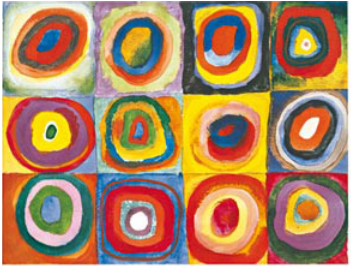
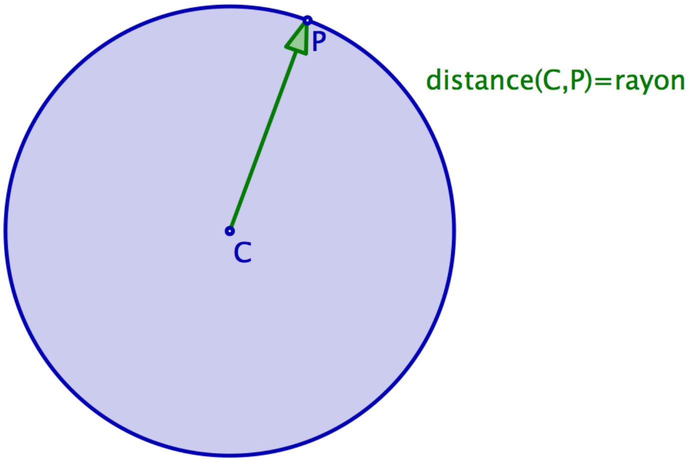
Jeux de cercles

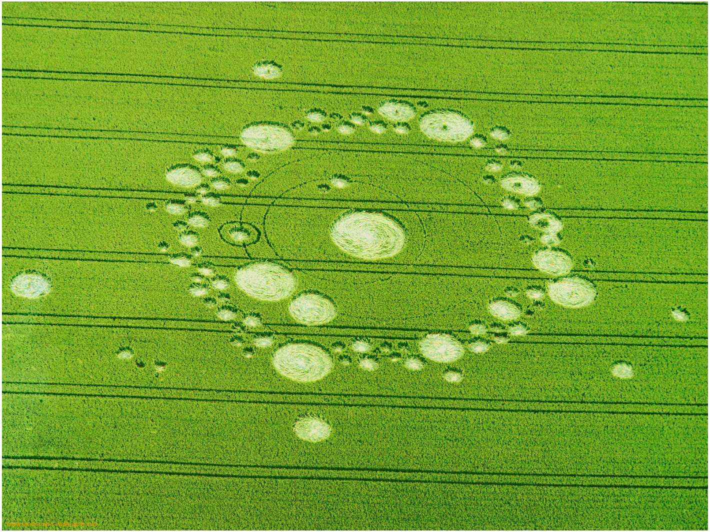


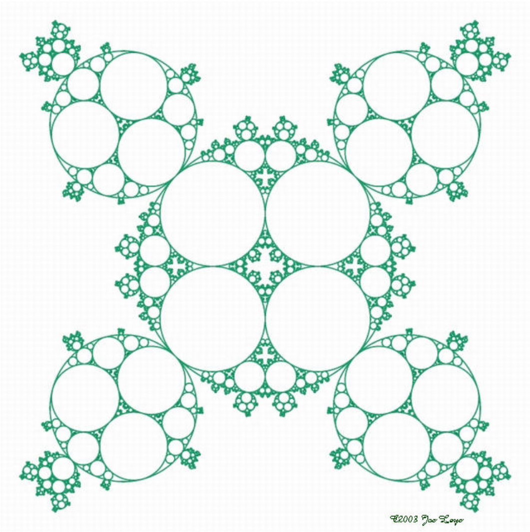
Étienne Ghys

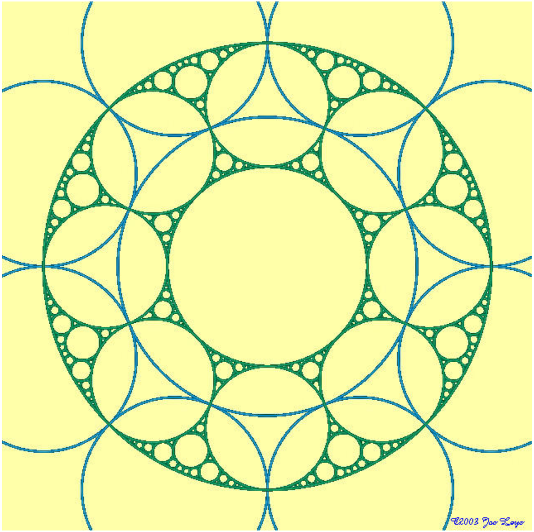
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

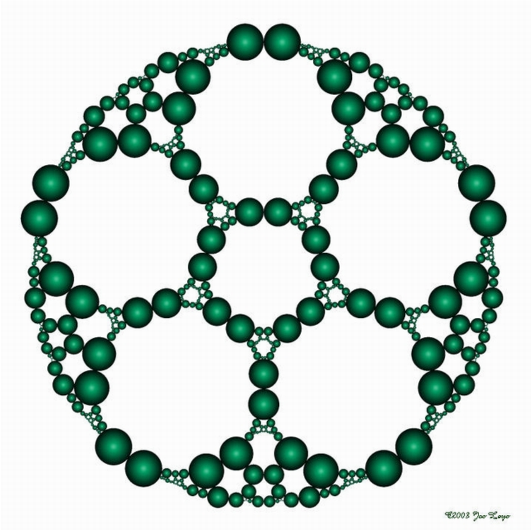
UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

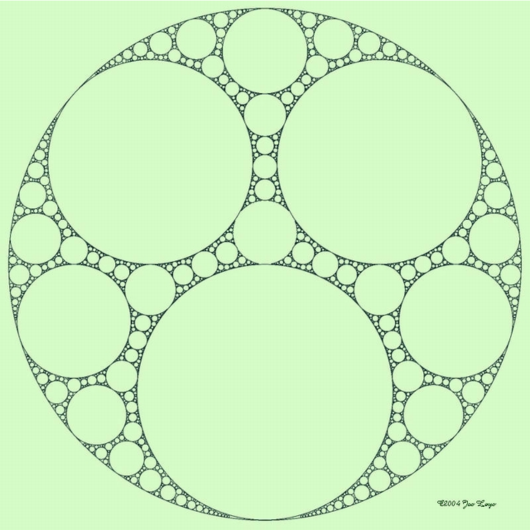

P
distance(C,P)=rayon
C




©2003 Joe Loye


©2003 Jos Leys


©2003 Jos Leys


©2004 Jos Leys


22ème congrès
MATh.en.JEANS
22 ans
100 %
4 congrès
Bobigny
Epinal
Gap
Vienne
s'éclate !
Le 22ème congrès MATh.en.JEANS accueillera cette année les élèves des ateliers de recherches dans 4 villes :
du 1er au 3 avril 2011
Gap (Université de la Méditerranée),
Epinal (Nancy-Université),
Bobigny (Université Paris 13)
et du 12 au 15 mai 2011
Vienne (Université de Vienne).
MATh.en.JEANS
Des jeunes venus de toute la France et d'ailleurs avec leurs professeurs et leurs chercheurs, présenteront les résultats de leur recherche de l'année. Des conférences de mathématiciens illustreront les mathématiques vivantes en les rendant accessibles à tous.
http://mathenjeans.fr
Hautes Alpes
Gap

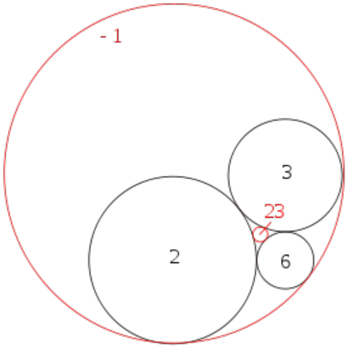

22ème congrès
MATh.en.JEANS

La courbure d'un cercle de rayon r est par définition $k = \frac{1}{r}$.

Si quatre cercles sont tangents entre eux, on donne un signe à la courbure de chaque cercle :

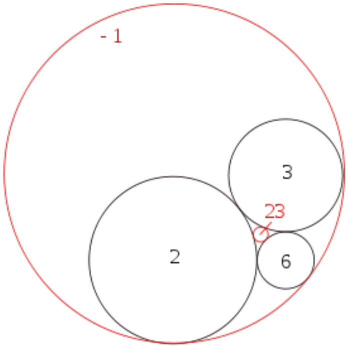
Le signe $-$ si les autres cercles sont intérieurs au disque.

Le signe $+$ si les autres cercles sont extérieurs au disque.



Le théorème de Descartes (1643)

La courbure d'un cercle de rayon r est par définition $k = \frac{1}{r}$.
Si quatre cercles sont tangents entre eux, on donne un signe à la courbure de chaque cercle :
Le signe $-$ si les autres cercles sont intérieurs au disque.
Le signe $+$ si les autres cercles sont extérieurs au disque.

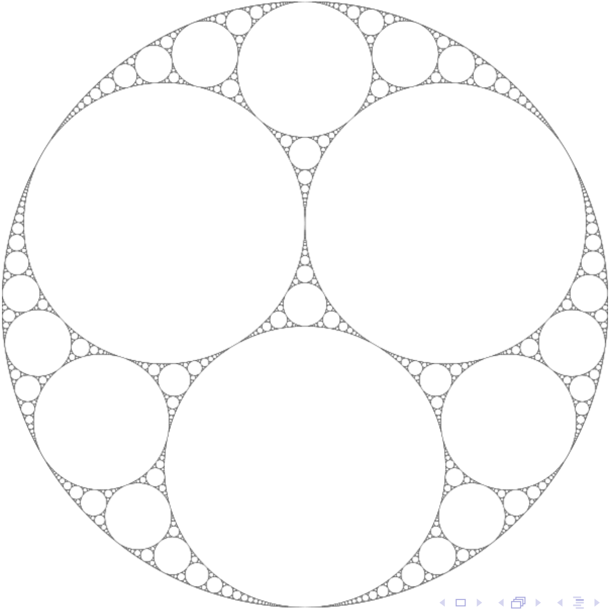


Le théorème de Descartes (1643)

Théorème : Si quatre cercles de courbures k_1, k_2, k_3, k_4 sont tangents deux à deux, on a la relation suivante :

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

Empilement d'Appolonius



Empilement d'Appolonius

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_4}$$

$$k_4 + k_4' = 2(k_1 + k_2 + k_3)$$

Si les quatre premiers cercles ont une courbure entière, tous les autres cercles ont une courbure entière...

Empilement d'Appolonius

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_4}$$

$$k_4 + k_4' = 2(k_1 + k_2 + k_3)$$

Si les quatre premiers cercles ont une courbure entière, tous les autres cercles ont une courbure entière...

Empilement d'Appolonius

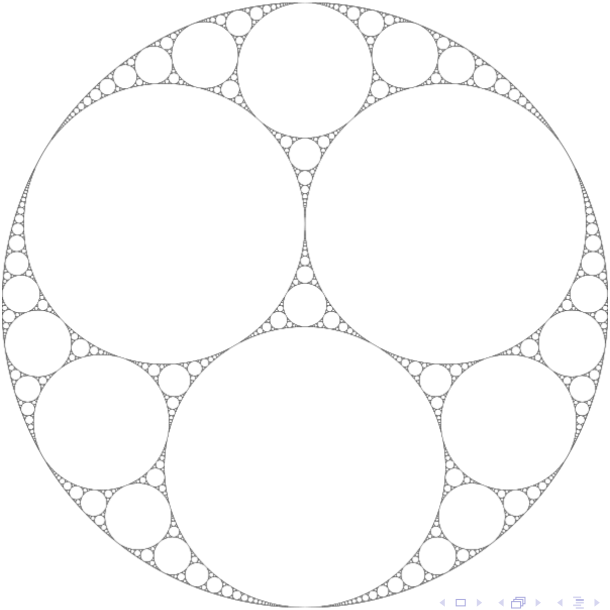
$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

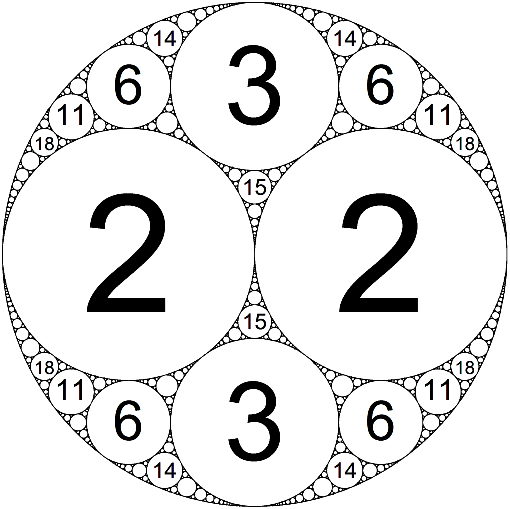
$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_4}$$

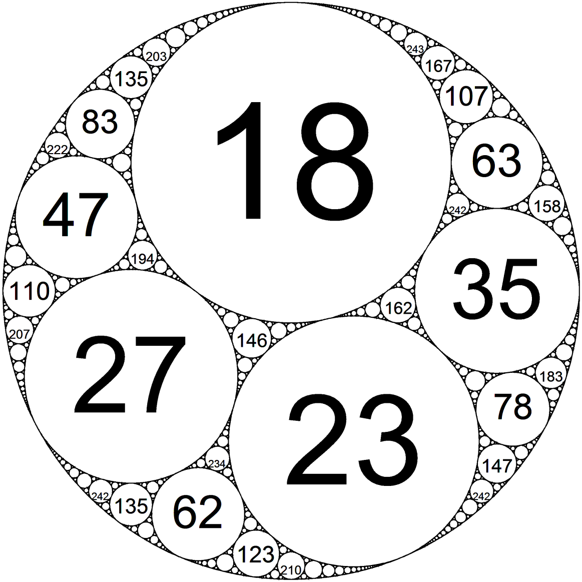
$$k_4 + k_4' = 2(k_1 + k_2 + k_3)$$

Si les quatre premiers cercles ont une courbure entière, tous les autres cercles ont une courbure entière...

Empilement d'Appolonius

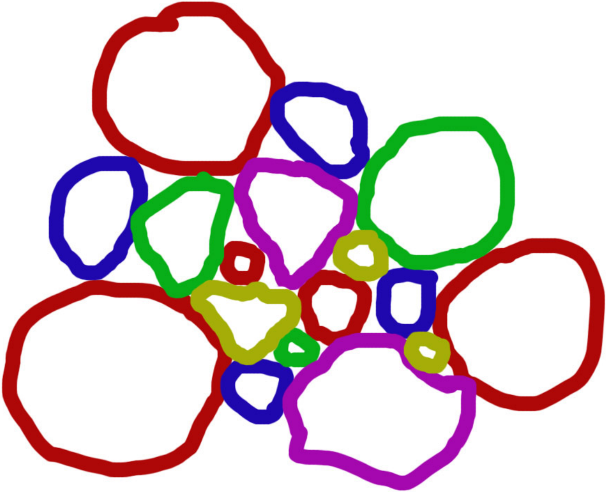


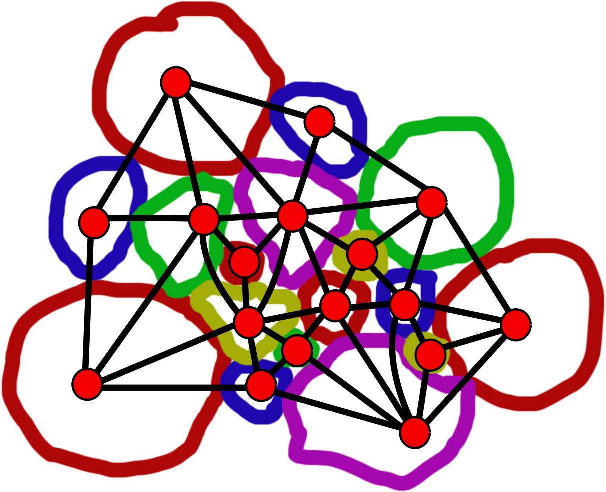

3
3
2
2
6
6
6
6
14
14
14
14
11
11
11
11
18
18
18
18
15
15

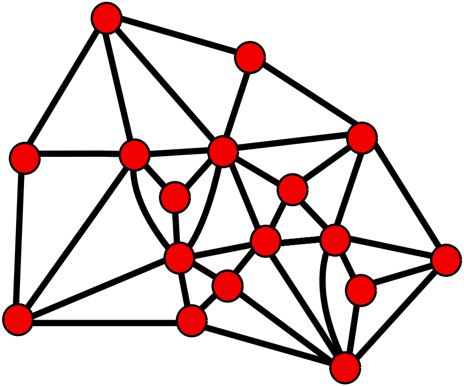


18
23
27
35
47
62
63
78
83
107
110
123
135
146
147
158
162
167
183
194
203
207
210
222
234
242
243

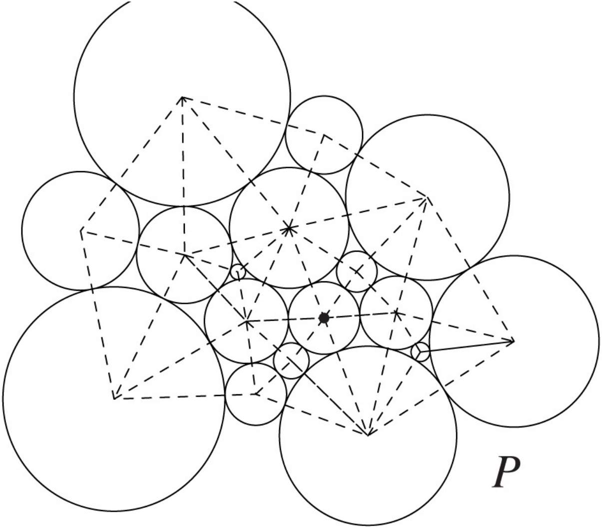
Le théorème de Koebe-Andreev-Thurston



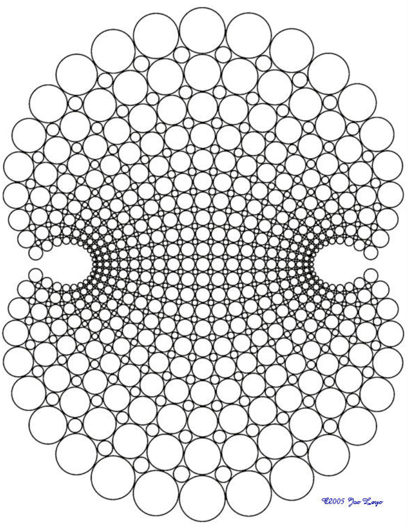


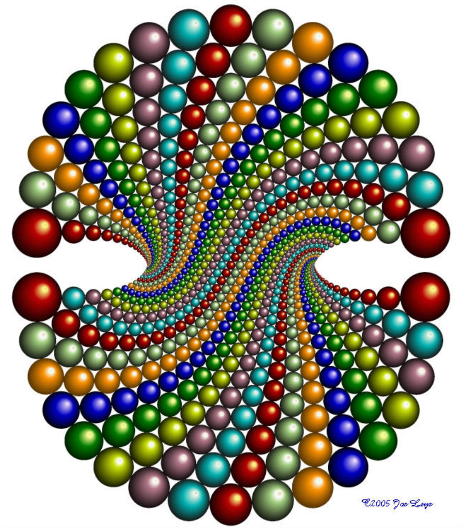


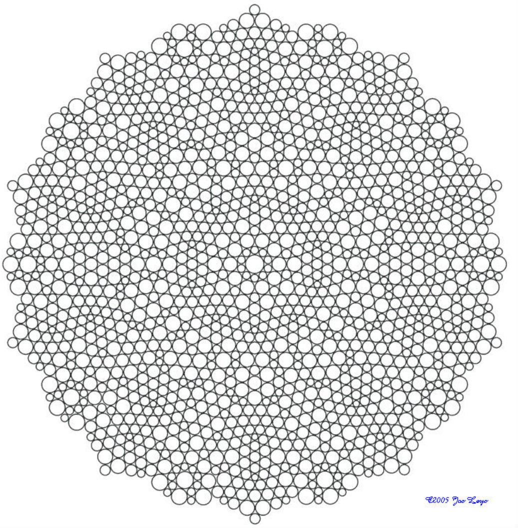
Le théorème de Koebe-Andreev-Thurston

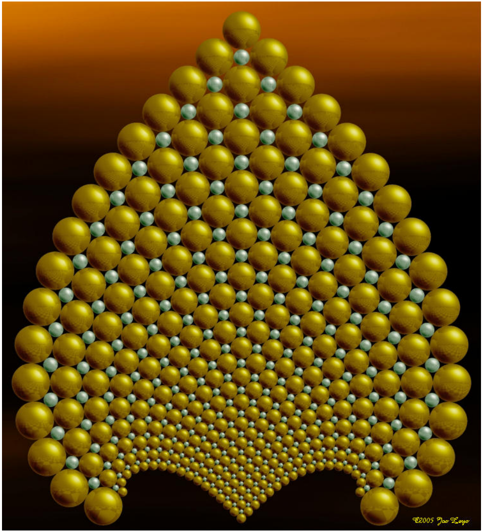


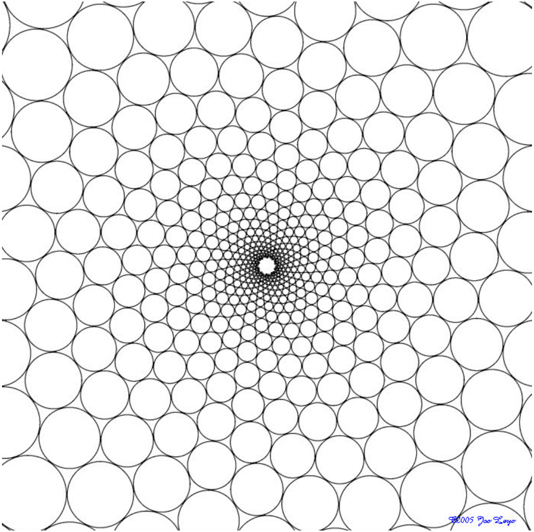
Ben Heine

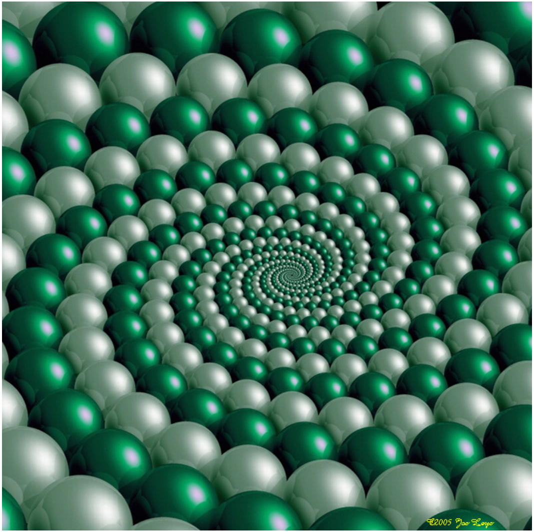

©2005 Joe Loyo

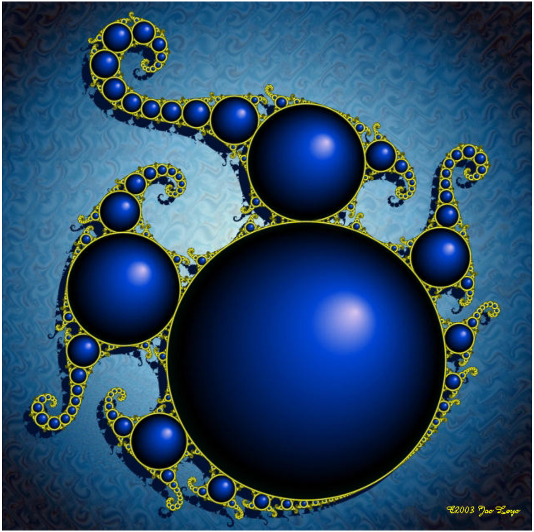

©2005 Jos Leys


©2005 Joe Loyo

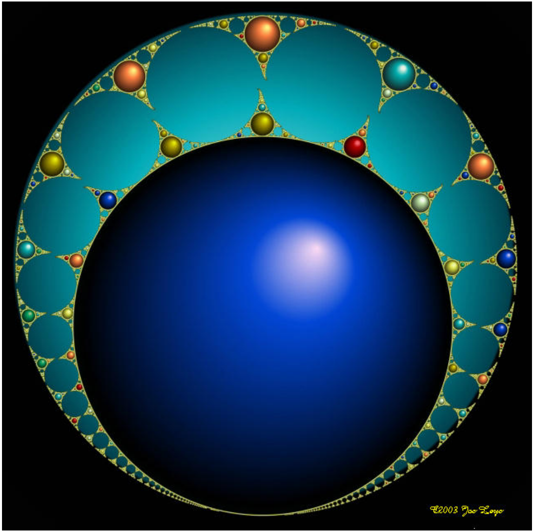

©2005 Jos Leys


©2005 Jos Leys


©2005 Joe Loyo

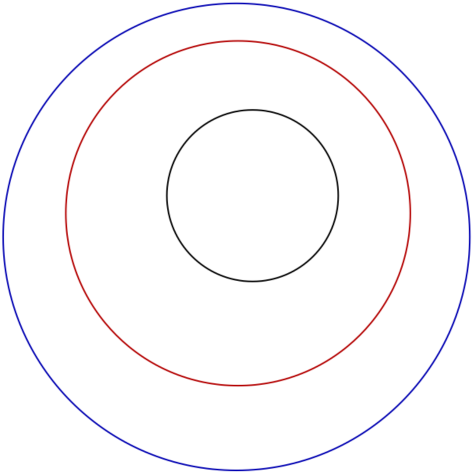

©2003 Joe Loyo


©2003 Joe Leys

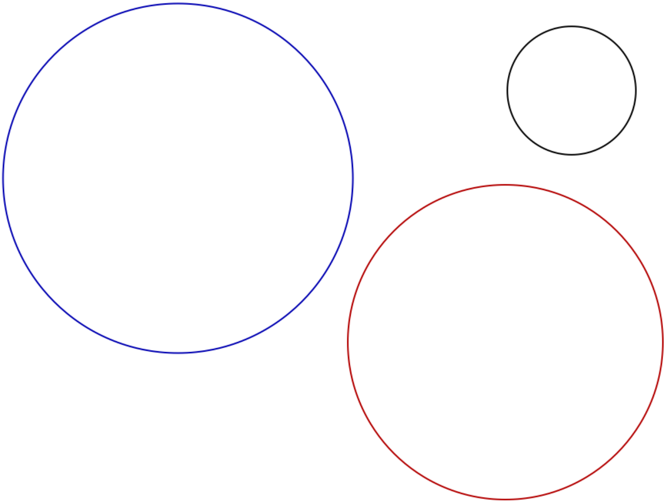

©2003 Joe Lope

On se donne trois cercles C_1, C_2, C_3 dans le plan.

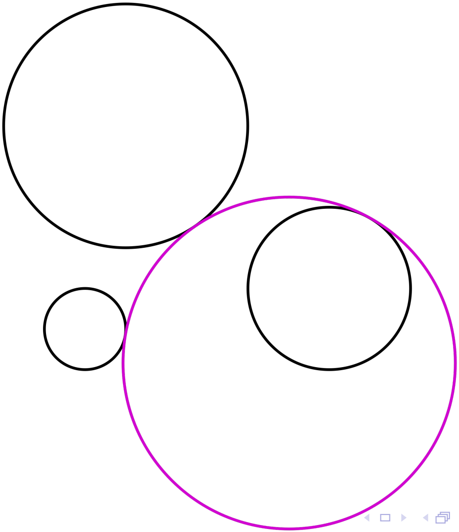
Combien peut-on construire de cercles qui sont tangents à C_1, C_2, C_3 ?



Le problème d'Appolonius



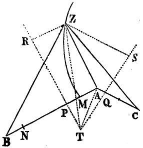
Il y a entre 0 et 8 cercles tangents à trois cercles donnés.



Le problème d'Appolonius. Solution de Newton (1689)

LEMMA XVI.

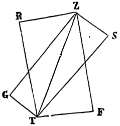
A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.



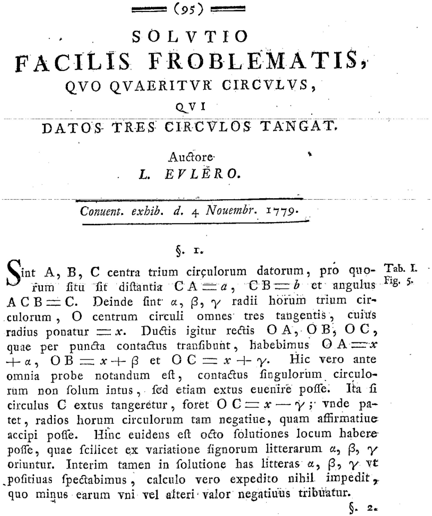
Cas. 1. Sunto puncta illa data A, B, C et punctum quartum Z, quod invenire oportet; ob datam differentiam linearum A Z, B Z, locabitur punctum Z in hyperbola cujus umbilici sunt A et B, et principalis axis differentia illa data. Sit axis ille M N. Cape P M ad M A ut est M N ad A B, et erecta P R perpendiculari ad A B, demissaque Z R perpendiculari ad P R; erit, (*) ex naturâ hujus hyperbolæ, Z R ad A Z ut est M N ad A B. Simili discursu punctum Z locabitur in aliâ hyperbolâ, cujus umbilici sunt A, C et principalis axis differentia inter A Z et C Z, ducique potest Q S ipsi A C perpendicularis, ad quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis Z S, hæc fuerit ad A Z ut est differentia inter A Z et C Z ad A C. Dantur ergo rationes ipsarum Z R et Z S ad A Z, et idcirco datur earundem Z R et Z S ratio ad invicem; ideoque si rectæ R P, S Q concurrant in T, et agantur T Z et T A, figura T R Z S dabitur specie, et recta T Z in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam recta T A, ut et angulus A T Z; et ob datas rationes ipsarum A Z ac (t) T Z ad Z S dabitur earundem ratio ad invicem; et inde dabitur triangulum A T Z, cujus vertex est punctum Z. Q. e. i.

• (*) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ Z R, ad A Z, ut est M N, ad A B, (298).

(t) 300. Et recta T Z, in quâ punctum Z, alicubi locatur, dabitur positione; ductis enim T F ad R T, et T G ad S T perpendicularibus, quæ sint in ratione datâ R Z ad Z S, agantur G Z, F Z, ipsis T S, R T parallelæ et se mutuò intersecantes in puncto aliquo Z, juncta T Z, habebit positionem quæsitam; patet enim perpendicula Z S, Z R, ex puncto Z, in rectas T S, T R, demissa, esse lineis T G, T F æqualia adeóque in datâ ratione.



Le problème d'Appolonius. Solution d'Euler (1779)


(95)

SOLVTIO

FACILIS FROBLEMATIS,

QVO QVAERITVR CIRCVLVS,

QVI

DATOS TRES CIRCVLOS TANGAT.

Auctore

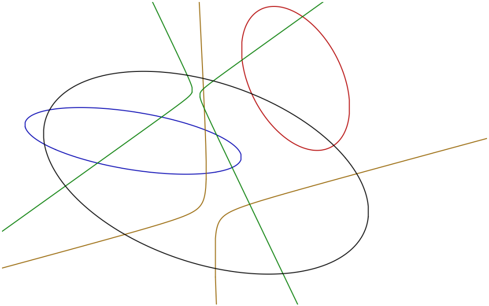
L. EVLERO.

Conuent. exhib. d. 4 Nouembr. 1779.

§. 1.

Sint A, B, C centra trium circulorum datorum, pro quorum situ sit distantia $CA = a$, $CB = b$ et angulus $ACB = C$. Deinde sint α, β, γ radii horum trium circulorum, O centrum circuli omnes tres tangentis, cuius radius ponatur $= x$. Ductis igitur rectis OA, OB, OC, quae per puncta contactus transibunt, habebimus $OA = x + \alpha$, $OB = x + \beta$ et $OC = x + \gamma$. Hic vero ante omnia probe notandum est, contactus singulorum circulorum non solum intus, sed etiam extus euenire posse. Ita si circulus C extus tangeretur, foret $OC = x - \gamma$; vnde patet, radios horum circulorum tam negatiue, quam affirmatiue accipi posse. Hinc euidens est octo solutiones locum habere posse, quae scilicet ex variatione signorum litterarum α, β, γ oriuntur. Interim tamen in solutione has litteras α, β, γ vt positiuas spectabimus, calculo vero expedito nihil impedit, quo minus earum vni vel alteri valor negatiuus tribuatur. Tab. I. Fig. 5.

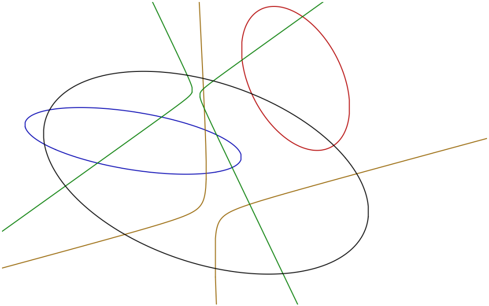
§. 2.



On se donne cinq ellipses C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

Combien peut-on construire de coniques (ellipses, hyperboles, paraboles) qui sont tangents à C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ?

Réponse : Entre 0 et 3264.



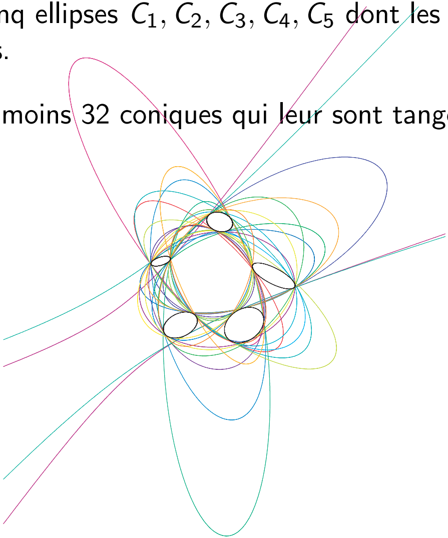
On se donne cinq ellipses C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

Combien peut-on construire de coniques (ellipses, hyperboles, paraboles) qui sont tangents à C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 ?
Réponse : Entre 0 et 3264.

Le théorème de Welschinger : la géométrie énumérative au 21 ème siècle

On se donne cinq ellipses C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 dont les intérieurs ne se rencontrent pas.

Alors, il y a au moins 32 coniques qui leur sont tangentes.



http ://images.math.cnrs.fr/

Images des mathématiques
La recherche mathématique en mots et en images

Page d'accueil
Présentation du site
Fonctionnement
Documentation
Plan du site
Recherche avancée
Liens
Identification
Imprimer cette page
Ours / Mentions légales
Syndication (RSS)
Nous contacter

À la une : La classification des textes

Le 28 mars 2011, par **Cyril Labbé** et **Dominique Labbé** — **Articles mathématiques** — **Piste bleue**

Comment identifier l'auteur d'un texte d'origine douteuse ou inconnue ? Dans la résolution de cette question, les statistiques appliquées tiennent une place importante, notamment via l'utilisation d'un outil : le calcul de « distance » entre les textes…

Participez à notre concours de bande dessinée !

Le 23 mars 2011, par **Véronique Bertrand**
Événements
2 réponses

Images des Mathématiques, en partenariat avec le magazine Tangente, organise le premier concours national de BD humoristique sur les mathématiques et les mathématiciens. Envoyez vos planches avant le 10 juin 2011. Les meilleures planches seront publiées sur notre site et dans Tangente. A gagner, des bons d'achat pour une valeur totale de 1600 euros.

2

Quelques articles récents

Les billets des habitués

Actualités

Quelques brèves :
31 mars 2011 - Un texte, un mathématicien
31 mars 2011 - Histoire des sciences & des techniques
Archives

Événements à venir :
MATh.en.JEANS s'éclate !
Archives

Revues de presse :
1er mars 2011
1er février 2011
Archives

Courrier des lecteurs :
10 février 2011 - Quatre remarques et une conclusion…
12 janvier 2011 - Ouvrir les esprits sur le vrai visage des maths
Archives

math.jacobs-university.de/summer.school