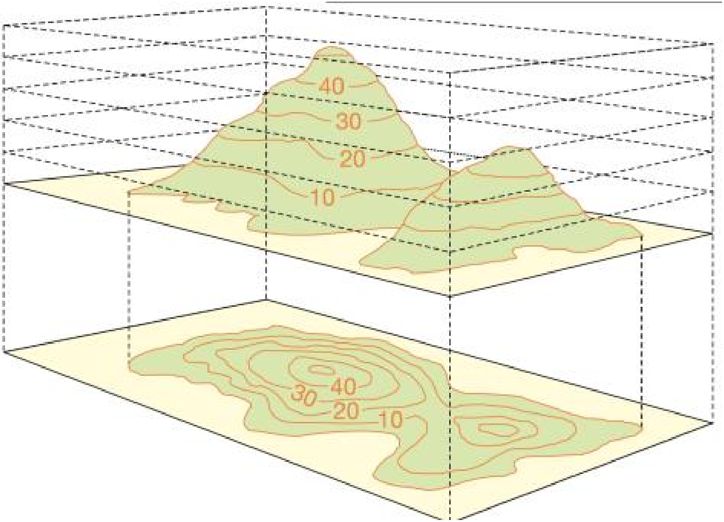
Une brève histoire de la géométrie des surfaces

Étienne Ghys
CNRS ÉNS Lyon

Académie des sciences, 7 avril 2015

Courbes

Lignes de niveau d'une surface, sections par des plans



canebrake13.com

Dürer projetant sur un plan (1532)

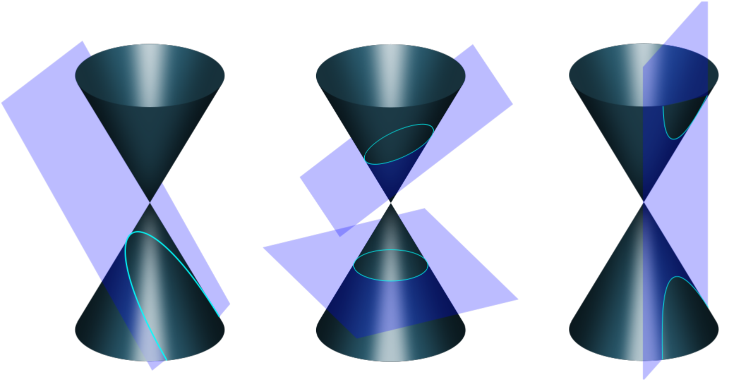
Le pli et la fronce

Jos Leys

Cercles et droites chez Euclide

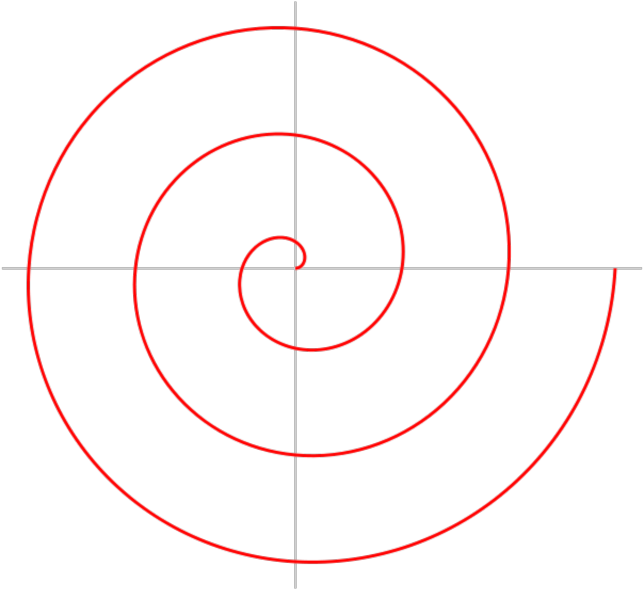
www.maa.org

Sections coniques, paraboles, ellipses et hyperboles



commons.wikimedia.org/

Spirale d'Archimède

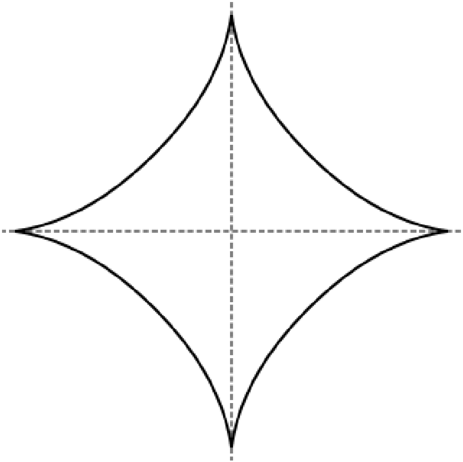


LA GEOMETRIE.
LIVRE SECOND.
De la nature des lignes courbes.

LEs anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problesmes de Geometrie, les vns sont plans, les autres solides, & les autres lineaires, c'est a dire, que les vns peuuent estre construits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent estre, qu'on n'y employe pour le moins quelque section conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'estonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué diuers degrés entre ces lignes plus composées, & ie ne sçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plutost que Geometriques. Car de dire que ç'ait esté, a cause qu'il est besoin de se seruir de quelque machine pour les descrire, il faudroit reietter par mesme raison les cercles & les lignes droites; vû qu'on ne les descrit sur le papier qu'auec vn compas, & vne reigle, qu'on peut aussy nommer des machines. Ce n'est pas non plus, a cause que les instrumens, qui seruent a les tracer, estant plus composés que la reigle & le compas, ne peuuent estre si iustes; car il faudroit pour cete raison les reietter des Mechaniques, où la iustesse des ouurages qui sortent de la main est desirée; plutost que de la Geometrie, ou c'est seulement la iustesse du raisonnemẽt qu'on recherche,

Quelles sont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

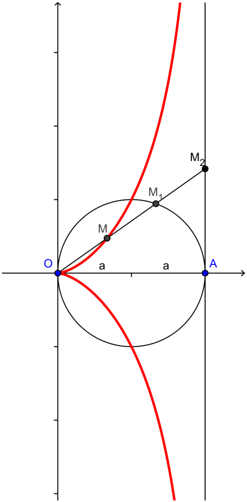
Astroïde



$$(x^2 + y^2 - 1)^3 + x^2y^2 = 0$$

commons.wikimedia.org

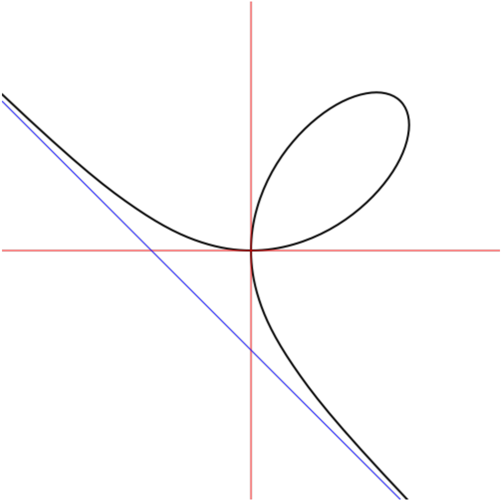
Cissoïde de Dioclès



$$x(x^2 + y^2) = y^2$$

commons.wikimedia.org

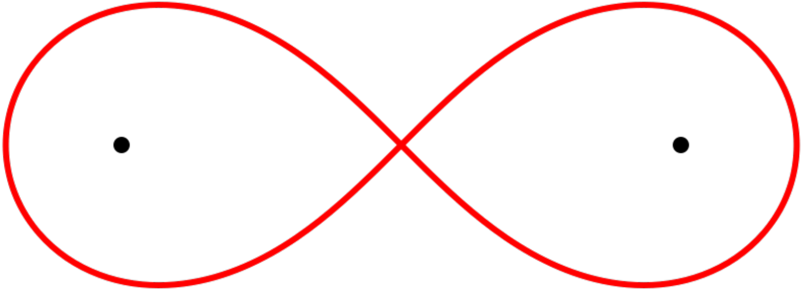
Folium



$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

commons.wikimedia.org

Lemniscate

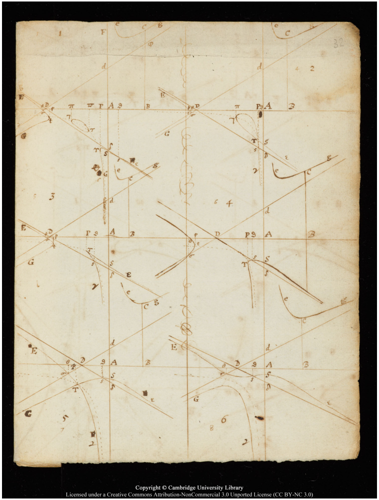


$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

commons.wikimedia.org

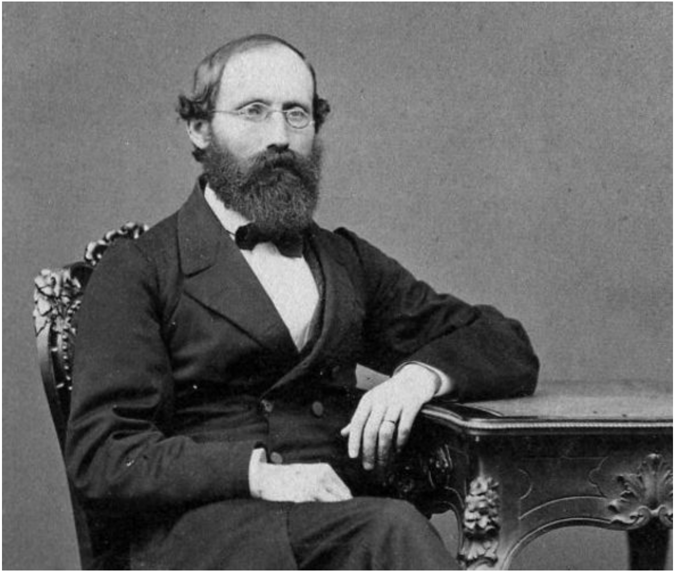
$$F(x, y) = 0$$

Newton, *Enumeratio Curvarum Trium Dimensionum*



cudl.lib.cam.ac.uk

Riemann (1826-1866)



Huygens, *Horologium Oscillatorum* 1673

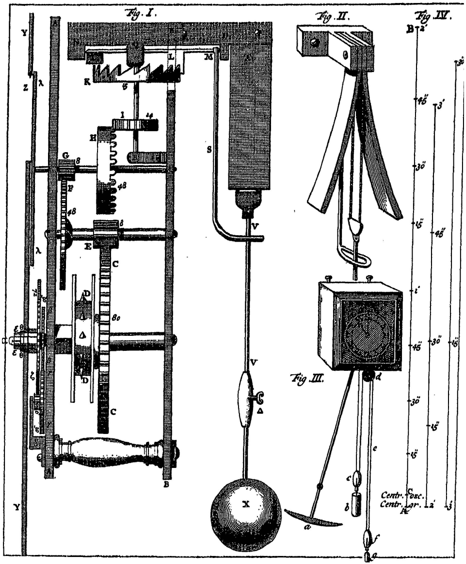
CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICÆ.

PARISIIS,
Apud F. MUGUET, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum, viâ Citharæ, ad insigne trium Regum.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

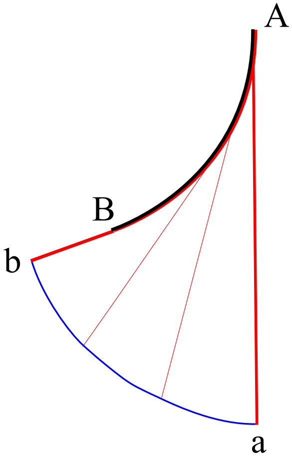
1667 : Les membres de l'Académie présentés à Louis XIV

1667 : Les membres de l'Académie présentés à Louis XIV

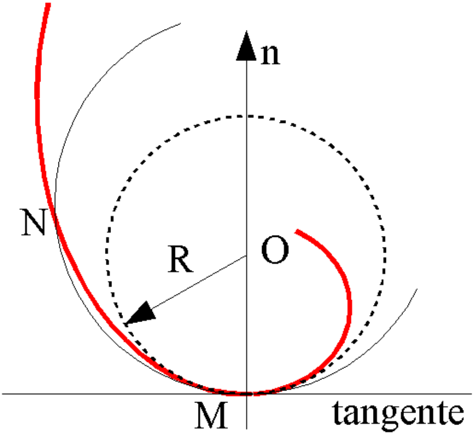
1667 : Horologium Oscillatorum



Cercle osculateur



Cercle osculateur



La courbure est l'inverse du rayon du cercle osculateur $k = 1/R$.

commons.wikimedia.org

Surfaces

Ellipsoïde

Degré 3

www.math.rug.nl

Degré 4

www.math.rug.nl

Cyclide de Dupin

Euler (1707-1783)

Les courbures principales (1767)

Jos Leys

Les courbures principales (1767)

Deux courbures principales : k_{max} et k_{min}.

Euler, surfaces développables, 1772

DE

SOLIDIS QVORVM

SVPERFICIEM IN PLANVM

EXPLICARE LICET.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Notiſſima eſt proprietas cylindri et coni, qua eorum ſuperficiem in planum explicare licet atque adeo haec proprietas ad omnia corpora cylindrica et conica extenditur, quorum baſes figuram habeant quamcunque; contra vero ſphaera hac proprietate deſtituitur, quum eius ſuperficies nullo modo in planum explicari neque ſuperficie plana obduci queat; ex quo naſcitur quaeſtio aeque curioſa ac notatu digna, vtrum praeter conos et cylindros alia quoque corporum genera exiſtant, quorum ſuperficiem itidem in planum explicare liceat nec ne? quam ob rem in hac diſſertatione ſequens conſiderare conſtitui Problema:

Inuenire aequationem generalem pro omnibus ſolidis, quorum ſuperficiem in planum explicare licet, cuius ſolutionem variis modis ſum agreſſurus.

Un cylindre

Surfaces développable

Les surfaces qui peuvent se développer sur un plan sont les cylindres, les cônes, et les surfaces balayées les tangentes à une courbe dans l'espace.

Surface développable (A. Pevsner)

www.guggenheim-venice.it

Gauss (1777-1855)

Theorema egregium

Définition : *Une surface se déforme isométriquement si les courbes tracées sur la surface conservent une longueur constante.*

Théorème : La *mesure de courbure* $k_{max}k_{min}$ ne change pas lorsqu'on déforme isométriquement une surface.

Déformations isométriques

Alexander M. Bronstein, Michael M. Bronstein, Ron Kimmel

Déformations non isométriques

Alexander M. Bronstein, Michael M. Bronstein, Ron Kimmel

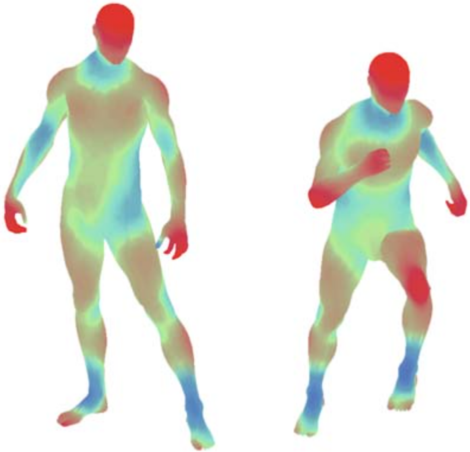
Theorema egregium

Surface développable (A. Pevsner)

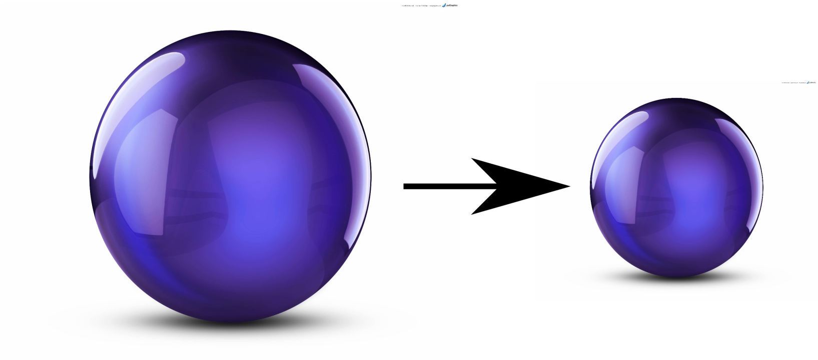
www.guggenheim-venice.it

Theorema egregium

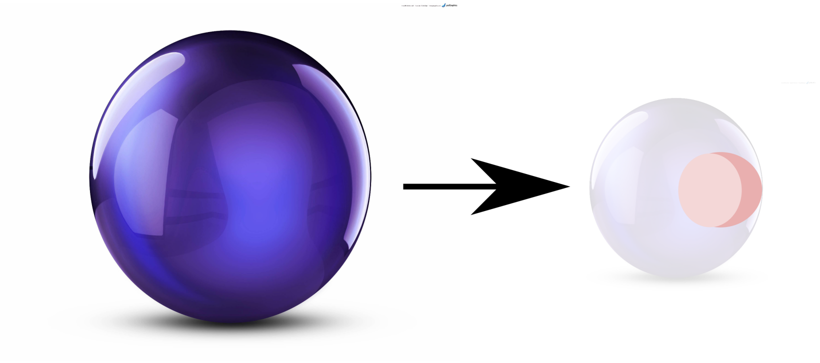
Une déformation (à peu près) isométrique.



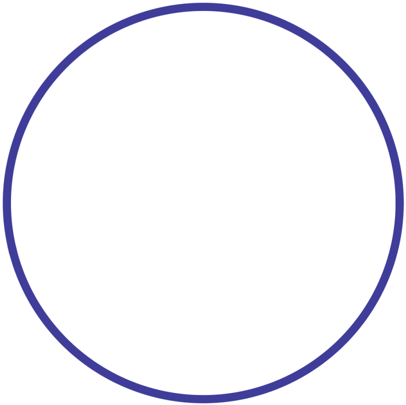
Impossibilité de mettre une grande sphère dans une petite



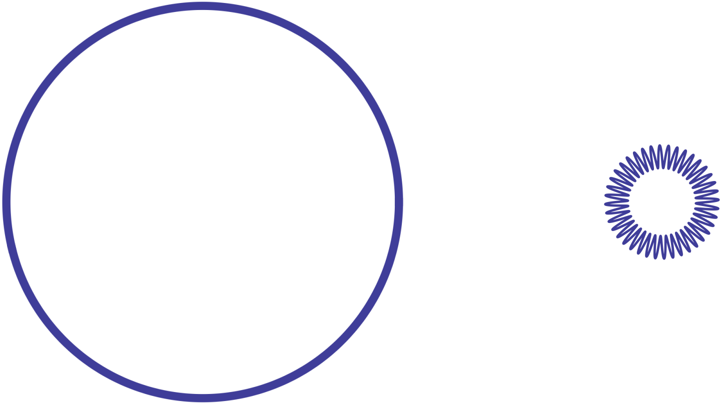
Impossibilité de mettre une grande sphère dans une petite



Un grand cercle dans un petit ?



Un grand cercle dans un petit



La révolution riemannienne 1854

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

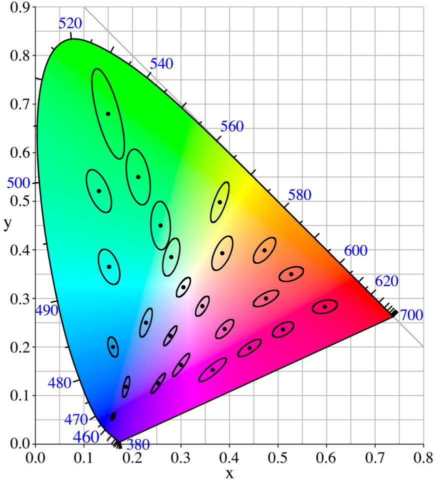
B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1]).

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

La surface des couleurs



commons.wikimedia.org

La surface des couleurs

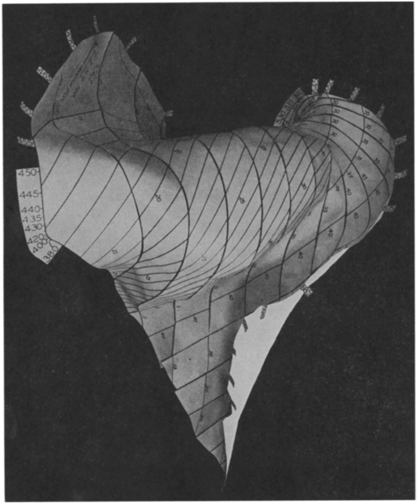


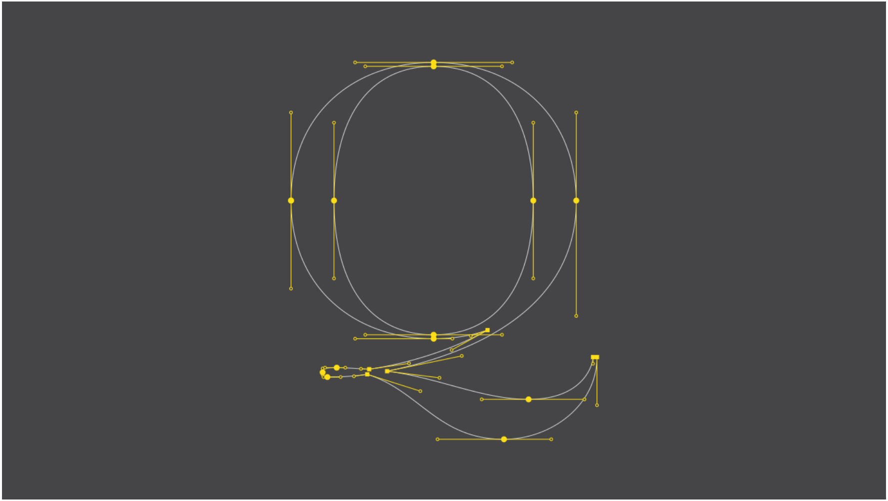
FIG. 5. Photograph of paper model of uniform chromaticity-scale surface derived from data represented in Fig. 3. Standard ICI coordinates (x, y) are represented by numbered network on surface. Wave lengths along spectrum locus are indicated along the boundary of the surface.

MacAdam 1943

Lisses ? rugueuses ?
Problèmes de régularité

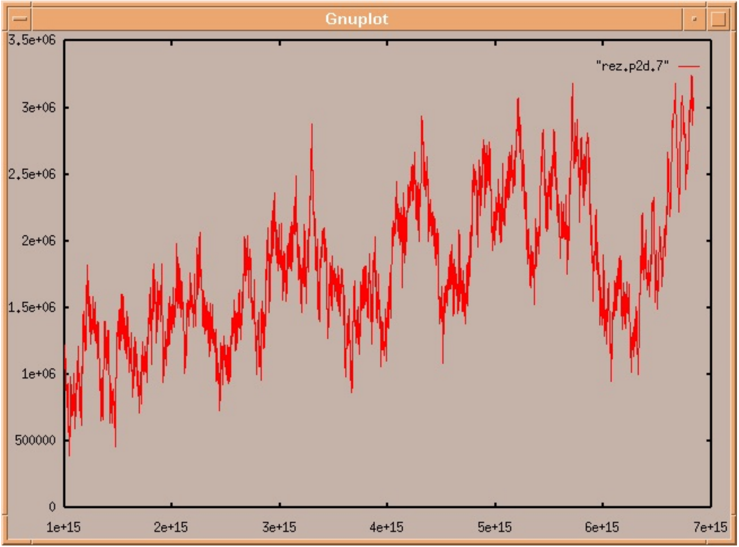
Courbes d'aujourd'hui

Dessin vectoriel sur ordinateur



Les cours de la bourse

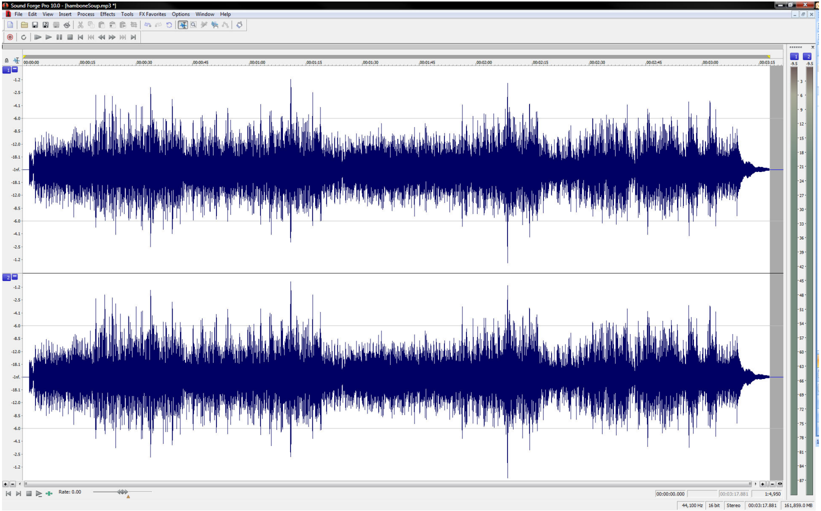
Une courbe reliée aux nombres de nombres premiers $\leq x$



Une côte irrégulière

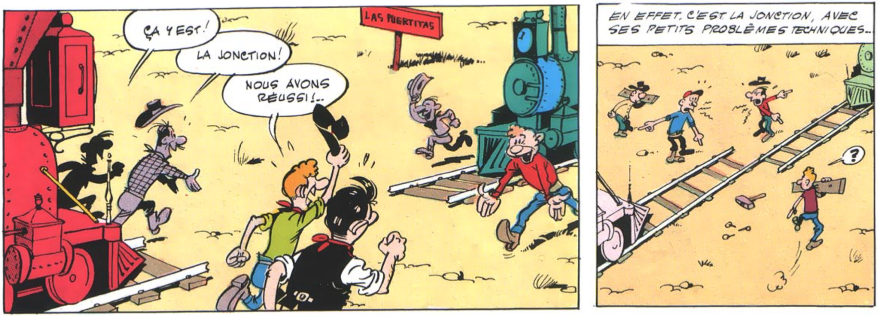
farm5.staticflickr.com

Une enregistrement audio



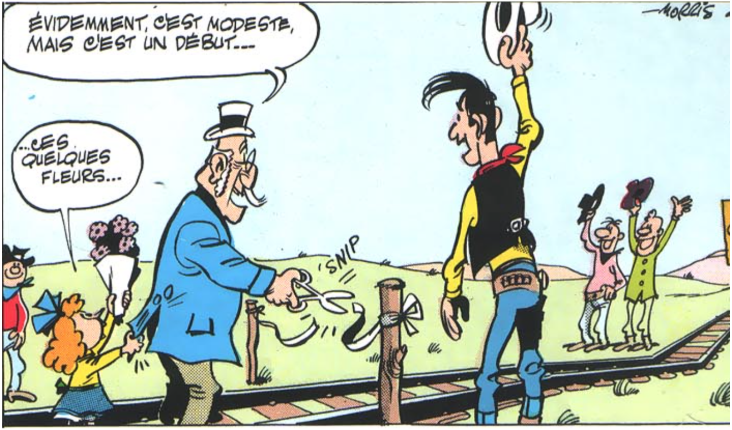
Régularité des courbes

Une courbe discontinue



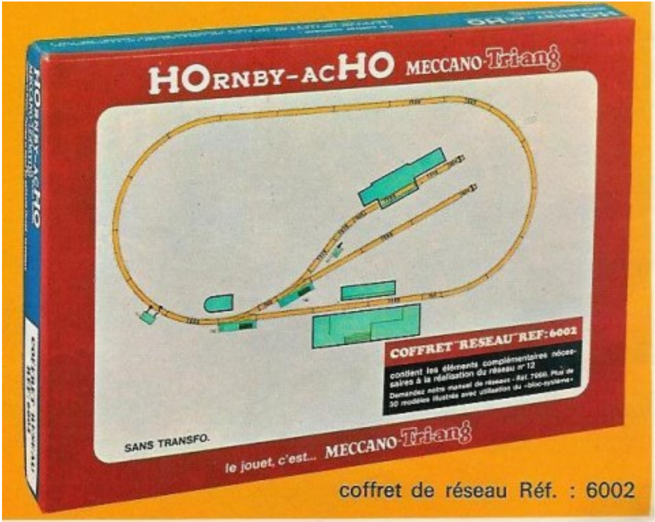
Des rails sur la prairie, Lucky Luke, Morris et Goscinny

Une courbe continue mais sans tangente, C^0 mais pas C^1

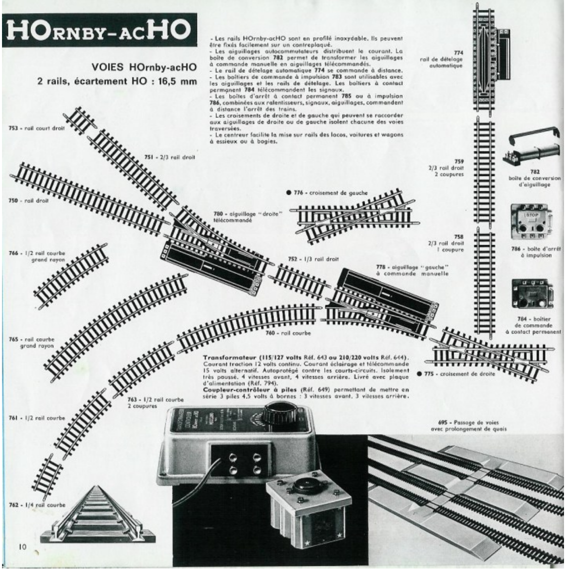


Des rails sur la prairie, Lucky Luke, Morris et Goscinny

Mon cadeau de Noël en 1966 !

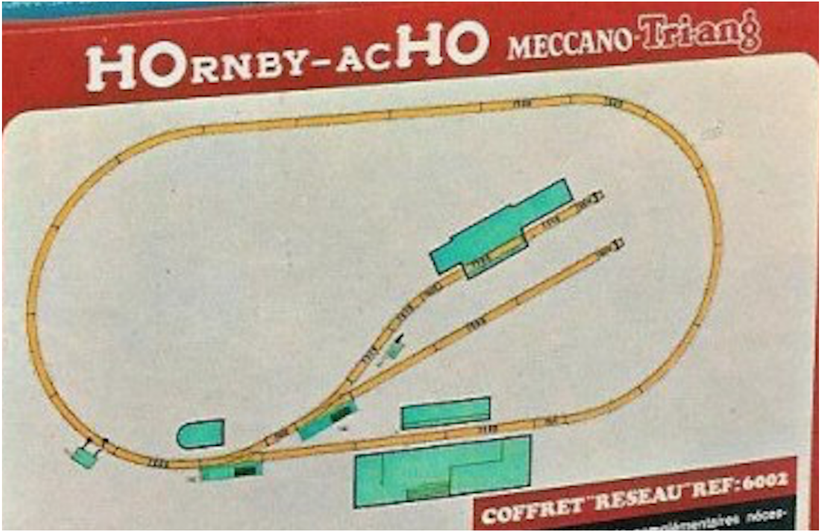


Des rails rectilignes ou circulaires : C^1 mais pas de classe C^2.



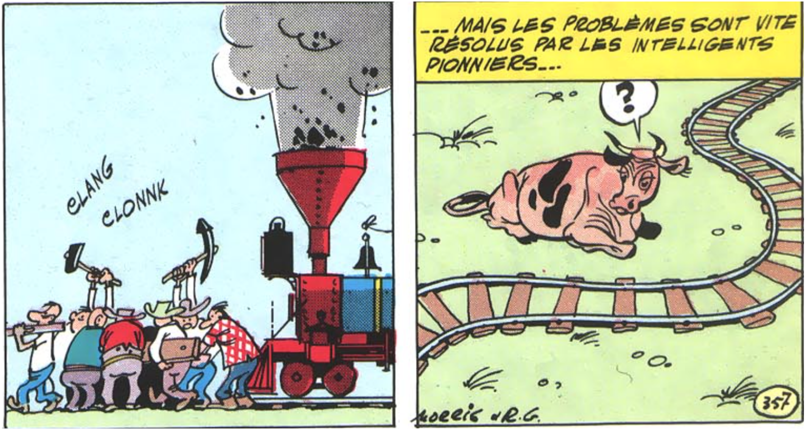
trainsdefrancois.free.fr

Une courbe C^1 mais pas C^2.



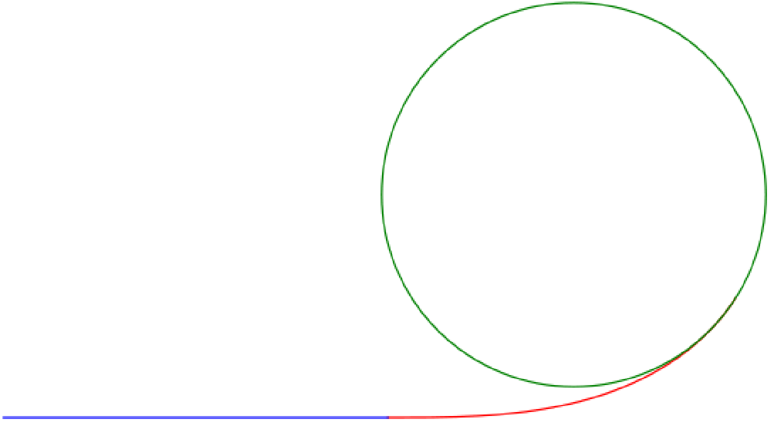
trainsdefrancois.free.fr

Une courbe C^1 mais pas C^2.

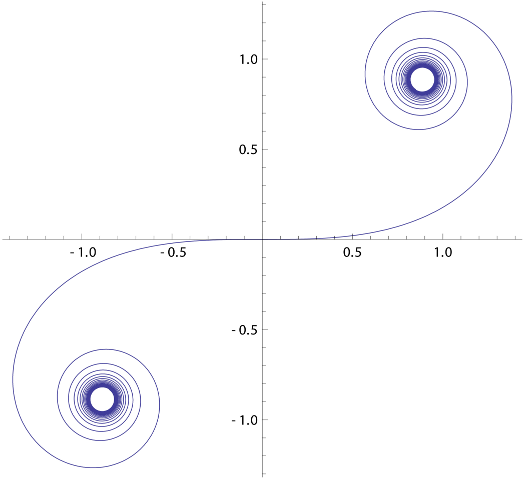


Des rails sur la prairie, Lucky Luke, Morris et Goscinny

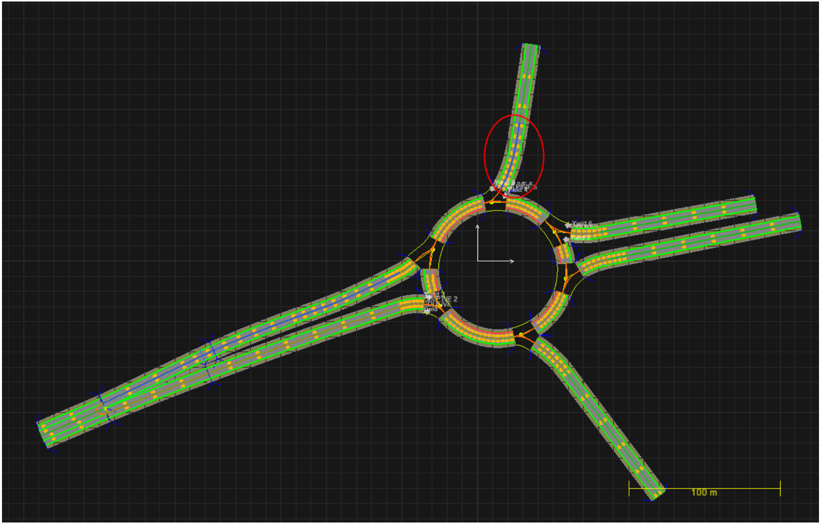
La clothoïde rend les rails de classe C^2.



La clothoïde, spirale de Cornu, spirale d'Euler

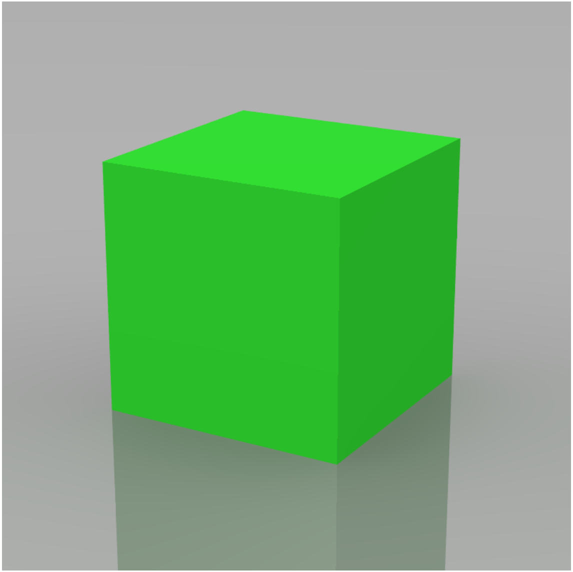


La clothoïde rend les accès aux autoroutes de classe C^2.

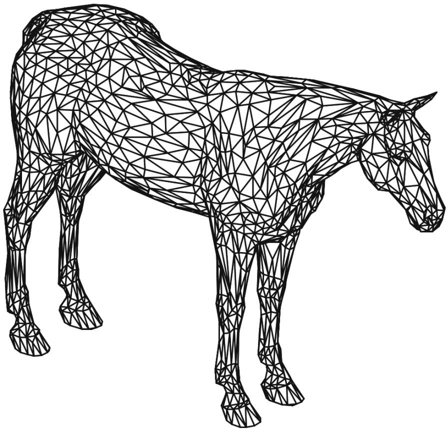


Régularité des surfaces

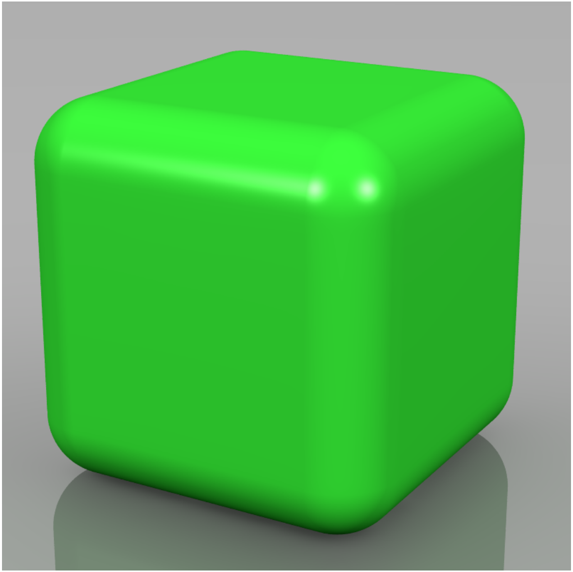
Un cube est une surface C^0 mais pas C^1.



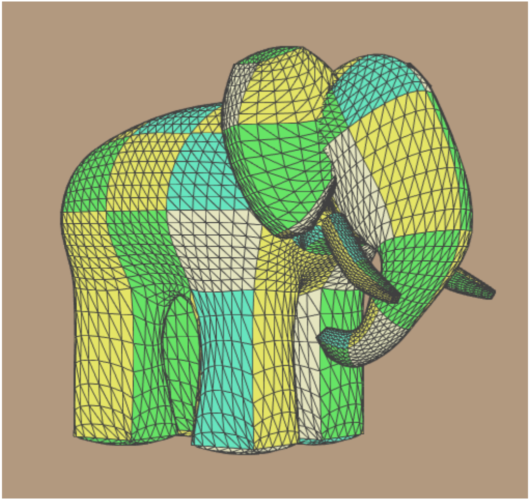
Ce cheval triangulé numériquement est C^0 mais pas C^1.



Une surface C^1 mais pas C^2



Cet éléphant est de classe C^1.



Lebesgue (1875-1941)

Le mouchoir de Lebesgue 1899

Papier froissé

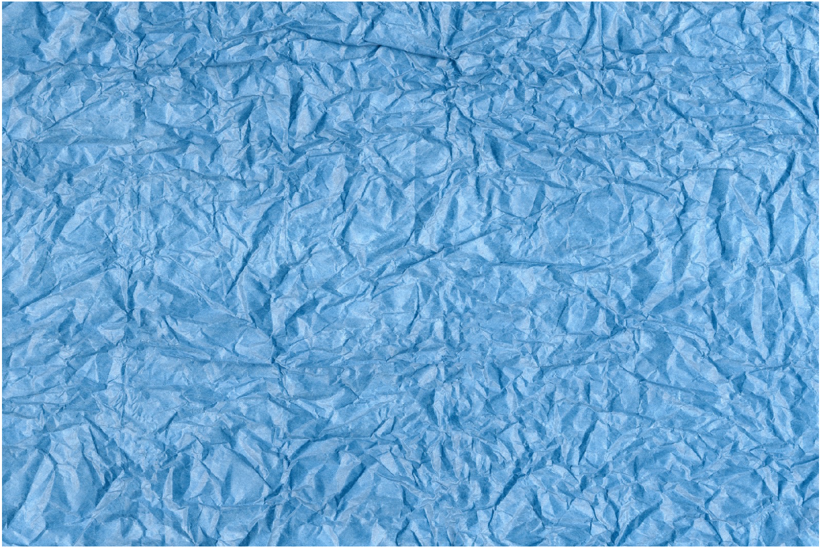
fc02.deviantart.net

En 1899, j'avais remis à M. Picard une Note [**42**] (¹) sur les surfaces non réglées applicables sur le plan; Hermite voulut un instant s'opposer à son insertion dans les *Comptes Rendus* de l'Académie ; M. Picard dut défendre ma Note. On sait combien, cependant, Hermite était bienveillant et prodigue d'éloges, mais c'était à peu près l'époque où il écrivait à Stieltjès : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées », et il aurait voulu voir exclues du domaine des mathématiques toutes les recherches où ces horrifiques fonctions intervenaient. Or, dans ma Note, je considérais des fonctions qui n'avaient pas, nécessairement une dérivée. Pour beaucoup de mathématiciens, je devins l'homme des fonctions sans dérivée, encore que, à aucun moment, je ne me sois

Ce paysage est C^0 (jeu vidéo Skyrim)

Ce légume est-il une surface ?

Papier froissé C^0



freestock.ca