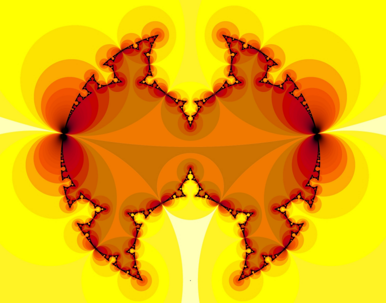
« Les maths ne sont qu'une histoire de groupes »

H. Poincaré (1881)



Étienne Ghys

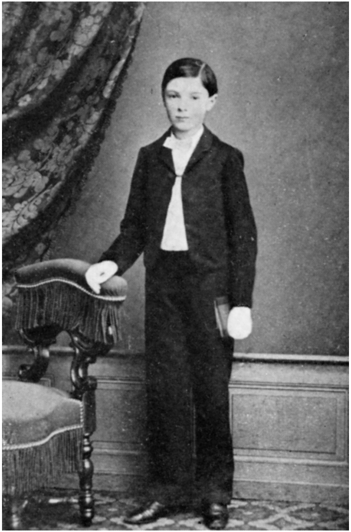
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

Henri Poincaré (1854-1912)

(Chargé de cours à Caen 1881)

Henri Poincaré (1854-1912)



Communiant

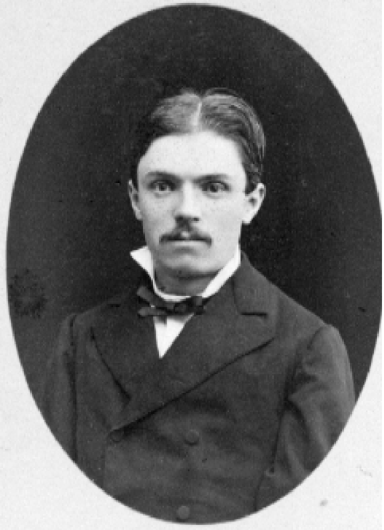
Henri Poincaré (1854-1912)

(Élève en Mathématiques Spéciales à Nancy 1872)

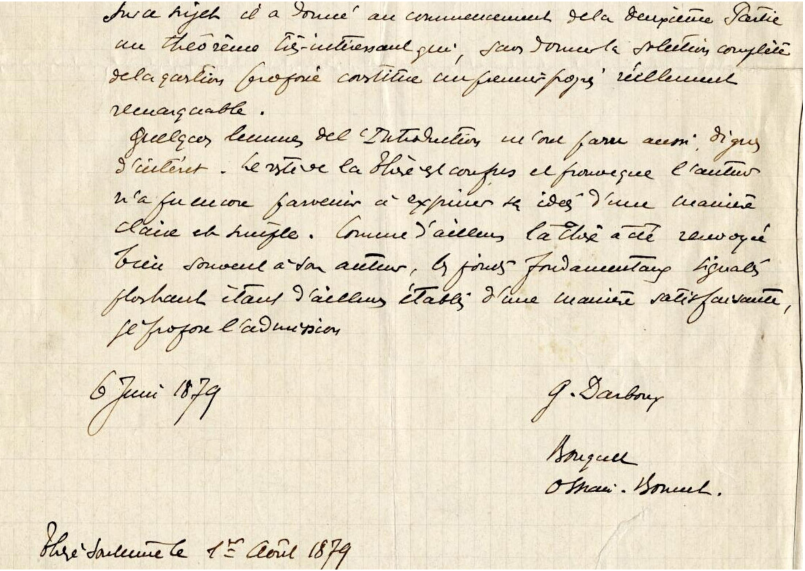
Henri Poincaré (1854-1912)

(Polytechnicien 1873)

Henri Poincaré (1854-1912)



(Ingénieur des mines 1979)



sur ce sujet et a donné au commencement de la deuxième Partie un théorème très-intéressant qui, sans donner la solution complète de la question proposée constitue un premier pas réellement remarquable.

Quelques lemmes de l'Introduction m'ont paru aussi dignes d'intérêt. Le reste de la thèse est confus et prouve que l'auteur n'a pu encore parvenir à exprimer ses idées d'une manière claire et simple. Comme d'ailleurs la thèse a été renvoyée bien souvent à son auteur, les points fondamentaux signalés plus haut étant d'ailleurs établis d'une manière satisfaisante, je propose l'admission

6 Juin 1879

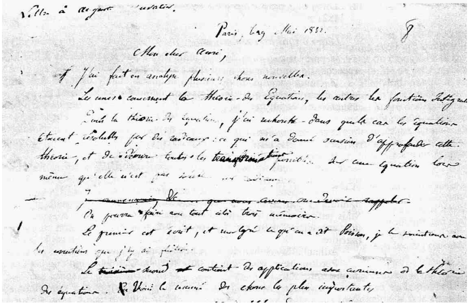
G. Darboux

Bouquet

Ossian. Bonnet.

Thèse soutenue le 1er août 1879

Évariste Galois (1811-1832)


Paris, le 29 Mai 1832.

Mon cher Ami,

J'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles.

Les unes concernent la Théorie des Équations, les autres les fonctions Intégrales.

Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux : ce qui m'a donné occasion d'approfondir cette théorie, et de décrire toutes les transformations possibles sur une équation lors même qu'elle n'est pas soluble par radicaux.

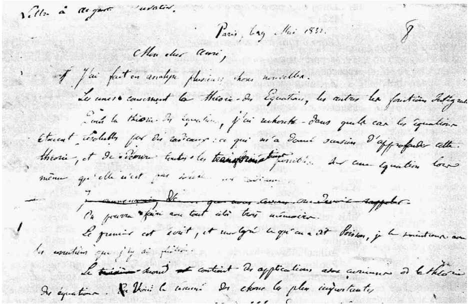
On pourra faire avec tout cela trois mémoires.

Le premier est écrit, et malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens avec les corrections que j'y ai faites.

Le second contient des applications assez curieuses de la théorie des équations. Voici le résumé des choses les plus importantes

« Mes principales méditations depuis quelques temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. »

Le testament de Galois : 29 mai 1832


Paris, le 29 Mai 1832.

Mon cher ami,

J'ai fait en analyse plusieurs choses nouvelles.

Les unes concernent la théorie des Équations, les autres les fonctions Intégrales.

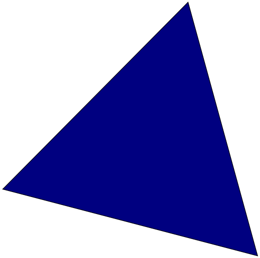
Dans la théorie des équations, j'ai recherché dans quels cas les équations étaient résolubles par des radicaux : ce qui m'a donné occasion d'approfondir cette théorie, et de décrire toutes les transformations possibles sur une équation lors même qu'elle n'est pas soluble par radicaux.

On pourra faire avec tout cela trois mémoires.

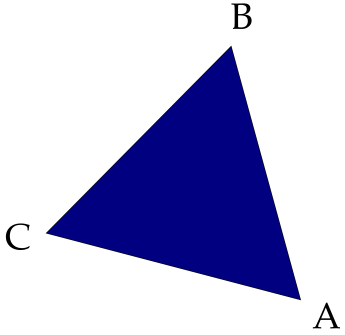
Le premier est écrit, et malgré ce qu'en a dit Poisson, je le maintiens avec les corrections que j'y ai faites.

Le second contient des applications assez curieuses de la théorie des équations. Voici le résumé des choses les plus importantes

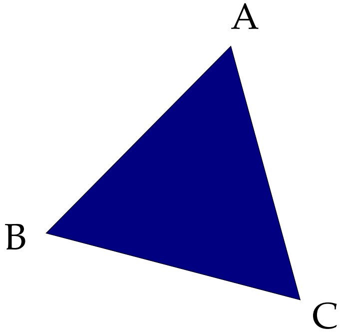
« Mes principales méditations depuis quelques temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. »



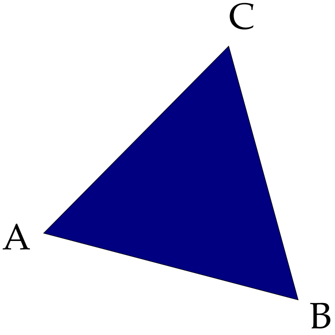
Ambiguïté du triangle équilatéral



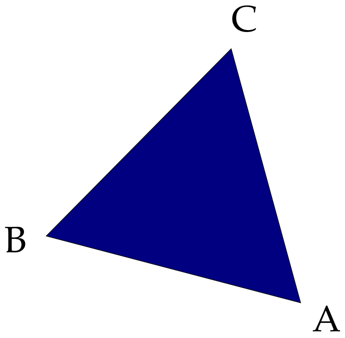
Ambiguïté du triangle équilatéral



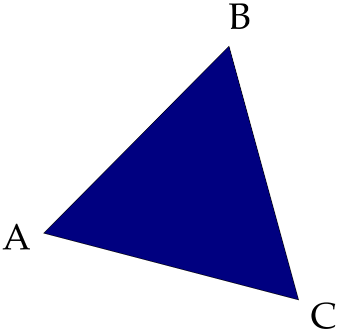
Ambiguïté du triangle équilatéral



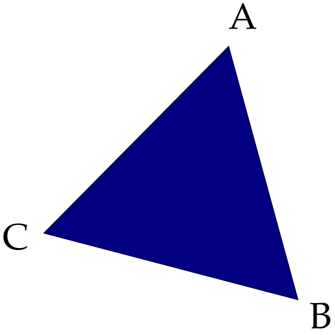
Ambiguïté du triangle équilatéral



Ambiguïté du triangle équilatéral



Ambiguïté du triangle équilatéral

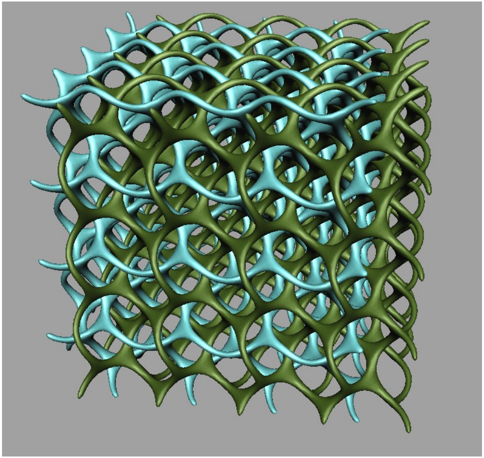


Le groupe du triangle équilatéral

Le groupe des six permutations des trois sommets.

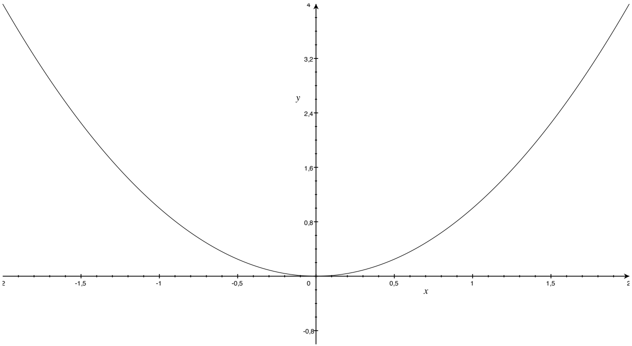
$$
\begin{array}{rcl}
(A, B, C) & \mapsto & (A, B, C) \\
 & \mapsto & (B, C, A) \\
 & \mapsto & (C, A, B) \\
 & \mapsto & (A, C, B) \\
 & \mapsto & (C, B, A) \\
 & \mapsto & (B, A, C)
\end{array}
$$

Ambiguïté



www.georgehart.com

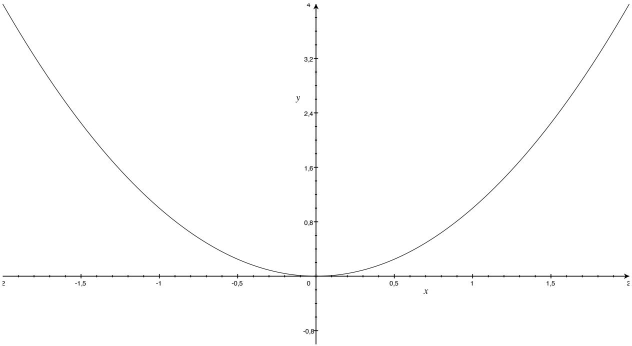
Symétrie d'une fonction



x et $-x$ ont le même carré.

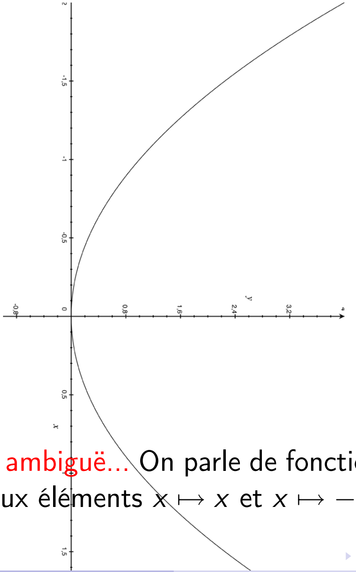
Le « groupe » a deux éléments $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

Symétrie d'une fonction



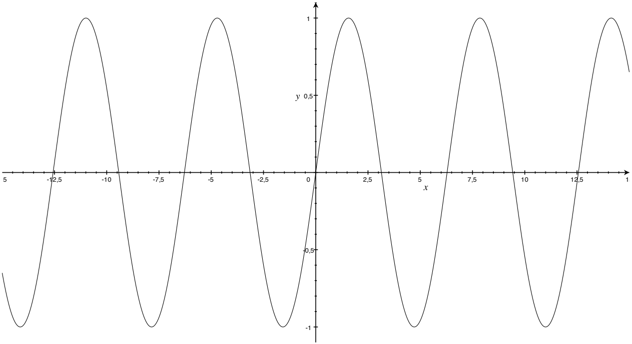
x et $-x$ ont le même carré.
Le « groupe » a deux éléments $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

Ambiguïté d'une fonction



La racine carrée est ambiguë... On parle de fonction « multiforme ».
Le « groupe » a deux éléments $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

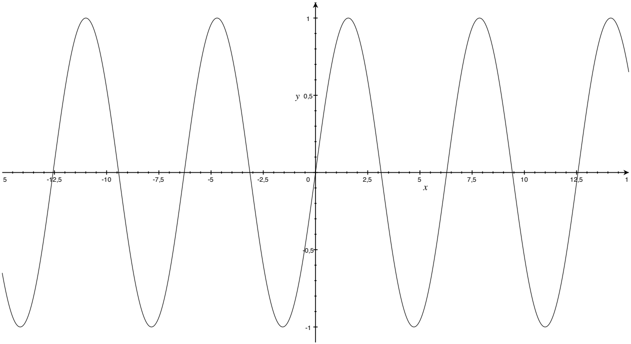
Symétrie d'une fonction



$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Le « groupe » est constitué des translations d'amplitudes $2k\pi$.

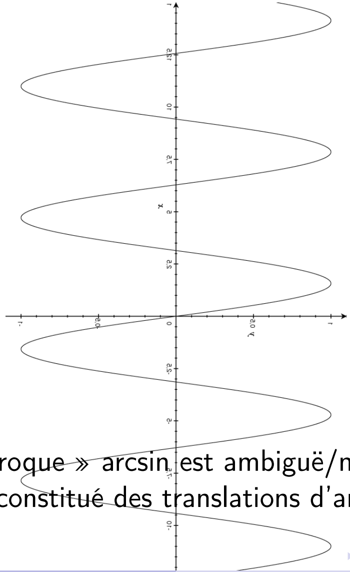
Symétrie d'une fonction



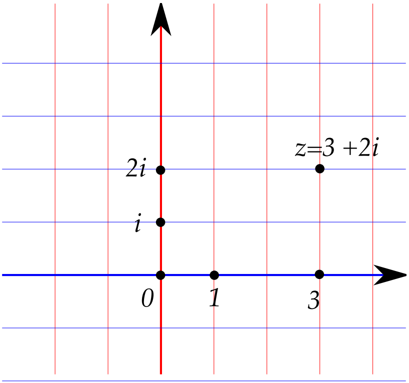
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

Le « groupe » est constitué des translations d'amplitudes $2k\pi$.

Ambiguïté d'une fonction

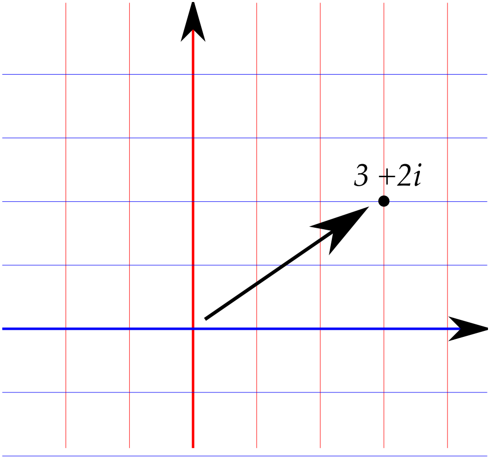


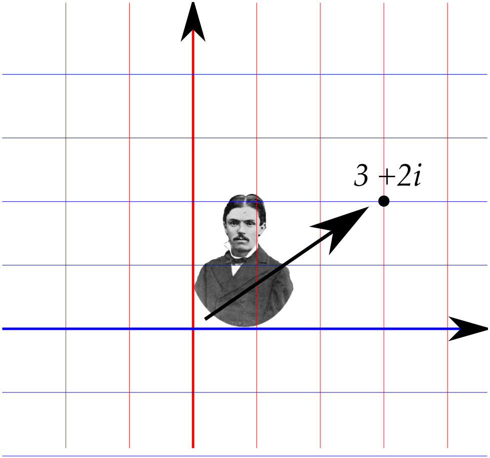
La « fonction réciproque » arcsin est ambiguë/multiforme.
Le « groupe » est constitué des translations d'amplitudes $2k\pi$.



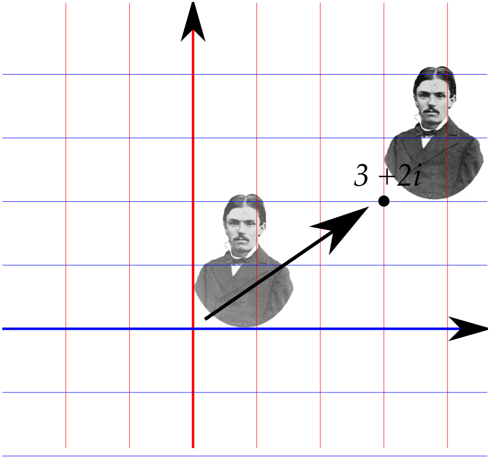
$$i^2 = -1$$

Nombres complexes : ajouter

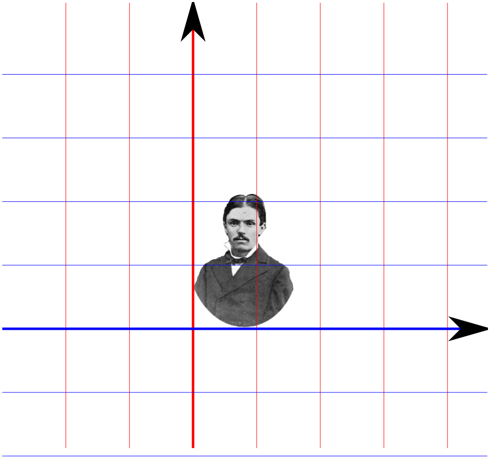


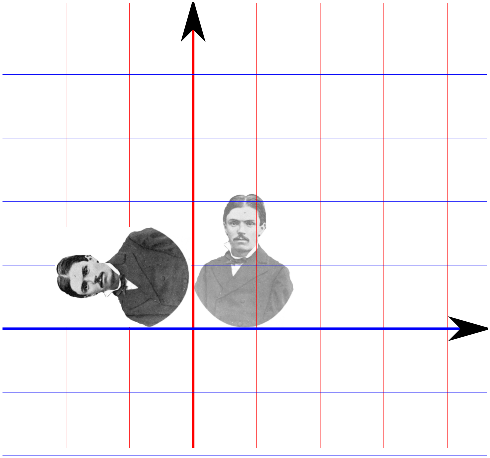

$3+2i$

Nombres complexes : ajouter

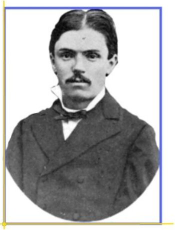


Nombres complexes : multiplier par i

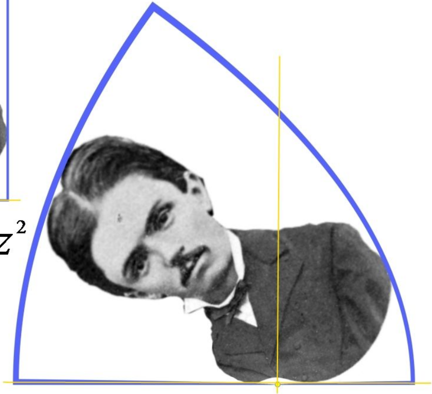




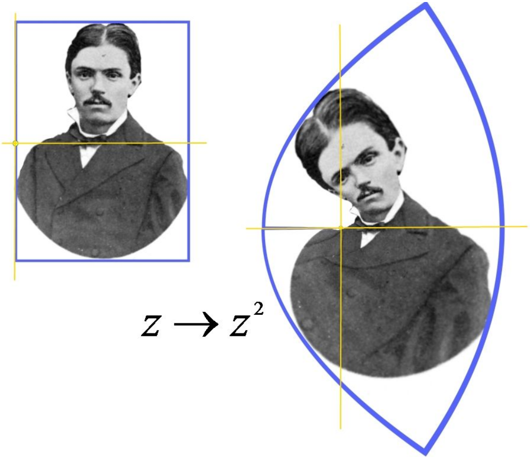
Le carré de Poincaré : −)



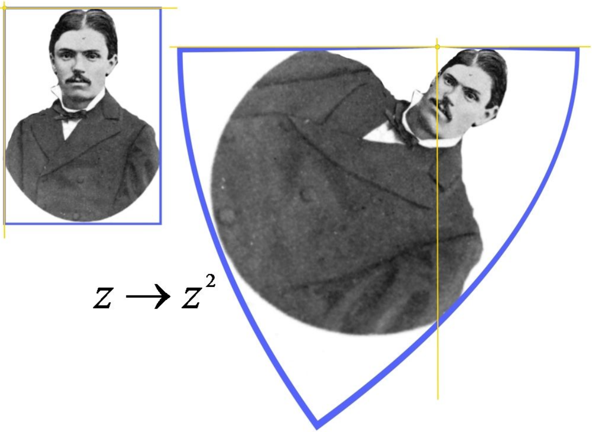
$z \to z^2$



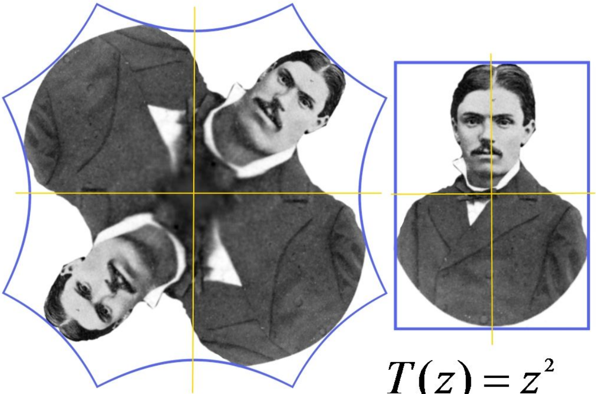
Le carré de Poincaré



Le carré de Poincaré

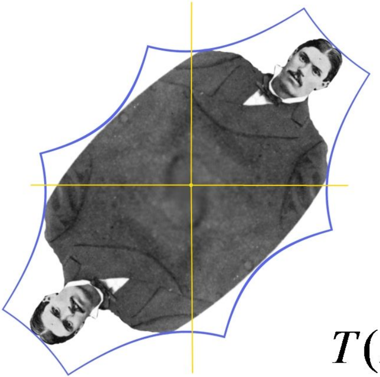


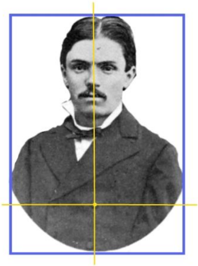
Les racines carrées de Poincaré



$$T(z) = z^2$$

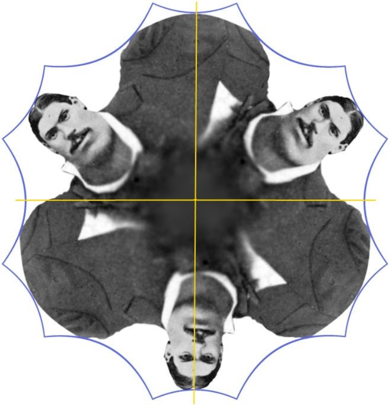
Les racines carrées de Poincaré

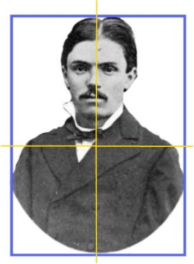




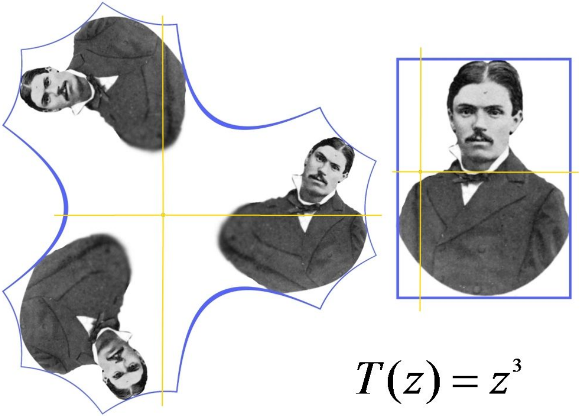
$$T(z) = z^2$$

$$T(z) = z^2$$



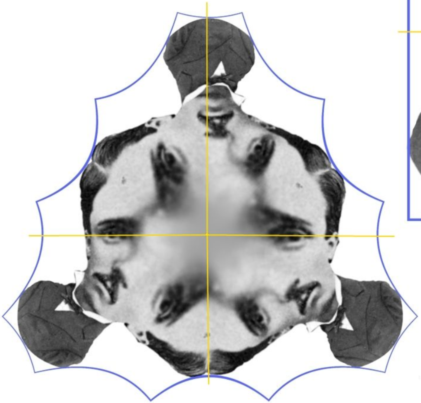


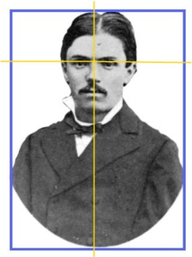
$$T(z) = z^3$$



$$T(z) = z^3$$

Les racines cubiques de Poincaré





$$T(z) = z^3$$

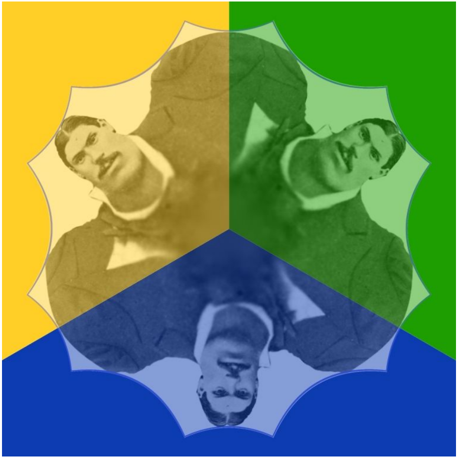
Nombres complexes : les racines carrées

Nombres complexes : les racines carrées

Nombres complexes : les racines carrées

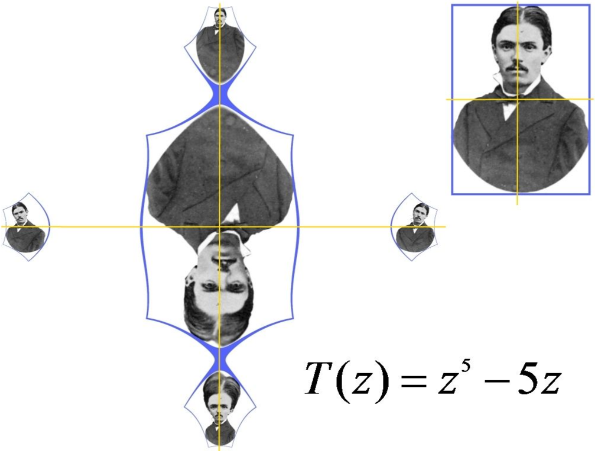
Nombres complexes : les racines cubiques

Nombres complexes : les racines cubiques



Racine cubique

La fonction $z^5 - 5z$



$$T(z) = z^5 - 5z$$

Nombres complexes : le groupe de Galois

- La multiformité de la fonction $\sqrt[3]{z}$ correspond à l'invariance de la fonction z^3 par un groupe de trois rotations.
- La multiformité de la réciproque de $z^5 - 5z$ ne correspond pas à une invariance de $z^5 - 5z$ par cinq transformations.

On dit que le premier cas est galoisien alors que le second ne l'est pas.

Groupes

- La multiformité de la fonction $\sqrt[3]{z}$ correspond à l'invariance de la fonction z^3 par un groupe de trois rotations.
- La multiformité de la réciproque de $z^5 - 5z$ ne correspond pas à une invariance de $z^5 - 5z$ par cinq transformations.

On dit que le premier cas est galoisien alors que le second ne l'est pas.

- La multiformité de la fonction $\sqrt[3]{z}$ correspond à l'invariance de la fonction z^3 par un groupe de trois rotations.
- La multiformité de la réciproque de $z^5 - 5z$ ne correspond pas à une invariance de $z^5 - 5z$ par cinq transformations.

On dit que le premier cas est galoisien alors que le second ne l'est pas.

Groupes

Un groupe est un ensemble de permutations qui est stable par composition et passage à l'inverse.

- Les permutations des trois sommets d'un triangle.
- Les translations d'amplitude $2k\pi$ qui agissent sur une droite.
- Les groupes de Galois des équations algébriques.
- Les déplacements du plan ou de l'espace.
- Les symétries en général....

Faire de la géométrie, c'est étudier un groupe.

Les groupes de transformations.

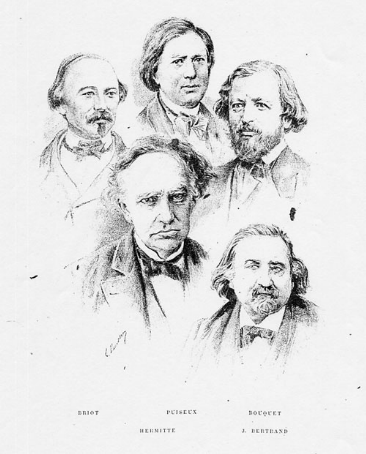
L'équation de Klein, de degré 120...

L'équation de Klein, de degré 120...

1880

Bouquet de soleils, Monet, 1880

1878 : « Grand Prix des Sciences Mathématiques » pour 1880.
« *Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une variable indépendante.* »



Ne parlons pas des systèmes dynamiques !

- **22 mars 1880** : Poincaré soumet un mémoire sur les équations différentielles dans le plan.
- **14 juin 1880** : le mémoire est retiré par Poincaré. Probablement parce qu'il est hors-sujet...

Dommage ! car il s'agit de ce qui donnera lieu à la théorie qualitative des systèmes dynamiques.
Note à l'Académie en avril 1880, suivie par de grands mémoires en novembre et décembre 1981, août 1882 et janvier 1985.

Ne parlons pas des systèmes dynamiques !

- **22 mars 1880** : Poincaré soumet un mémoire sur les équations différentielles dans le plan.
- **14 juin 1880** : le mémoire est retiré par Poincaré. Probablement parce qu'il est hors-sujet...

  Dommage ! car il s'agit de ce qui donnera lieu à la théorie qualitative des systèmes dynamiques.
  Note à l'Académie en avril 1880, suivie par de grands mémoires en novembre et décembre 1981, août 1882 et janvier 1985.

Lazarus Immanuel Fuchs (1833-1902)

Mai 1880 : *Non inultus premor*

« Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir contrairement à mon habitude ; je ne pus m'endormir ; les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent pour ainsi dire pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures. »

29 mai 1880 : Poincaré soumet « *Non inultus premor* ».

29 mai 1880 : *Non inultus premor*

La deuxième partie de ce travail contient les réflexions que m'ont inspirées la lecture d'un très remarquable mémoire que M. Fuchs a inséré dans le 2e fascicule du tome 89 du Journal de Borchardt.

M Fuchs démontre que si $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont deux intégrales d'une équation différentielle du second ordre; si l'on pose:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z$$

$$\int_{\xi_1}^{x_1} \varphi(x)\,dx + \int_{\xi_2}^{x_2} \varphi(x)\,dx = u_1$$

$$\int_{\xi_1}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{\xi_2}^{x_2} f(x)\,dx = u_2$$

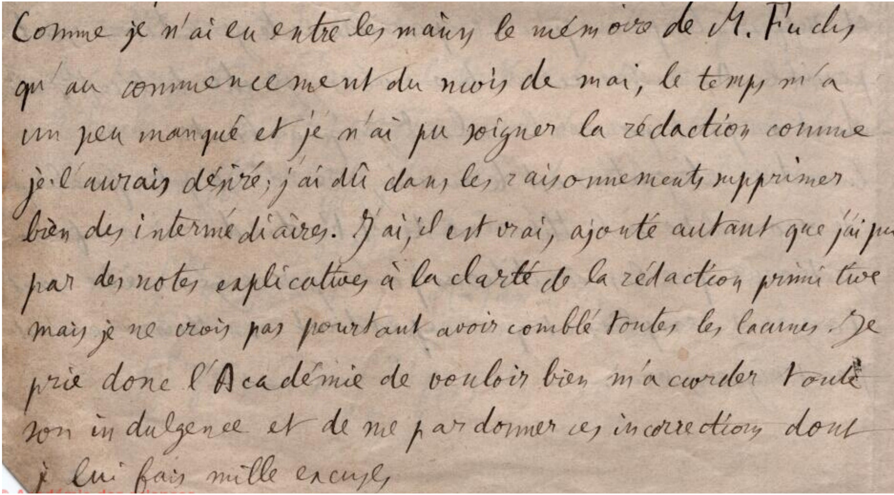
29 mai 1880 : *Non inultus premor*

et certaines conditions :

1° x est fonction monodrome de z

2° x_1 et x_2 sont fonctions monodromes de u_1 et de u_2.

Je me suis occupé surtout du premier résultat sur lequel s'appuie le second. Frappé de l'insuffisance de la démonstration de M. Fuchs, insuffisance que j'ai cherché à faire ressortir par quelques courtes réflexions, j'ai pensé qu'il y avait lieu de faire de la question une étude plus approfondie.


Comme je n'ai eu entre les mains le mémoire de M. Fuchs
qu'au commencement du mois de mai, le temps m'a
un peu manqué et je n'ai pu soigner la rédaction comme
je l'aurais désiré; j'ai dû dans les raisonnements supprimer
bien des intermédiaires. J'ai, il est vrai, ajouté autant que j'ai pu
par des notes explicatives à la clarté de la rédaction primitive
mais je ne crois pas pourtant avoir comblé toutes les lacunes. Je
prie donc l'Académie de vouloir bien m'accorder toute
son indulgence et de me pardonner ces incorrections dont
je lui fais mille excuses,

Équations différentielles linéaires : un cas très très simple

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot y$$

- L'équation est singulière en $x = 0$.
- « La » solution est $y = \sqrt[3]{x}$.
  C'est une situation « galoisienne » : l'ambiguïté de la racine cubique est expliquée par l'invariance de la fonction x^3 par trois rotations.

Équations différentielles linéaires : un cas très très simple

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot y$$

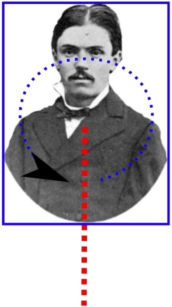
- L'équation est singulière en $x = 0$.
- « La » solution est $y = \sqrt[3]{x}$.
  C'est une situation « galoisienne » : l'ambiguïté de la racine cubique est expliquée par l'invariance de la fonction x^3 par trois rotations.

Équations différentielles linéaires : un cas très très simple

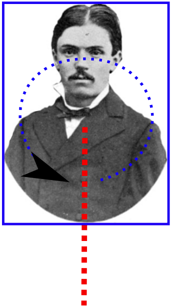
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot y$$

- L'équation est singulière en $x = 0$.
- « La » solution est $y = \sqrt[3]{x}$.
  C'est une situation « galoisienne » : l'ambiguïté de la racine cubique est expliquée par l'invariance de la fonction x^3 par trois rotations.

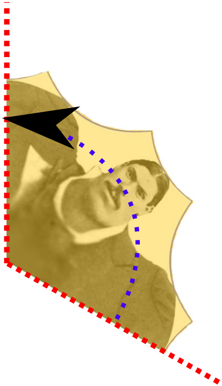
$$\xrightarrow{\sqrt[3]{x}}$$



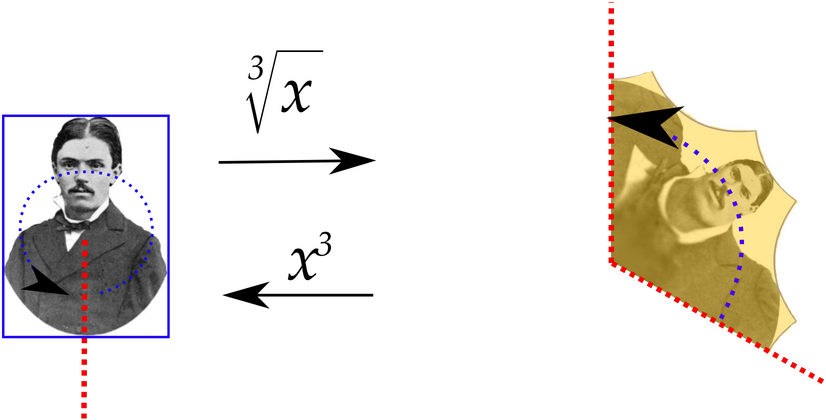
$$\xrightarrow{\sqrt[3]{x}}$$

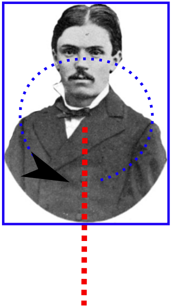


$$\sqrt[3]{x}$$



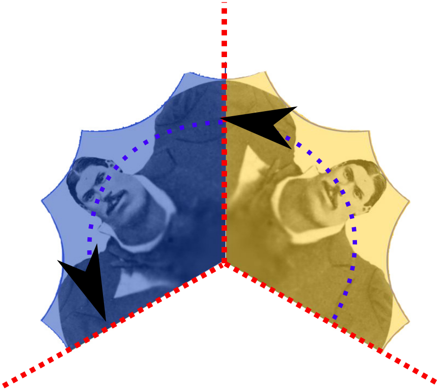
29 mai 1880 : *Non inultus premor*

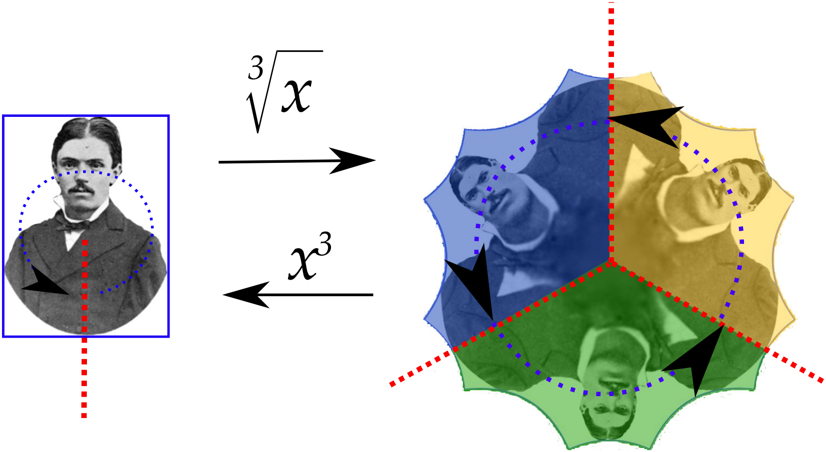




$$\sqrt[3]{x}$$

$$x^3$$





$\sqrt[3]{x}$
x^3

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(x)}{R(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{Q(x)}{R(x)}y$$

Problème : *les équations différentielles ont-elles en général ce type de propriétés « galoisiennes » ?*

Leurs solutions ont-elles des réciproques qui sont invariantes par des groupes intéressants ?

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(x)}{R(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{Q(x)}{R(x)}y$$

Problème *: les équations différentielles ont-elles en général ce type de propriétés « galoisiennes » ?*
Leurs solutions ont-elles des réciproques qui sont invariantes par des groupes intéressants ?

Critique (justifiée) de l'article de Fuchs.

Étude de l'exemple « le plus simple » dans lequel il n'y a que deux points singuliers $0, 1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(1-x)}\left((a+b+1)x - c)\frac{dy}{dx} + aby\right)$$

Poincaré considère (comme Fuchs) le quotient $f(x) = y_1(x)/y_2(x)$ de deux solutions.

Critique (justifiée) de l'article de Fuchs.

Étude de l'exemple « le plus simple » dans lequel il n'y a que deux points singuliers $0, 1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(1-x)}\left((a+b+1)x - c)\frac{dy}{dx} + aby\right)$$

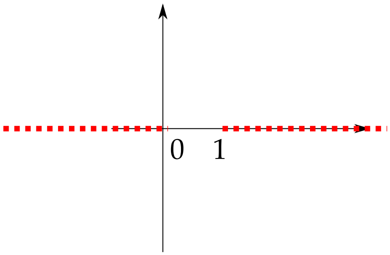
Poincaré considère (comme Fuchs) le quotient $f(x) = y_1(x)/y_2(x)$ de deux solutions.

Critique (justifiée) de l'article de Fuchs.

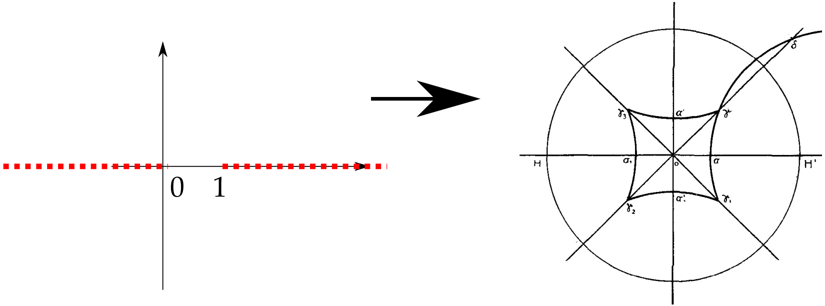
Étude de l'exemple « le plus simple » dans lequel il n'y a que deux points singuliers $0, 1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(1-x)}\left((a+b+1)x - c)\frac{dy}{dx} + aby\right)$$

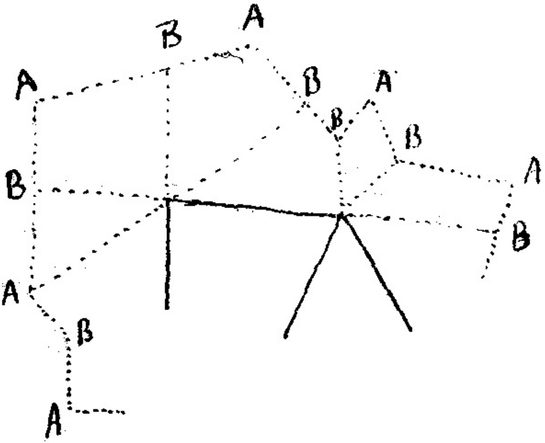
Poincaré considère (comme Fuchs) le quotient $f(x) = y_1(x)/y_2(x)$ de deux solutions.


0
1

29 mai 1880 : *Non inultus premor*



29 mai 1880 : *Non inultus premor*



29 mai 1880 : *Non inultus premor*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(1-x)}\left((a+b+1)x - c)\frac{dy}{dx} + aby\right)$$

- Quand on tourne autour des points singuliers $0, 1$, la valeur de f est modifiée : les solutions sont multiformes.
- La réciproque F de f est par contre bien définie à l'intérieur d'un cercle. C'est une « fonction fuchsienne ».

Le mémoire est un peu ... confus et ... pas très convaincant !
Poincaré n'a pas encore vu que F est invariante par un groupe.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(1-x)}\left(((a+b+1)x-c)\frac{dy}{dx} + aby\right)$$

- Quand on tourne autour des points singuliers $0, 1$, la valeur de f est modifiée : les solutions sont multiformes.
- La réciproque F de f est par contre bien définie à l'intérieur d'un cercle. C'est une « fonction fuchsienne ».

Le mémoire est un peu ... confus et ... pas très convaincant !
Poincaré n'a pas encore vu que F est invariante par un groupe.

29 mai 1880 : *Non inultus premor*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(1-x)}\left((a+b+1)x - c)\frac{dy}{dx} + aby\right)$$

- Quand on tourne autour des points singuliers $0, 1$, la valeur de f est modifiée : les solutions sont multiformes.
- La réciproque F de f est par contre bien définie à l'intérieur d'un cercle. C'est une « fonction fuchsienne ».

Le mémoire est un peu ... confus et ... pas très convaincant !

Poincaré n'a pas encore vu que F est invariante par un groupe.

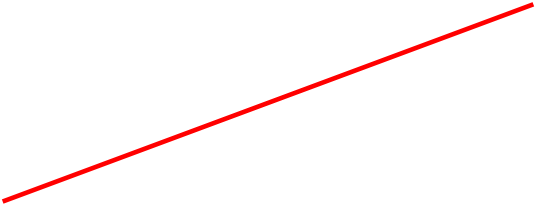
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x(1-x)}\left((a+b+1)x - c)\frac{dy}{dx} + aby\right)$$

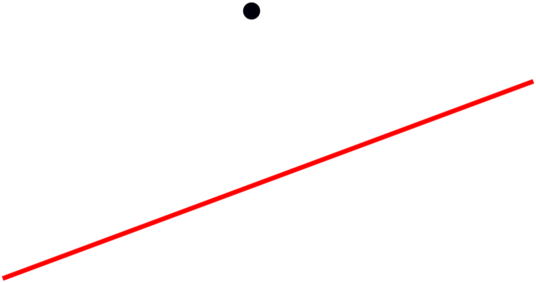
- Quand on tourne autour des points singuliers $0, 1$, la valeur de f est modifiée : les solutions sont multiformes.
- La réciproque F de f est par contre bien définie à l'intérieur d'un cercle. C'est une « fonction fuchsienne ».

Le mémoire est un peu ... confus et ... pas très convaincant !
Poincaré n'a pas encore vu que F est invariante par un groupe.

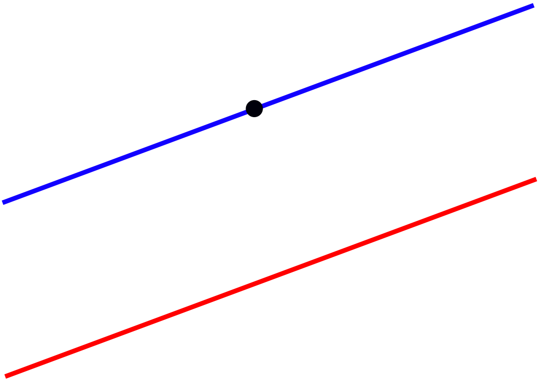
Juin 1880 : « l'idée me vint... ».

« À ce moment, je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent vite oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées mathématiques parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non euclidienne. »





Le monde non-euclidien



28 juin 1880 : Premier supplément, 80 pages

Rapports de la théorie précédente
avec la Pseudogéométrie.

Il existe des liens étroits entre les considérations qui précèdent et la géométrie non-euclidienne de Lobatchewski. Qu'est-ce en effet qu'une géométrie? C'est l'étude du groupe d'opérations formé par les déplacements que l'on peut faire subir à une figure sans la déformer. Dans la géométrie euclidienne ce groupe se réduit à des rotations et à des translations. Dans la pseudogéométrie de Lobatchewski

28 juin 1880 : Premier supplément, 80 pages

il est plus compliqué.
Eh bien, le groupe des opérations combinées à l'aide de M et de N est isomorphe à un groupe contenu dans le groupe pseudogéométrique. Étudier le groupe des opérations combinées à l'aide de M et de N, c'est donc faire de la géométrie de Lobatchewski. La pseudogéométrie va par conséquent nous fournir un langage commode pour exprimer ce que nous aurons à dire de ce groupe.

28 juin 1880 : Le monde non-euclidien

« Supposons [...] un monde renfermé dans [un grand cercle] et soumis aux lois suivantes :
La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint [le cercle] où ce monde est renfermé.
[...]

[...]
Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon [du cercle] limite ; soit r la distance du point considéré au centre de [ce cercle]. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$*.*
Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.
Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.
Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera [du cercle] limite.
[...]

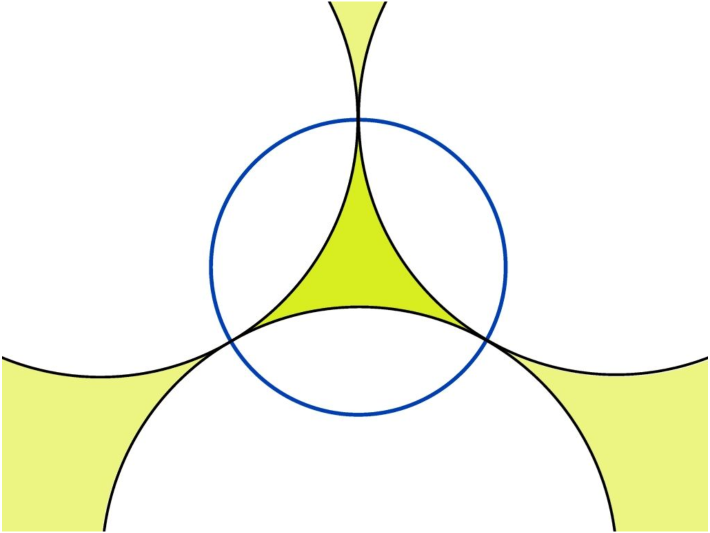
28 juin 1880 : Le monde non-euclidien

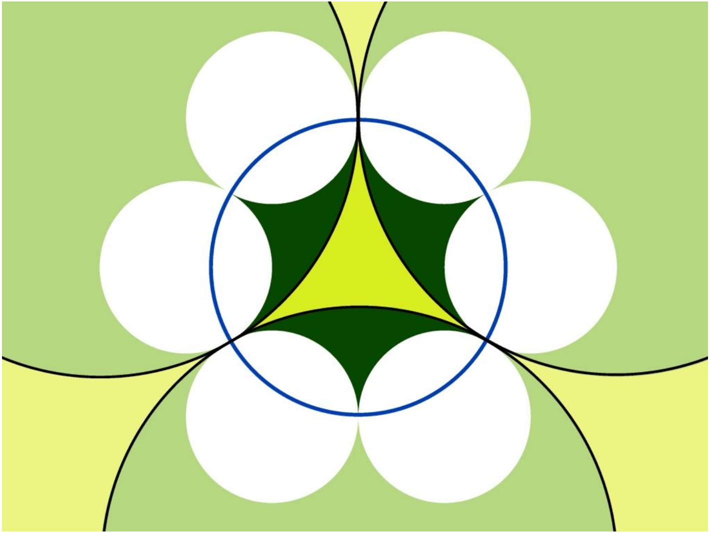
28 juin 1880 : Le monde non-euclidien

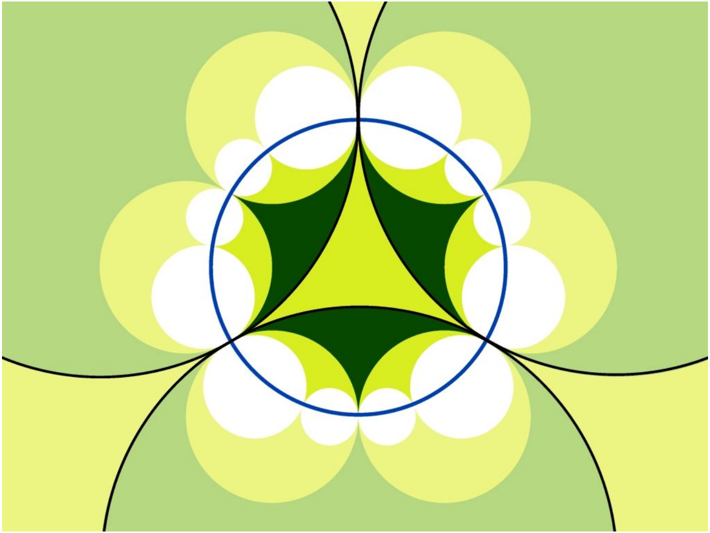
28 juin 1880 : Le monde non-euclidien

[..]
Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.
Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher [du cercle] limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre [le cercle] limite.
Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables ; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler. [...] Qu'on me permette pour abréger le langage, d'appeler un pareil mouvement déplacement non euclidien.
Ainsi des êtres comme nous, dont l'éducation se ferait dans un pareil monde, n'auraient pas la même géométrie que nous. [Si ces êtres imaginaires] fondent une géométrie, [...] ce sera la géométrie non euclidienne. »

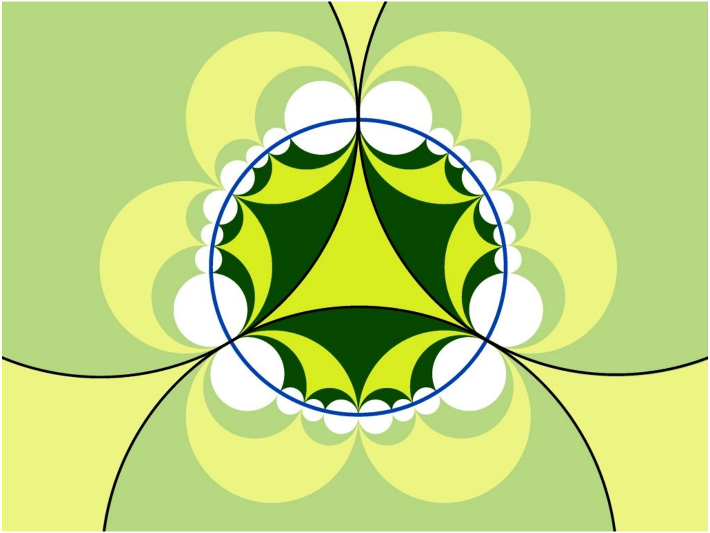
28 juin 1880 : Recouvrir le disque par des triangles

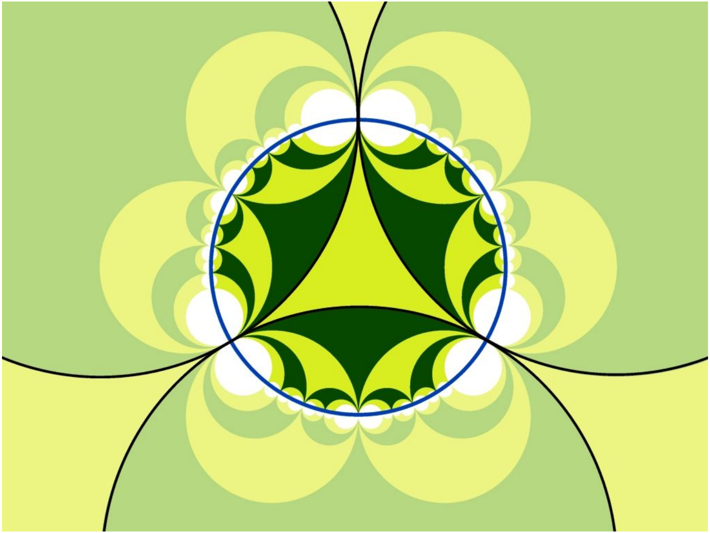




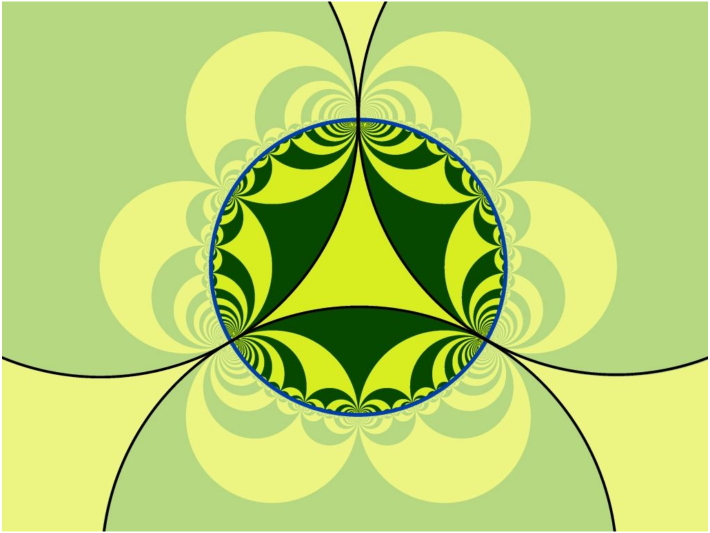


28 juin 1880 : Recouvrir le disque par des triangles





28 juin 1880 : Recouvrir le disque par des triangles



Été 1880

« Je me mis alors à étudier des questions d'Arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies sont identiques à celles de la Géométrie non euclidienne.

[...]

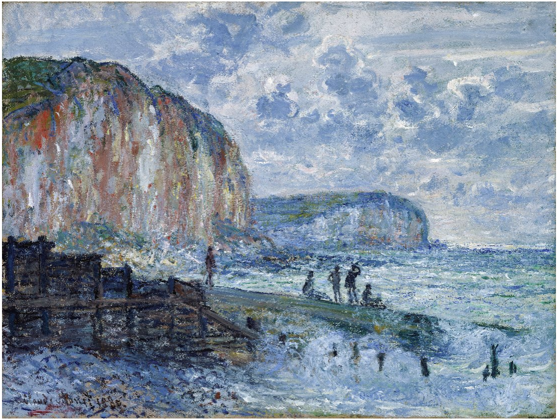
Été 1880

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y a des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique [...] Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions ; j'en fis un siège systématique et j'enlevai l'un après l'autre tous les ouvrages avancés ; il y en avait un, cependant, qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

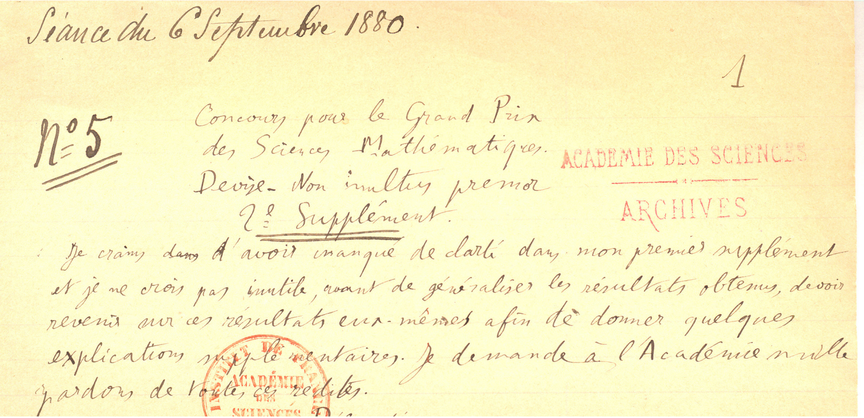
[...]

Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine. »

Monet 1880 : les falaises des petites dalles



6 septembre 1880 : Deuxième supplément, 23 pages



Séance du 6 Septembre 1880.

1

N° 5

Concours pour le Grand Prix
des Sciences Mathématiques.
Devise. Non inultus premor
2e Supplément.

Je crains d'avoir manqué de clarté dans mon premier supplément et je ne crois pas inutile, avant de généraliser les résultats obtenus, devoir revenir sur ces résultats eux-mêmes afin de donner quelques explications supplémentaires. Je demande à l'Académie mille pardons de toutes ces redites.

Poincaré fait marcher la machine à l'envers !

- On part d'un polygone dans le disque de Poincaré dont les angles sont de la forme π/n.
- Poincaré montre comment construire un pavage et un groupe de symétries.

Poincaré fait marcher la machine à l'envers !

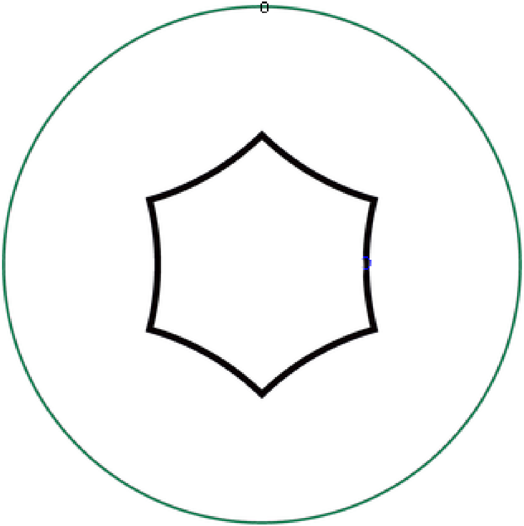
- On part d'un polygone dans le disque de Poincaré dont les angles sont de la forme π/n.
- Poincaré montre comment construire un pavage et un groupe de symétries.

6 septembre 1880 : Deuxième supplément, 23 pages

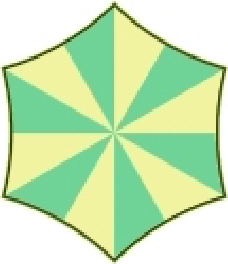
Poincaré fait marcher la machine à l'envers !

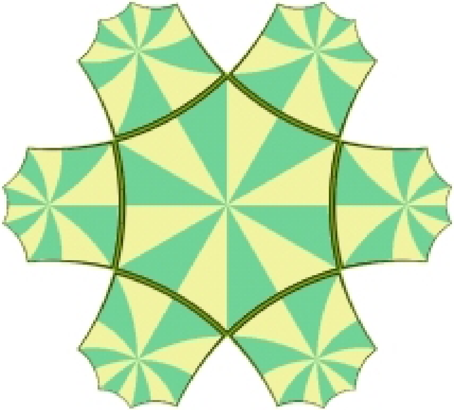
- On part d'un polygone dans le disque de Poincaré dont les angles sont de la forme π/n.
- Poincaré montre comment construire un pavage et un groupe de symétries.

6 septembre 1880

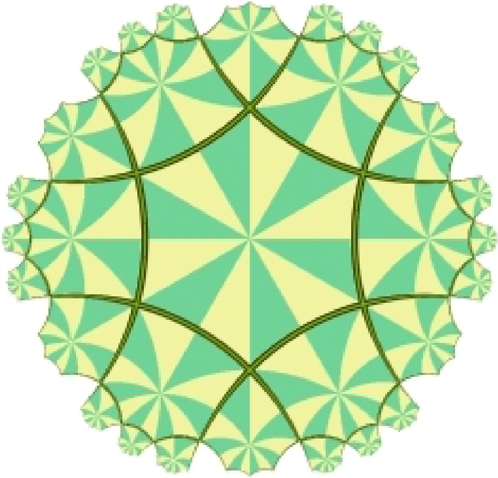


6 septembre 1880

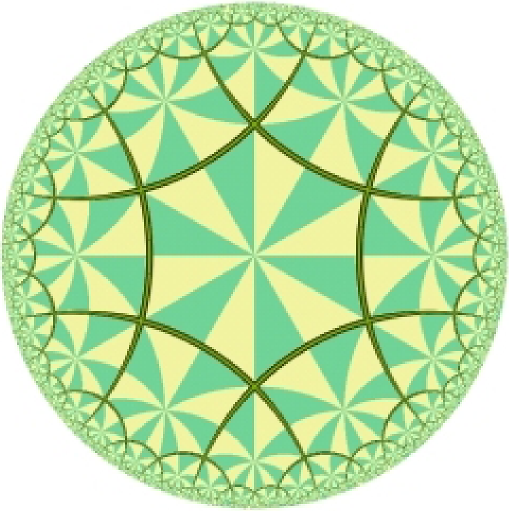




6 septembre 1880



6 septembre 1880



6 septembre 1880 : Deuxième supplément, des groupes vers les fonctions fuchsiennes

Poincaré fait marcher la machine à l'envers !

- On part d'un polygone dans le disque de Poincaré dont les angles sont de la forme π/n.
- Poincaré montre comment construire un pavage et un groupe de symétries.
- Puis, il construit des fonctions « fuchsiennes » invariantes par le groupe et explique comment les calculer numériquement.

Une fonction fuchsienne

6 septembre 1880 : des fonctions fuchsiennes vers les équations différentielles

Poincaré fait marcher la machine à l'envers !

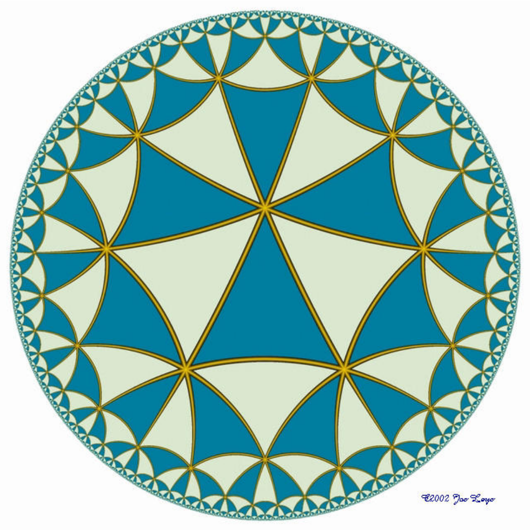
- On part d'un polygone dans le disque de Poincaré dont les angles sont de la forme π/n.
- Poincaré montre comment construire un pavage et un groupe de symétries.
- Puis, il construit des fonctions « fuchsiennes » invariantes par le groupe et explique comment les calculer numériquement.
- Puis, il montre que ces fonctions donnent (les réciproques) des solutions d'une certaine équation différentielle, qui peut avoir plus que deux points singuliers.
- Le groupe, le pavage, l'équation différentielle sont trois émanations du « même » objet !

6 septembre 1880 : des fonctions fuchsiennes vers les équations différentielles

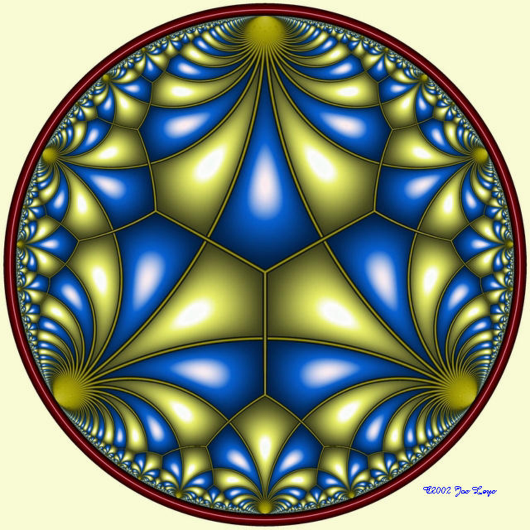
Poincaré fait marcher la machine à l'envers !

- On part d'un polygone dans le disque de Poincaré dont les angles sont de la forme π/n.
- Poincaré montre comment construire un pavage et un groupe de symétries.
- Puis, il construit des fonctions « fuchsiennes » invariantes par le groupe et explique comment les calculer numériquement.
- Puis, il montre que ces fonctions donnent (les réciproques) des solutions d'une certaine équation différentielle, qui peut avoir plus que deux points singuliers.
- Le groupe, le pavage, l'équation différentielle sont trois émanations du « même » objet !

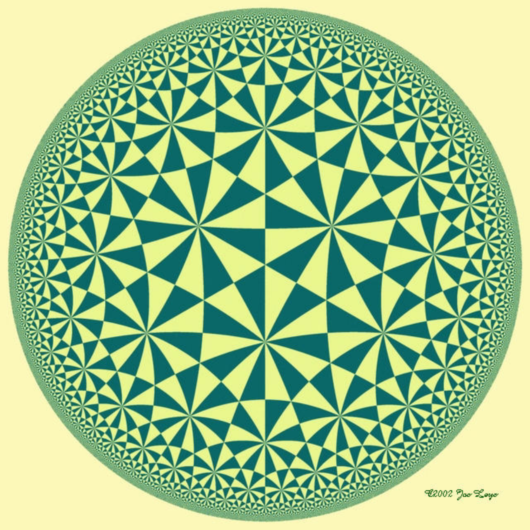
6 septembre 1880



6 septembre 1880

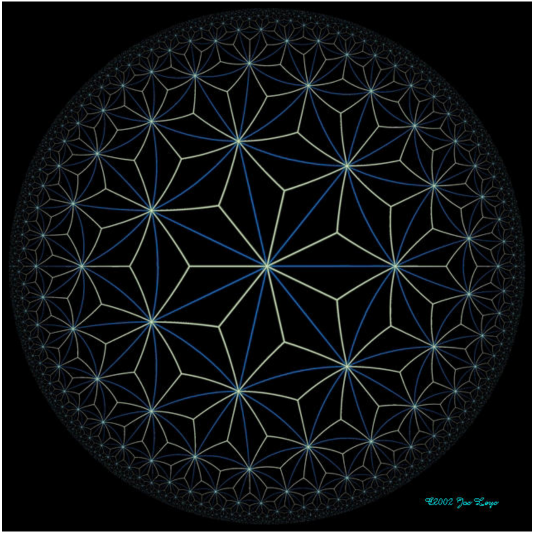


6 septembre 1880

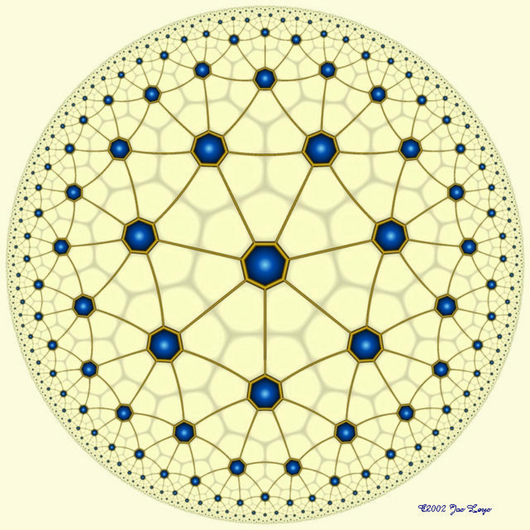


6 septembre 1880

6 septembre 1880

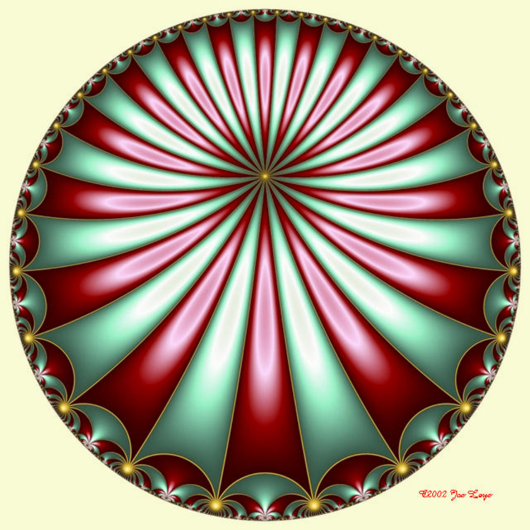


6 septembre 1880



6 septembre 1880

6 septembre 1880



20 décembre 1880 : Troisième supplément, 12 pages

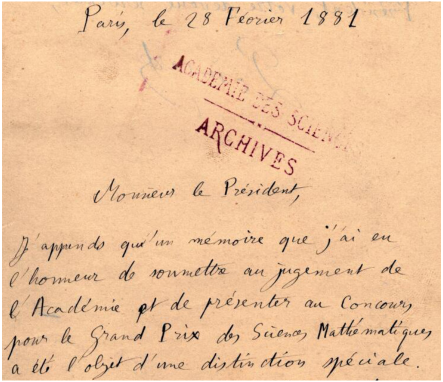
« Je ne doute pas d'ailleurs que les nombreuses équations envisagées par M. Fuchs [...] ne fournissent une infinité de transcendantes ... et que ces fonctions nouvelles ne permettent d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.
[...]
Il faudrait une longue discussion que je me réserve d'entreprendre plus tard, mais dans laquelle je ne veux pas entrer pour le moment. »

1881 : la suite...

Souvenir de Lecornu, camarade de Poincaré :

« *Je me souviens qu'invité par moi à dîner chez mes parents le 31 décembre 1880, il passa la soirée à se promener de long en large, n'entendant pas ce qu'on lui disait ou répondant à peine par des monosyllabes, et oubliant l'heure à tel point que passé minuit, je pris le parti de lui rappeler doucement que nous étions en 1881. Il parut, à ce moment redescendre sur terre, et se décida à prendre congé de nous. Quelques jours après, m'ayant rencontré sur le quai du port de Caen, il me dit négligemment : je sais intégrer toutes les équations différentielles.* »

22 février 1881 : Halphen gagne le prix ;-(
Mention spéciale du jury pour Poincaré. « La Commission ne peut que l'engager à poursuivre ses recherches, en signalant à l'Académie le beau talent dont il a fait preuve. »

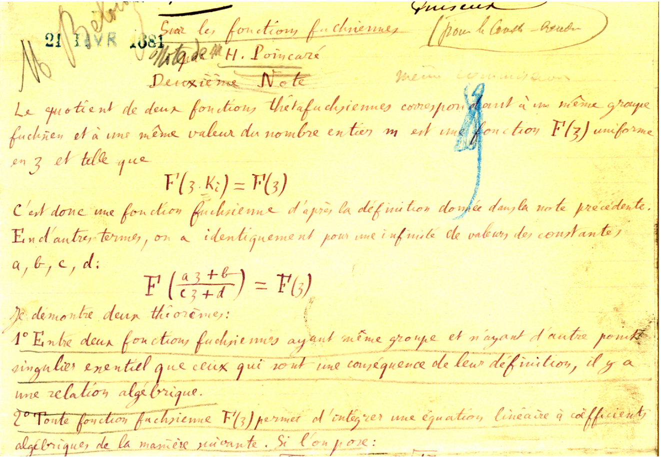

Paris, le 28 Février 1881

ACADÉMIE DES SCIENCES
ARCHIVES

Monsieur le Président,

J'apprends qu'un mémoire que j'ai eu l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie et de présenter au Concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques a été l'objet d'une distinction spéciale.

En 1881, Poincaré publiera 18 notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences consacrées aux fonctions fuchsiennes !


Puiseux

21 AVR 1881

Sur les fonctions fuchsiennes (pour les Comptes Rendus)

H. Poincaré

Deuxième Note

même commission

Le quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien et à une même valeur du nombre entier m est une fonction $F(z)$ uniforme en z et telle que

$$F(z, K_i) = F(z)$$

C'est donc une fonction fuchsienne d'après la définition donnée dans la note précédente. En d'autres termes, on a identiquement pour une infinité de valeurs des constantes a, b, c, d :

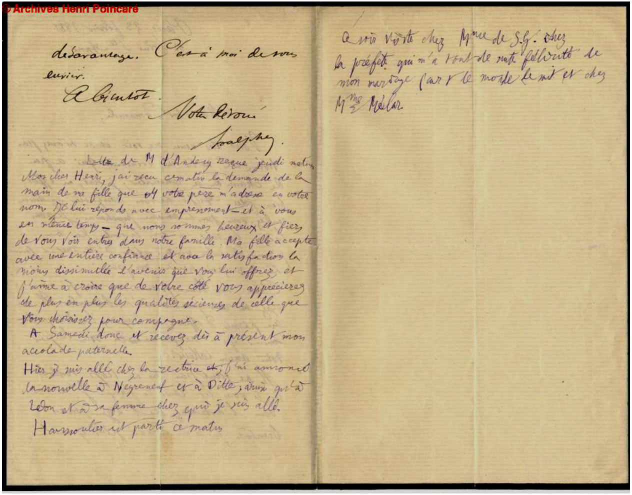
$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z)$$

Je démontre deux théorèmes :

1° Entre deux fonctions fuchsiennes ayant même groupe et n'ayant d'autre point singulier essentiel que ceux qui sont une conséquence de leur définition, il y a une relation algébrique.

2° Toute fonction fuchsienne $F(z)$ permet d'intégrer une équation linéaire à coefficients algébriques de la manière suivante. Si l'on pose :

Lettre du 23 février 1881 :



désavantage. C'est à moi de vous envier.

A bientôt.

Votre dévoué

[illegible].

Lettre de M d'Andecy reçue jeudi matin

Mon cher Henri, j'ai reçu ce matin la demande de la main de ma fille que ~~M~~ votre père m'adressa en votre nom. Je lui réponds avec empressement – et à vous en même temps – que nous sommes heureux et fiers de vous voir entrer dans notre famille. Ma fille accepte avec une entière confiance et avec la satisfaction la moins dissimulée l'avenir que vous lui offrez et j'aime à croire que de votre côté vous apprécierez de plus en plus les qualités sérieuses de celle que vous choisissez pour compagne.

A Samedi donc et recevez dès à présent mon accolade paternelle.

Hier je suis allé chez la rectrice et j'ai annoncé la nouvelle à Neyreneuf et à Ditte, ainsi qu'à Lédon et à sa femme chez qui je suis allé.

Harmoulier est parti ce matin

à voir visite chez Mme de S.G. chez le préfet qui m'a tout de suite félicité de mon mariage (car tout le monde le sait) et chez Mmes Mélar.

20 avril 1881 : mariage avec Jeanne-Louise Poulain d'Andecy

Avril 1881 : Renoir peint le déjeuner des canotiers

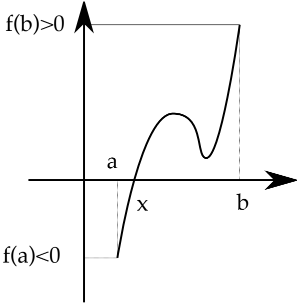
Felix Klein

12 juin 1881 : début de la correspondance avec Felix Klein

Freudenthal (1954) :

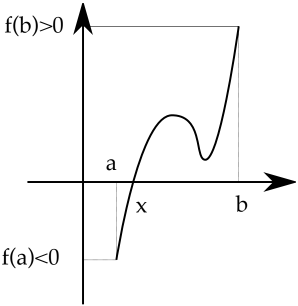
> « *Vingt-six lettres ont été échangées entre Klein et Poincaré sur les fonctions automorphes. Klein a écrit la première, après la parution de la troisième Note de Poincaré. Dans cette correspondance Poincaré est l'élève, qui pose des questions, et Klein est le maître, qui en toute sincérité et loyauté guide son élève et lui fait combler les lacunes énormes de son érudition mathématique. Il n'y avait qu'un seul différend : Klein désapprouvait la dénomination de fonctions fuchsiennes que Poincaré avait choisie, ignorant les mérites des mathématiciens de l'école de Riemann, mais Poincaré y tenait. [...]*
> *Qui peut mesurer les sentiments provoqués chez Klein par les progrès énormes et instantanés que Poincaré fit sur une route où eux, Klein et ses élèves, n'avaient avancé que pas à pas ? Plus on saisit cette situation, plus on doit admirer l'attitude irréprochable de Klein.* »

Il s'agit de montrer qu'il y a suffisamment de groupes fuchsiens pour rendre compte de TOUTES les équations différentielles linéaires.

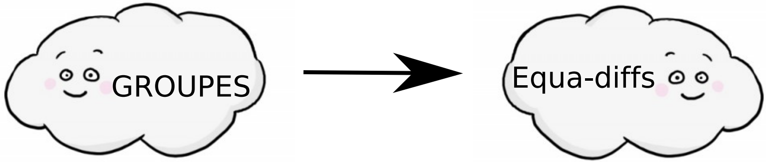


Faire varier les groupes continûment !

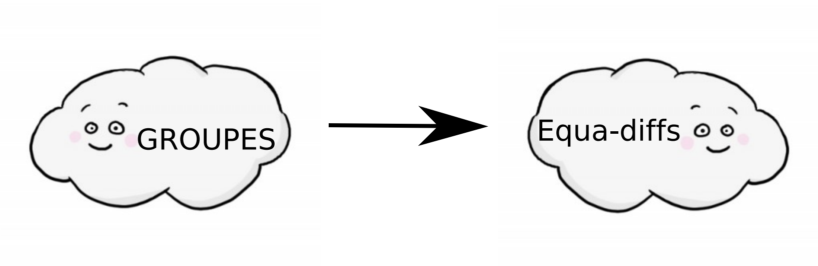
Il s'agit de montrer qu'il y a suffisamment de groupes fuchsiens pour rendre compte de TOUTES les équations différentielles linéaires.



Faire varier les groupes continûment !

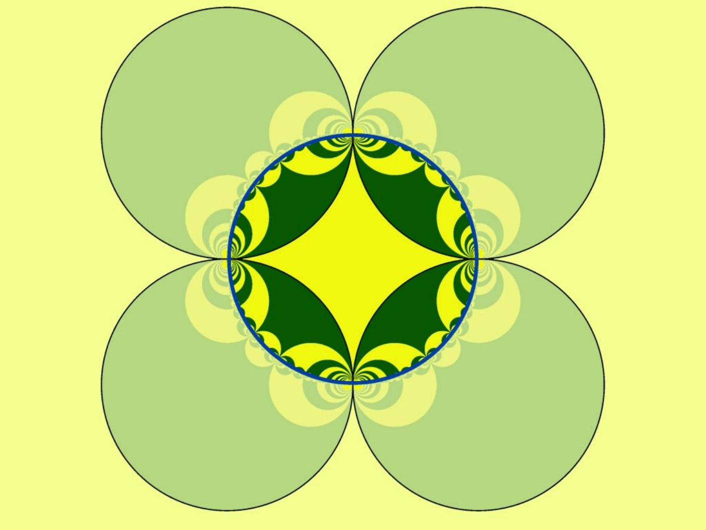


Exemple le plus simple : on fait varier un quadrilatère et on observe comment varient les points singuliers de l'équation différentielle qui lui correspond. A-t-on suffisamment de liberté dans les polygones pour atteindre toutes les possibilités de points singuliers ?



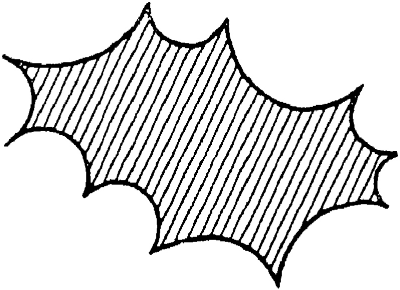
Exemple le plus simple : on fait varier un quadrilatère et on observe comment varient les points singuliers de l'équation différentielle qui lui correspond. A-t-on suffisamment de liberté dans les polygones pour atteindre toutes les possibilités de points singuliers ?

Déformer les groupes fuchsiens

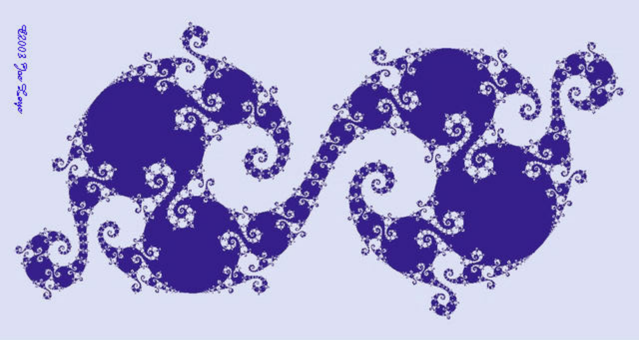


Klein fait remarquer qu'en général quatre cercles dans le plan ne sont pas orthogonaux à un même cercle...

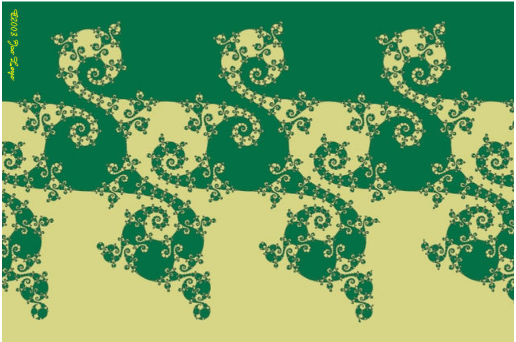
Poincaré invente les groupes kleinéens...



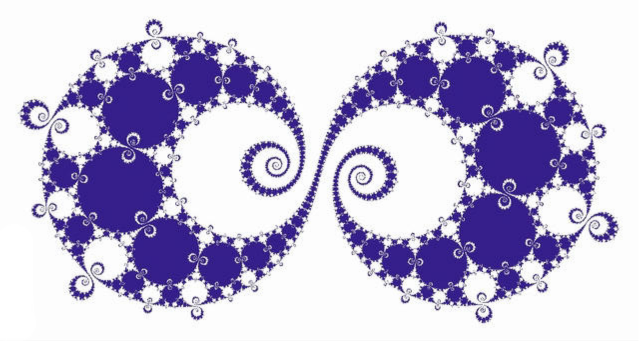
Un groupe kleinéen



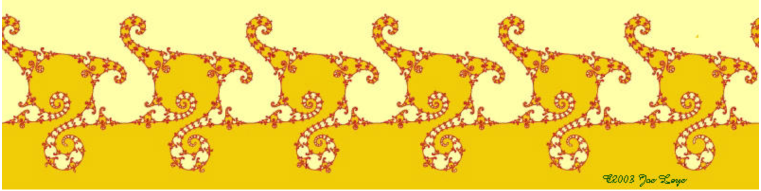
Un groupe kleinéen



Un groupe kleinéen



Un groupe kleinéen



Un groupe kleinéen

SÉANCE DU 8 AOUT 1881

1. — Sur les fonctions fuchsiennes

Note de M. H. Poincaré

« Dans ma communication du 30 Mai dernier, j'ai montré que le problème de l'intégration des équations différentielles linéaires à coëfficients rationnels se ramène au suivant :

1° que toute équation différentielle linéaire à coëfficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes.

2° que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire.

Poincaré ne prouve pas tout à fait ce qu'il annonce...

Il y a encore beaucoup de travail...

Collaboration/compétion avec Klein.

Poincaré ne prouve pas tout à fait ce qu'il annonce...

Il y a encore beaucoup de travail...

Collaboration/compétion avec Klein.

La suite ...

Klein :

« Pendant la dernière nuit de mon séjour, celle du 22 au 23 mars [1882], que j'ai passé assis sur un divan à cause d'une crise d'asthme, m'est apparu subitement vers trois heures et demi le théorème central tel qu'il est ébauché dans la figure du polygone à 14 côtés. Le lendemain matin, dans la diligence qui à l'époque circulait entre Norden et Emden, j'ai réfléchi à ce que j'avais trouvé examinant encore une fois tous les détails. Je savais, maintenant, que j'avais trouvé un théorème important. Arrivé à Düsseldorf, j'ai rédigé le mémoire, daté du 27 mars, envoyé à Teubner et fait transmettre les épreuves à Poincaré et à Schwarz, ainsi qu'à Hurwitz. »

Poincaré publiera cinq grands mémoires résumant l'ensemble entre 1882 et 1884... puis passera à autre chose.
pour revenir plus tard sur le
« grand théorème d'uniformisation »
obtenu en 1907, simultanément avec Paul Koebe.

C'est une autre histoire !

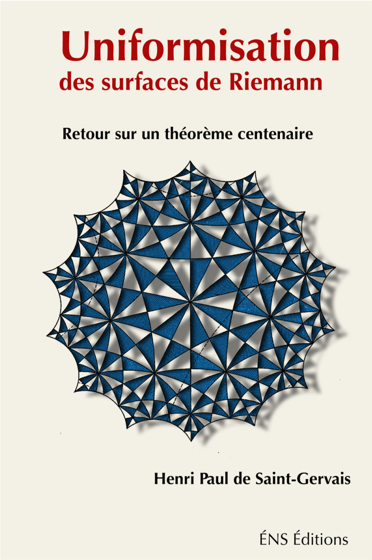
Poincaré publiera cinq grands mémoires résumant l'ensemble entre 1882 et 1884... puis passera à autre chose.
pour revenir plus tard sur le
« grand théorème d'uniformisation »
obtenu en 1907, simultanément avec Paul Koebe.

C'est une autre histoire !

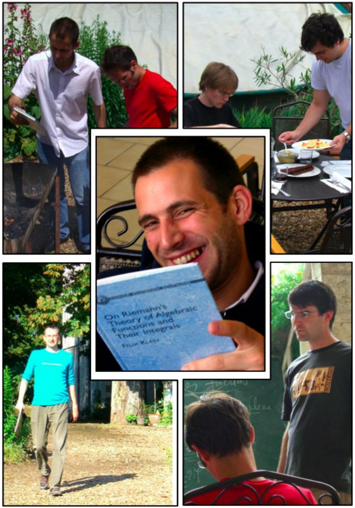
Poincaré publiera cinq grands mémoires résumant l'ensemble entre 1882 et 1884... puis passera à autre chose.
pour revenir plus tard sur le
« grand théorème d'uniformisation »
obtenu en 1907, simultanément avec Paul Koebe.

C'est une autre histoire !

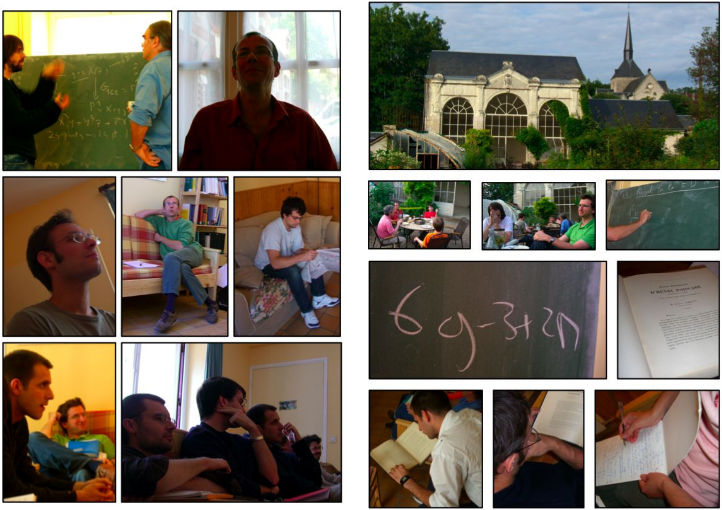
Le théorème d'uniformisation



Le théorème d'uniformisation



Le théorème d'uniformisation



Lie à Klein, après avoir rencontré Poincaré en 1882 :

« Poincaré sagte gelegentlich, dass alle Mathematik eine Gruppengeschichte war. »

Picard à Lie, en 1893 :

« Voilà Paris devenir un centre de groupes ; tout cela fermente dans ces jeunes cerveaux, et on aura un excellent vin quand les liqueurs seront un peu reposées. »

Lie à Klein, après avoir rencontré Poincaré en 1882 :

« *Poincaré sagte gelegentlich, dass alle Mathematik eine Gruppengeschichte war.* »

Picard à Lie, en 1893 :

« *Voilà Paris devenir un centre de groupes ; tout cela fermente dans ces jeunes cerveaux, et on aura un excellent vin quand les liqueurs seront un peu reposées.* »

Un groupe d'ordre 28...

Merci à Jos Leys.

Un groupe d'ordre 28...

Merci à Jos Leys.