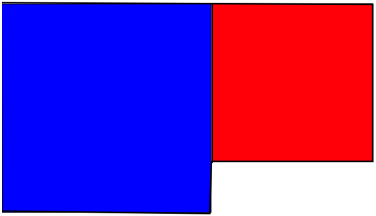


« Faire un carré double d'un autre. »

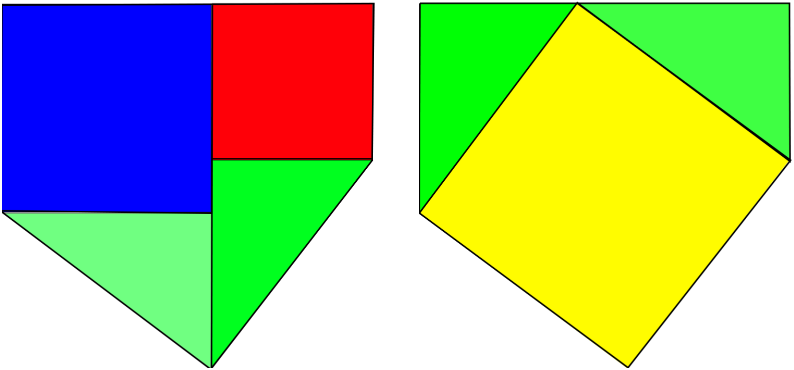


« Faire un carré double d'un autre. »

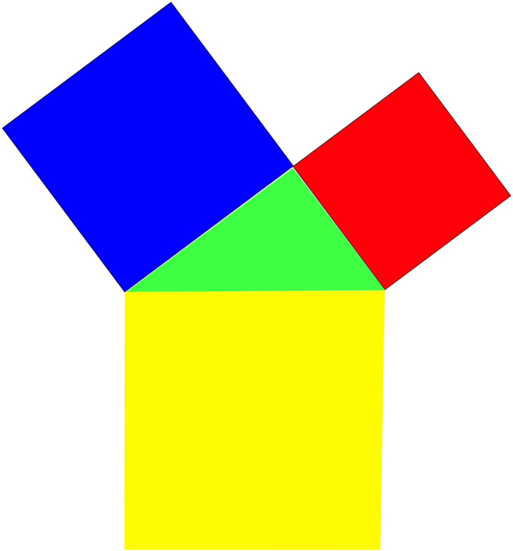




« Faire un carré égal à deux autres pris ensemble »

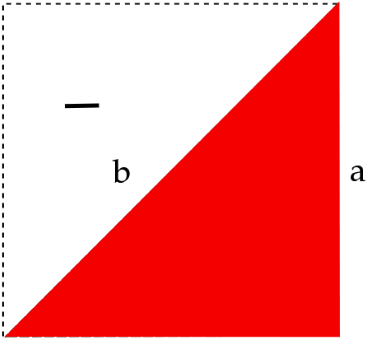


« Faire un carré égal à deux autres pris ensemble »

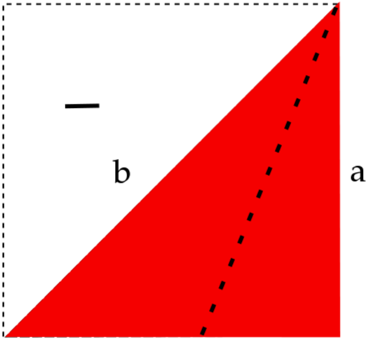


Théorème de Pythagore

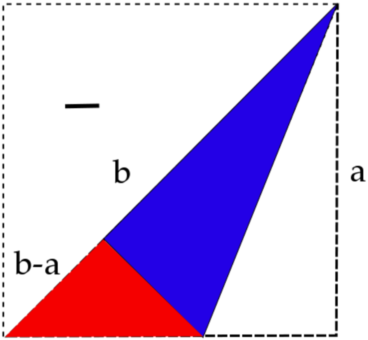
« Donc, qu'on divise le côté d'un carré en tel nombre de parties qu'on voudra, la diagonale de ce carré ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties : ce qu'on exprimerait dans le langage des Géomètres, en disant, que le côté du carré et sa diagonale sont incommensurables. »



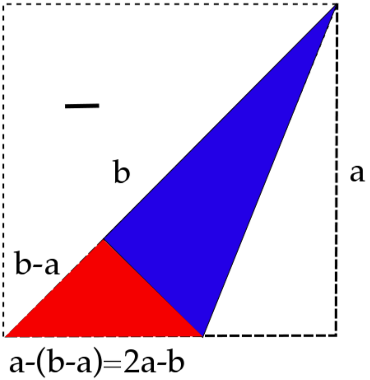
« Donc, qu'on divise le côté d'un carré en tel nombre de parties qu'on voudra, la diagonale de ce carré ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties : ce qu'on exprimerait dans le langage des Géomètres, en disant, que le côté du carré et sa diagonale sont incommensurables. »



« Donc, qu'on divise le côté d'un carré en tel nombre de parties qu'on voudra, la diagonale de ce carré ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties : ce qu'on exprimerait dans le langage des Géomètres, en disant, que le côté du carré et sa diagonale sont incommensurables. »



« Donc, qu'on divise le côté d'un carré en tel nombre de parties qu'on voudra, la diagonale de ce carré ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties : ce qu'on exprimerait dans le langage des Géomètres, en disant, que le côté du carré et sa diagonale sont incommensurables. »



« Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables. (. . .) On en vu qu'en comparant ces figures, nous avons toujours supposé qu'elles avaient une échelle qui pouvait également servir à mesurer toutes les parties : supposition qui maintenant permettrait devoir être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit. Il faut donc que nous revenions sur nos pas et que nous examinions si nos propositions, pour être vraies, n'auraient pas elles-mêmes besoin de quelques modifications. »

« Donc nous avons rigoureusement démontré que lorsque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, soit que leurs côtés aient une commune mesure, soit qu'ils n'en aient pas. »

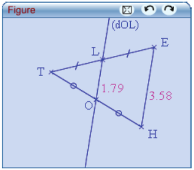
Triangles et parallèles

G2

Activités de découverte

Activité 1 : Un triangle et deux milieux

1. Conjecture avec TracenPoche



a. Construis un triangle THE.

En utilisant le bouton , place le point O milieu de [TH] et le point L milieu de [TE].
Trace la droite (OL).

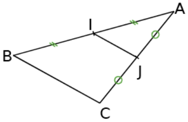
À l'aide du bouton , fais apparaître les longueurs des segments [OL] et [HE].

b. Déplace les sommets du triangle et note, sur ton cahier, les longueurs OL et HE pour quatre triangles différents. Que remarques-tu ?

c. Déplace les sommets du triangle. Comment semblent être les droites (OL) et (HE) ?
Dans la fenêtre *Analyse*, saisis : « position(OL,HE) = » puis appuie sur la touche F9.
Déplace à nouveau les sommets du triangle. Qu'indique Tracenpoche ?

2. Démonstration

a. Trace un triangle ABC, place I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].
On souhaite montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles et que la longueur du segment [IJ] est égale à la moitié de celle du segment [BC].



b. Construis le point K symétrique de I par rapport à J. Montre que le quadrilatère AKCI est un parallélogramme. Que peux-tu en déduire pour les droites (KC) et (AI) ? Pour les segments [KC] et [AI] ?

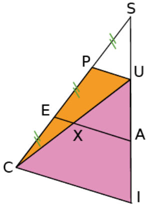
c. Que peux-tu dire des segments [AI] et [IB] ? En utilisant le fait que les points A, I et B sont alignés et la question **b.**, que peux-tu dire des segments [IB] et [KC] ? Montre que le quadrilatère IKCB est un parallélogramme.

d. Déduis-en que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles. Montre que $IJ = \frac{1}{2}BC$.

e. Écris les deux propriétés que tu viens de démontrer.

Activité 4 : Et avec le tiers ?

1. Reproduis la figure ci-contre, avec SC = 9 cm ; SI = 6,3 cm et telle que les droites (PU), (EA) et (CI) sont parallèles.



2. Mesure les segments [SU], [UA] et [AI]. Que remarques-tu ?

3. **Démonstration**

a. En te plaçant dans le triangle SEA, montre que le point U est le milieu du segment [SA].

b. On appelle X le point d'intersection des segments [EA] et [CU]. En te plaçant dans le triangle PUC, montre que X est le milieu du segment [CU].

c. En te plaçant dans le triangle UCI, montre que le point A est le milieu du segment [UI].

d. Que peux-tu alors affirmer pour les longueurs SU, UA et AI ?

Activités de découverte

Activité 5 : Un cas plus général

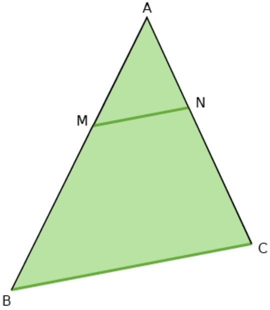
1. Sur la figure ci-contre, le point M appartient au segment [AB], N appartient au segment [AC] et les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

a. En mesurant les longueurs des segments [AM] et [AB], donne la valeur du rapport $\frac{AM}{AB}$.

b. Mesure les segments [AN] et [AC] puis donne la valeur du rapport $\frac{AN}{AC}$.

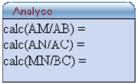
c. Mesure les segments [MN] et [BC] puis donne la valeur de $\frac{MN}{BC}$.

d. Que constates-tu ? Pouvais-tu prévoir ce résultat ?



2. Que dit Tracenpoche ?

a. Construis un triangle ABC. À l'aide du bouton , place un point M sur le segment [AB]. Construis la droite parallèle au côté [BC] passant par M. Appelle N le point d'intersection de cette parallèle et du côté [AC].



b. Dans la fenêtre *Analyse*, saisis les expressions ci-contre puis appuie sur la touche F9. Quels calculs sont effectués ? Que permettent-ils de conjecturer ?

c. Déplace les points de la figure de manière à faire varier le rapport $\frac{AM}{AB}$. Que constates-tu pour les autres rapports ?

Cours et méthodes essentielles

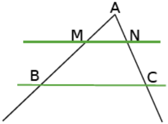
II - Proportionnalité des longueurs dans le triangle

A - Énoncé

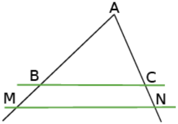
Théorème

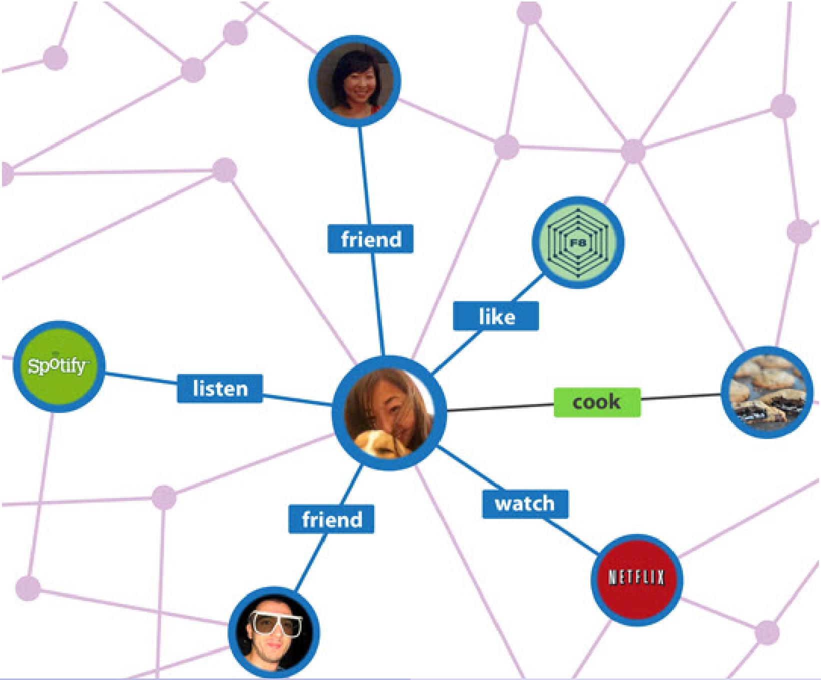
Si, dans un triangle ABC, M est un point de la demi-droite [AB), N un point de la demi-droite [AC) et les droites **(MN) et (BC) sont parallèles**

alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.



ou




friend
like
Spotify
listen
cook
friend
watch
NETFLIX

« J'espère que cette méthode aura encore
une utilité plus importante,
c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir. »

Alexis Clairaut