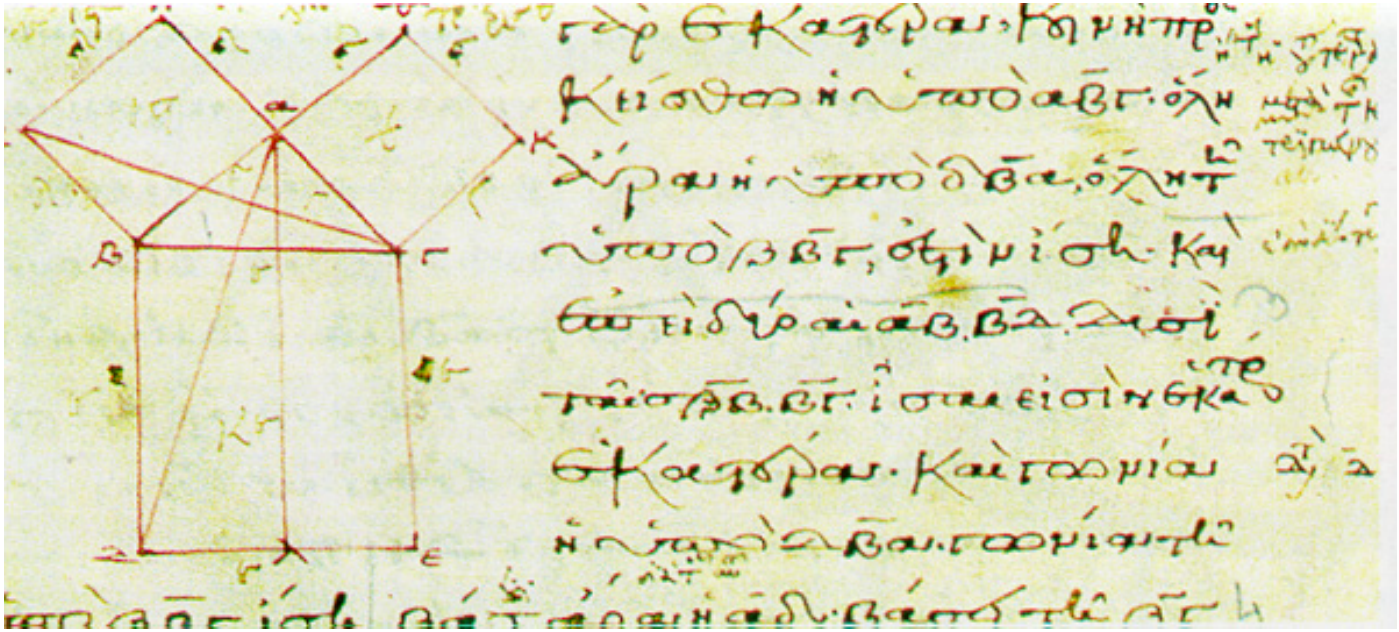
Les images en mathématiques



Étienne Ghys

CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

Conférence "Qu'est-ce que la recherche en mathématiques aujourd'hui" Maubeuge Mars 2008

Littré

Définition :

- Représentation perceptible d'un être ou d'une chose.
- Ce qui imite, ressemble.
- Représentation des objets dans l'esprit, dans l'âme.
  Représentation des personnes dans l'esprit, dans le souvenir.
- Idée.

Littré

Définition :

- Représentation perceptible d'un être ou d'une chose.
- Ce qui imite, ressemble.
- Représentation des objets dans l'esprit, dans l'âme.
  Représentation des personnes dans l'esprit, dans le souvenir.
- Idée.

Littré

Définition :

- Représentation perceptible d'un être ou d'une chose.
- Ce qui imite, ressemble.
- Représentation des objets dans l'esprit, dans l'âme.
  Représentation des personnes dans l'esprit, dans le souvenir.
- Idée.

Littré

Définition :

- Représentation perceptible d'un être ou d'une chose.
- Ce qui imite, ressemble.
- Représentation des objets dans l'esprit, dans l'âme.
  Représentation des personnes dans l'esprit, dans le souvenir.
- Idée.

Littré

Définition :

- Représentation perceptible d'un être ou d'une chose.
- Ce qui imite, ressemble.
- Représentation des objets dans l'esprit, dans l'âme.
  Représentation des personnes dans l'esprit, dans le souvenir.
- Idée.

Classification :

- Image fonctionnelle.
  - Pédagogique : apprendre.
  - Publicitaire : convaincre.
  - Journalistique : informer.
- Poétique : modifie la réalité.
- ... Image mentale

Classification :

- Image fonctionnelle. *Images conçues selon un mode conscient dans le but de communiquer une information.*
  - Pédagogique : apprendre.
  - Publicitaire : convaincre.
  - Journalistique : informer.
- Poétique : modifie la réalité.
- ... Image mentale

Classification :

- Image fonctionnelle. *Images conçues selon un mode conscient dans le but de communiquer une information.*
  - Pédagogique : apprendre.
  - Publicitaire : convaincre.
  - Journalistique : informer.
- Poétique : modifie la réalité.
- ... Image mentale

Classification :

- Image fonctionnelle. *Images conçues selon un mode conscient dans le but de communiquer une information.*
  - Pédagogique : apprendre.
  - Publicitaire : convaincre.
  - Journalistique : informer.
- Poétique : modifie la réalité.
- ... Image mentale

Classification :

- Image fonctionnelle. *Images conçues selon un mode conscient dans le but de communiquer une information.*
  - Pédagogique : apprendre.
  - Publicitaire : convaincre.
  - Journalistique : informer.
- Poétique : modifie la réalité.
- ... Image mentale

Classification :

- Image fonctionnelle. *Images conçues selon un mode conscient dans le but de communiquer une information.*
  - Pédagogique : apprendre.
  - Publicitaire : convaincre.
  - Journalistique : informer.
- Poétique : modifie la réalité.
- ... Image mentale

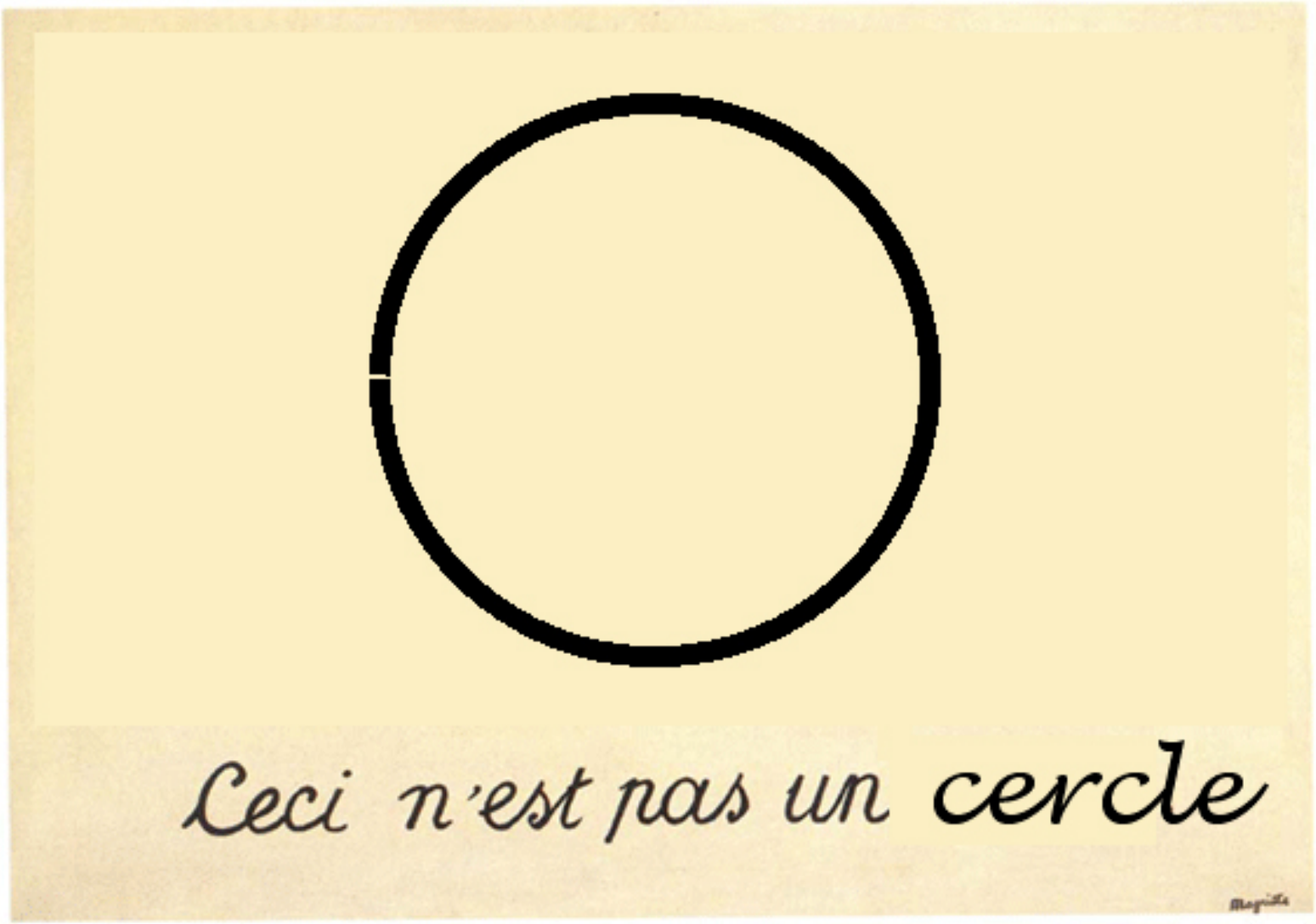
Classification :

- Image fonctionnelle. *Images conçues selon un mode conscient dans le but de communiquer une information.*
  - Pédagogique : apprendre.
  - Publicitaire : convaincre.
  - Journalistique : informer.
- Poétique : modifie la réalité.
- ... Image mentale

Représenter des “êtres mathématiques” ?

Représenter des “êtres mathématiques” ?

Représenter des “êtres mathématiques” ?



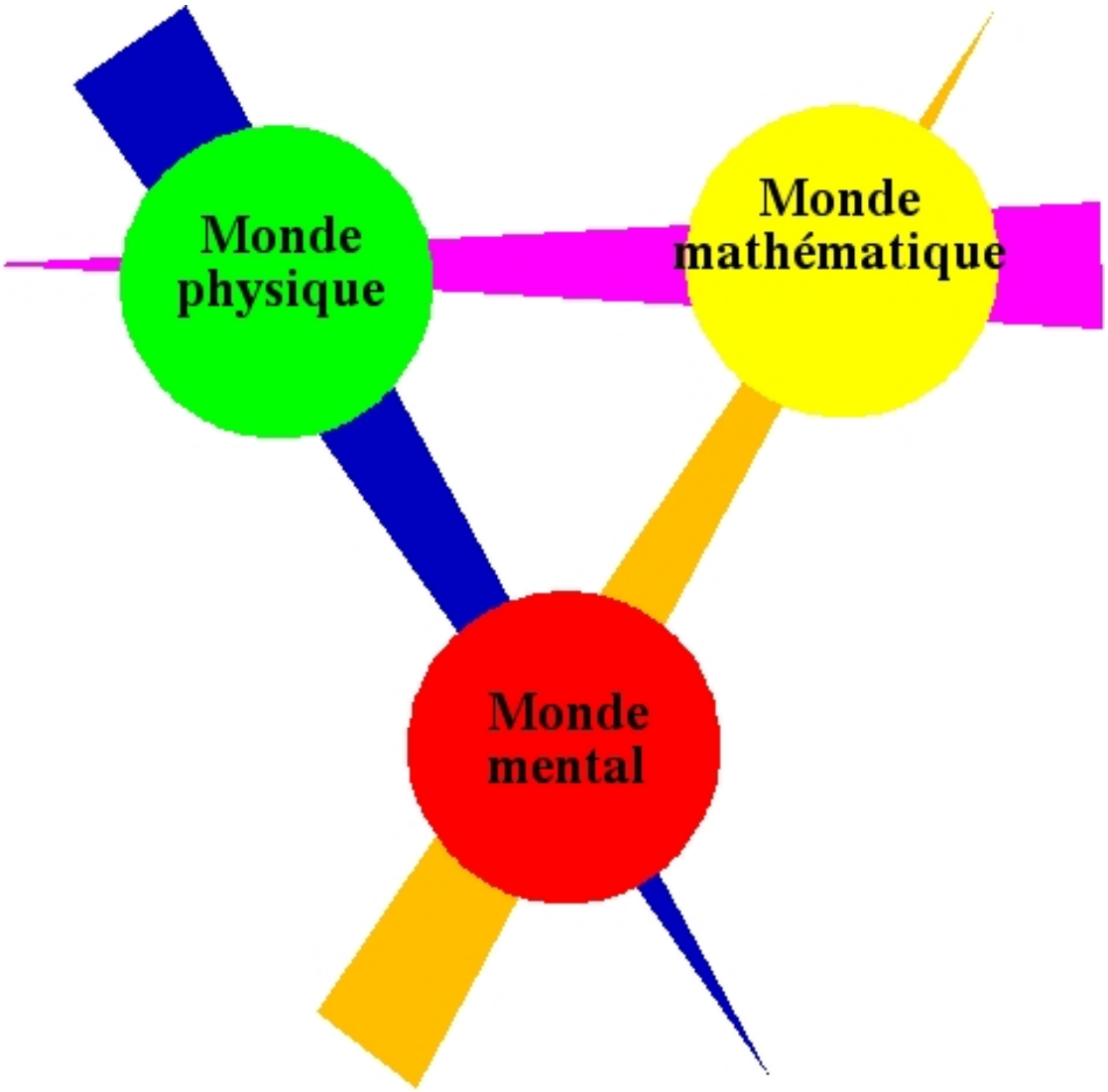
Des êtres mathématiques

Des êtres mathématiques

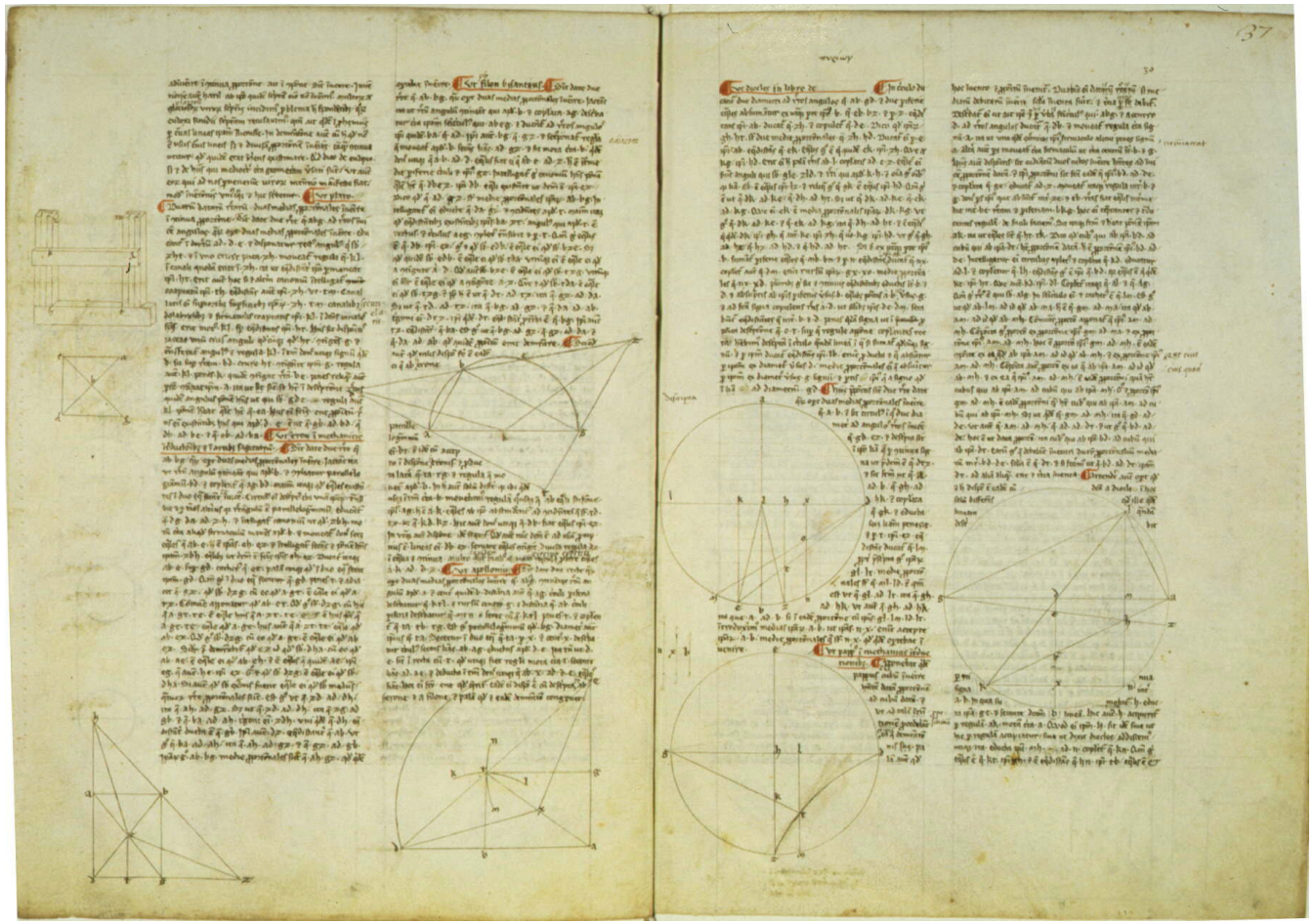
Le monde des idées de Platon et les mathématiques ?

David Nightingale

Des êtres mathématiques



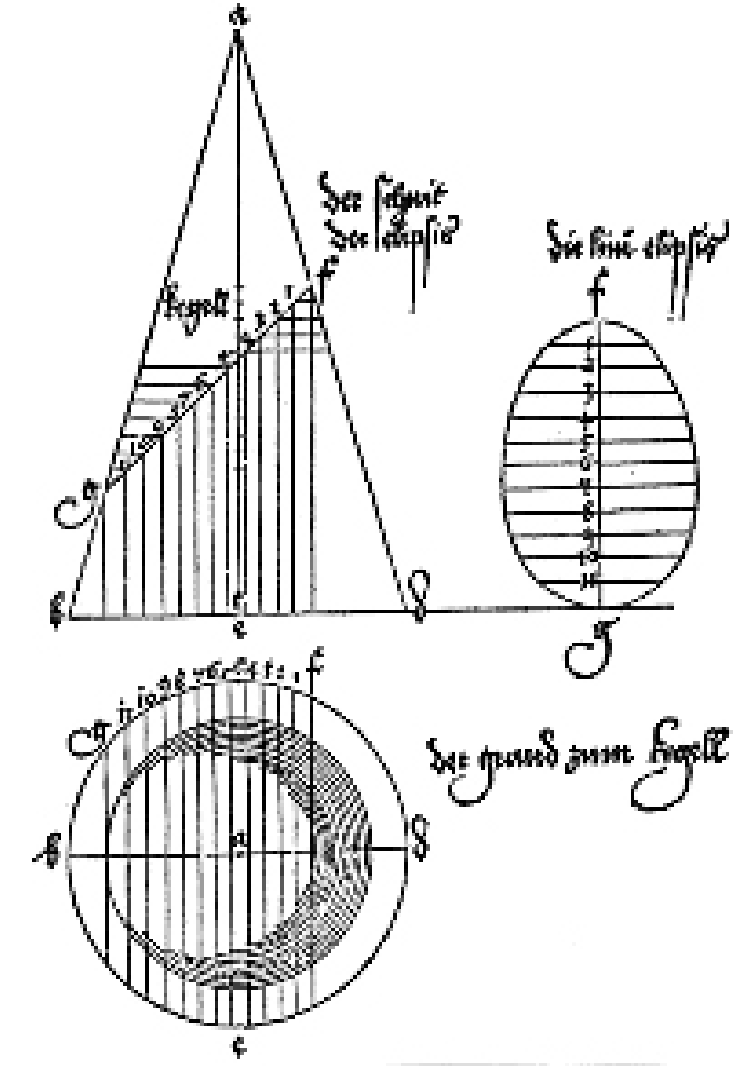
Les images mathématiques dans l'histoire



Époque ancienne :

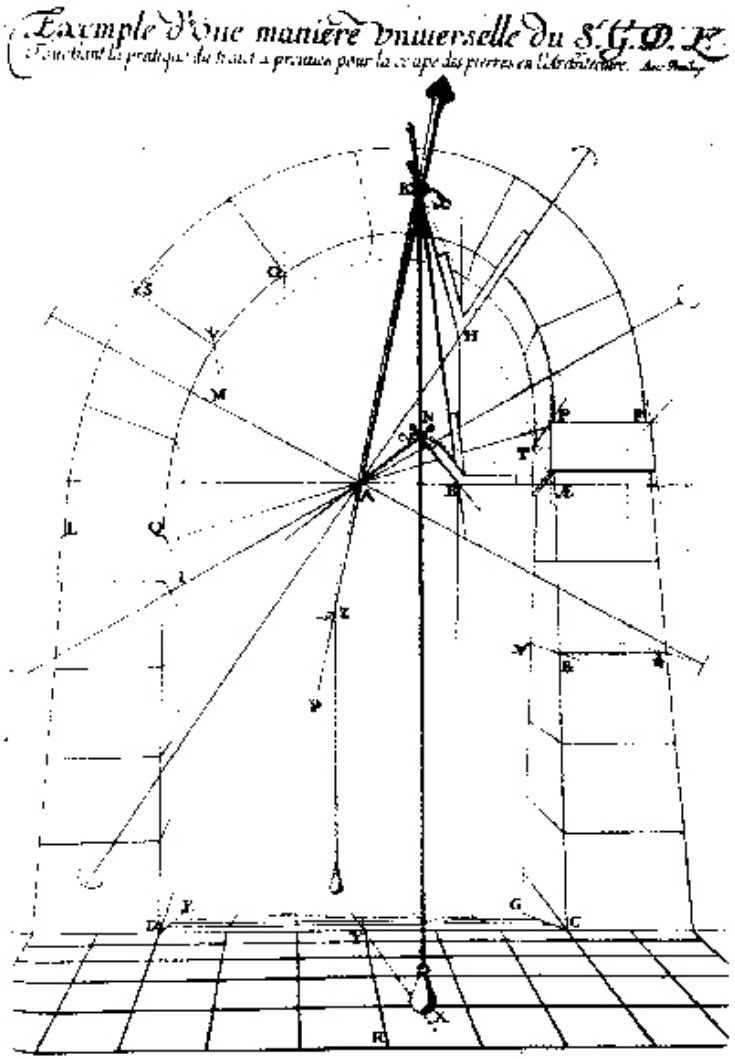
Différence explicite entre l'objet géométrique et l'objet matériel qui le représente.

Les images mathématiques dans l'histoire



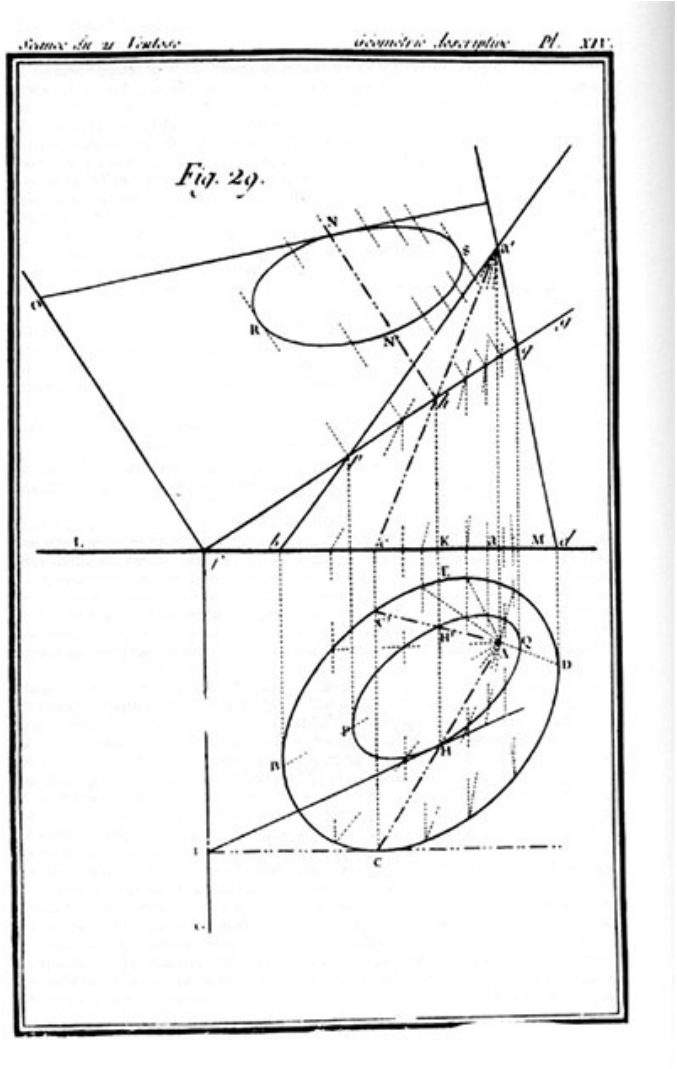
Dürer (1471–1528)

Les images mathématiques dans l'histoire



Desargues (1591–1661)

Les images mathématiques dans l'histoire



Monge (1746-1818)

Les images mathématiques dans l'histoire

Dix-neuvième siècle : Moins d'images, spécialement en France...

Lagrange (1736–1813)

Le lecteur ne trouvera pas d'illustrations dans cet ouvrage. Les méthodes que je propose ne nécessitent pas de constructions ou de raisonnement mécanique ou géométrique, mais seulement des opérations algébriques assujetties à une règle de procédure régulière et uniforme.

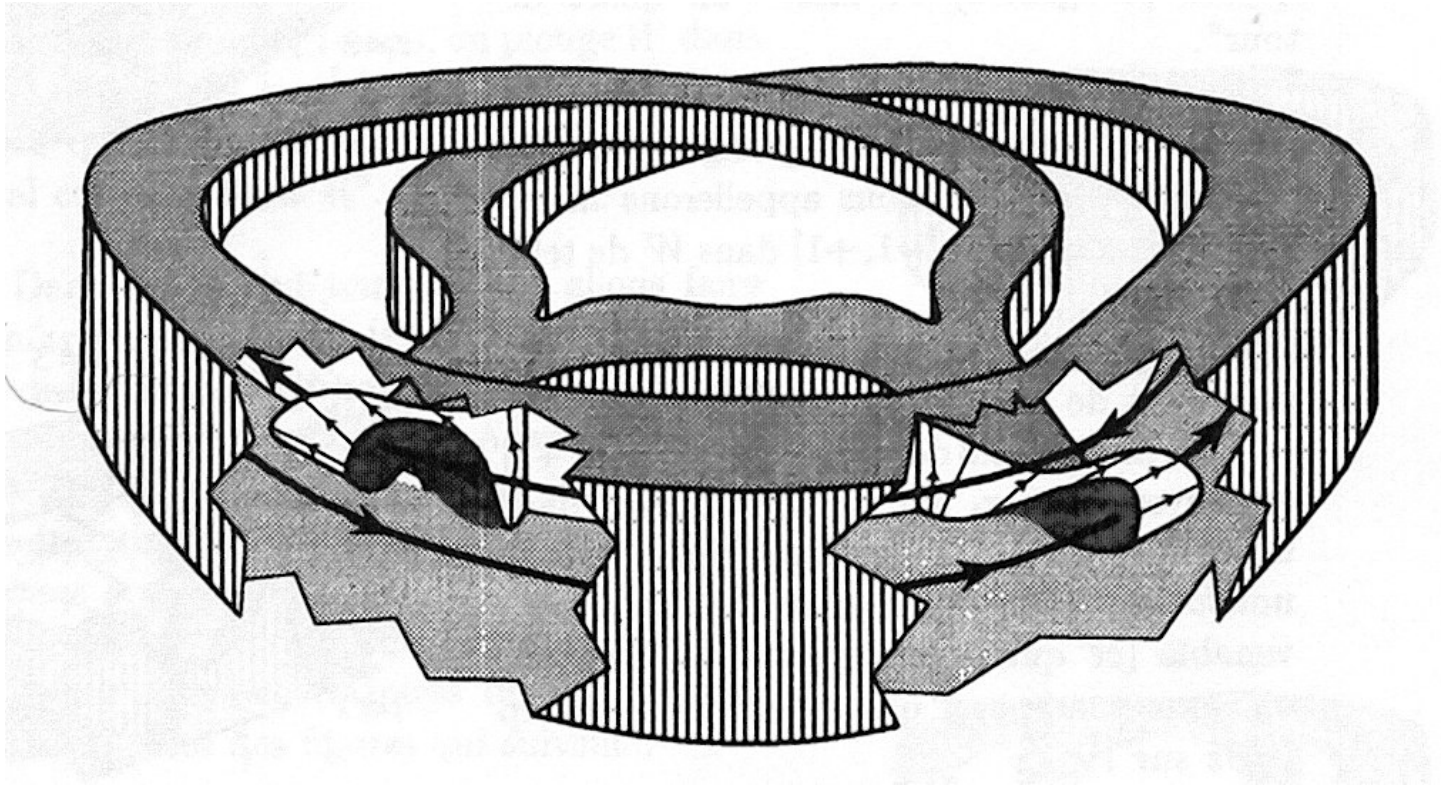
Les images mathématiques dans l'histoire

Vingtième siècle : Encore moins d'images...

C'est ainsi qu'il serait désirable de libérer l'élève dès que possible de la camisole de force des "figures" traditionnelles, en en parlant le moins possible, au profit de l'idée de transformation géométrique du plan et de l'espace tout entiers... (J. Dieudonné).

Les images mathématiques dans l'histoire

Les images mathématiques dans l'histoire



Les images mathématiques dans l'histoire

École allemande, fin dix-neuvième.

Les images mathématiques dans l'histoire

Introduction de Hilbert :

À de nouveaux concepts, il faut associer de nouveaux signes. Nous devons les choisir de telle sorte qu'ils nous rappellent les phénomènes qui ont formé ces concepts. Les figures sont des signes qui nous rappellent l'intuition spatiale, utilisés dans ce but par les mathématiciens. Qui n'utilise pas en simultané avec l'inégalité $a < b < c$ *l'image de trois points qui se suivent sur la droite ? Qui n'utilise pas le dessin de segments ou de rectangles emboîtés lorsqu'il s'agit de démontrer rigoureusement la continuité d'une fonction ou l'existence d'un point d'accumulation ? Qui pourrait se passer d'un triangle, d'un cercle et de son centre, ou de trois axes orthogonaux ? Ou qui abandonnerait la représentation d'un champ de vecteurs, ou la figure d'une famille de courbes et de son enveloppe, qui sont si importants dans la théorie des équations différentielles, dans les fondements du calcul des variations ou dans toutes les autres parties des mathématiques ?*

Les images mathématiques dans l'histoire

Introduction de Hilbert :

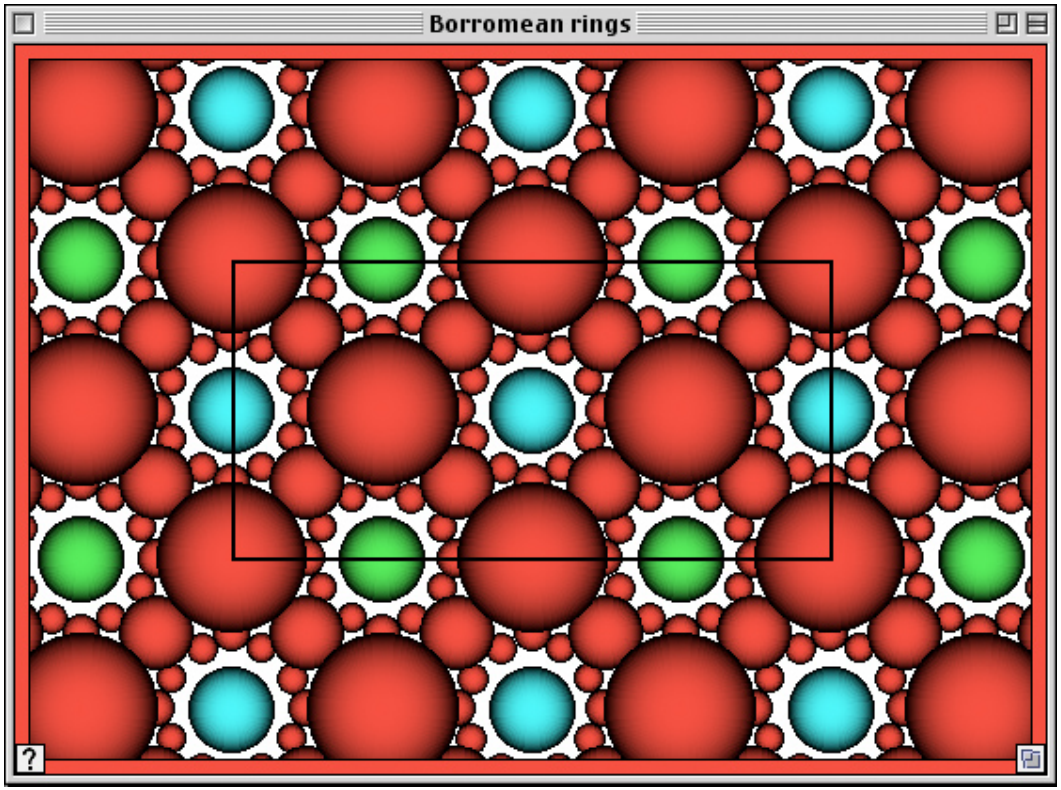
Les symboles arithmétiques sont des diagrammes écrits et les figures géométriques sont des formules graphiques. Aucun mathématicien ne pourrait se passer de l'utilisation de ces formules graphiques, pas plus que de l'usage des parenthèses ou d'autres signes dans les formules.
L'utilisation des signes géométriques comme outils de preuves rigoureuses présuppose la connaissance et la maîtrise des axiomes qui sont sous-jacents à ces figures. Pour pouvoir incorporer ces figures géométriques dans le trésor des signes mathématiques, il est nécessaire de commencer par une analyse rigoureuse de leur contenu conceptuel. De la même manière que lorsqu'on ajoute deux nombres, on doit placer les chiffres correctement, l'utilisation et la combinaison des figures géométriques doit être régie par des règles précises. . .

Les images mathématiques dans l'histoire

Depuis "peu" : Retour des images...

Les images mathématiques dans l'histoire

Depuis "peu" : Retour des images...
W. Thurston, The geometry center
Snapea, AMS Feature column



Activités mathématiques diverses — Images diverses

- Chercher
- Enseigner
- Montrer

Activités mathématiques diverses — Images diverses

- Chercher
- Enseigner
- Montrer

Activités mathématiques diverses — Images diverses

- Chercher
- Enseigner
- Montrer

Activités mathématiques diverses — Images diverses

- Chercher
- Enseigner
- Montrer

Activités mathématiques diverses — Images diverses

- Chercher
- Enseigner
- Montrer

Ne pas confondre les différents types d'activité.

Chercher

La recherche mathématique utilise pour l'essentiel des images *mentales*.

Chercher

H. Poincaré (La valeur de la Science)

Tout en parlant, M. Bertrand est toujours en action ; tantôt il semble aux prises avec quelque ennemi extérieur, tantôt il dessine d'un geste de la main les figures qu'il étudie. Evidemment, il voit et il cherche à peindre, c'est pour cela qu'il appelle le geste à son secours. Pour M. Hermite, c'est tout le contraire ; ses yeux semblent fuir le contact du monde ; ce n'est pas au dehors, c'est au dedans qu'il cherche la vision de la vérité. Parmi les géomètres allemands de ce siècle, deux noms surtout sont illustres ; ce sont ceux des deux savants qui ont fondé la théorie générale des fonctions, Weierstrass et Riemann. Weierstrass ramène tout à la considération des séries et à leurs transformations analytiques ; pour mieux dire, il réduit l'Analyse à une sorte de prolongement de l'arithmétique ; on peut parcourir tous ses livres sans y trouver une figure. Riemann, au contraire, appelle de suite la géométrie à son secours, chacune de ses conceptions est une image que nul ne peut oublier dès qu'il en a compris le sens.

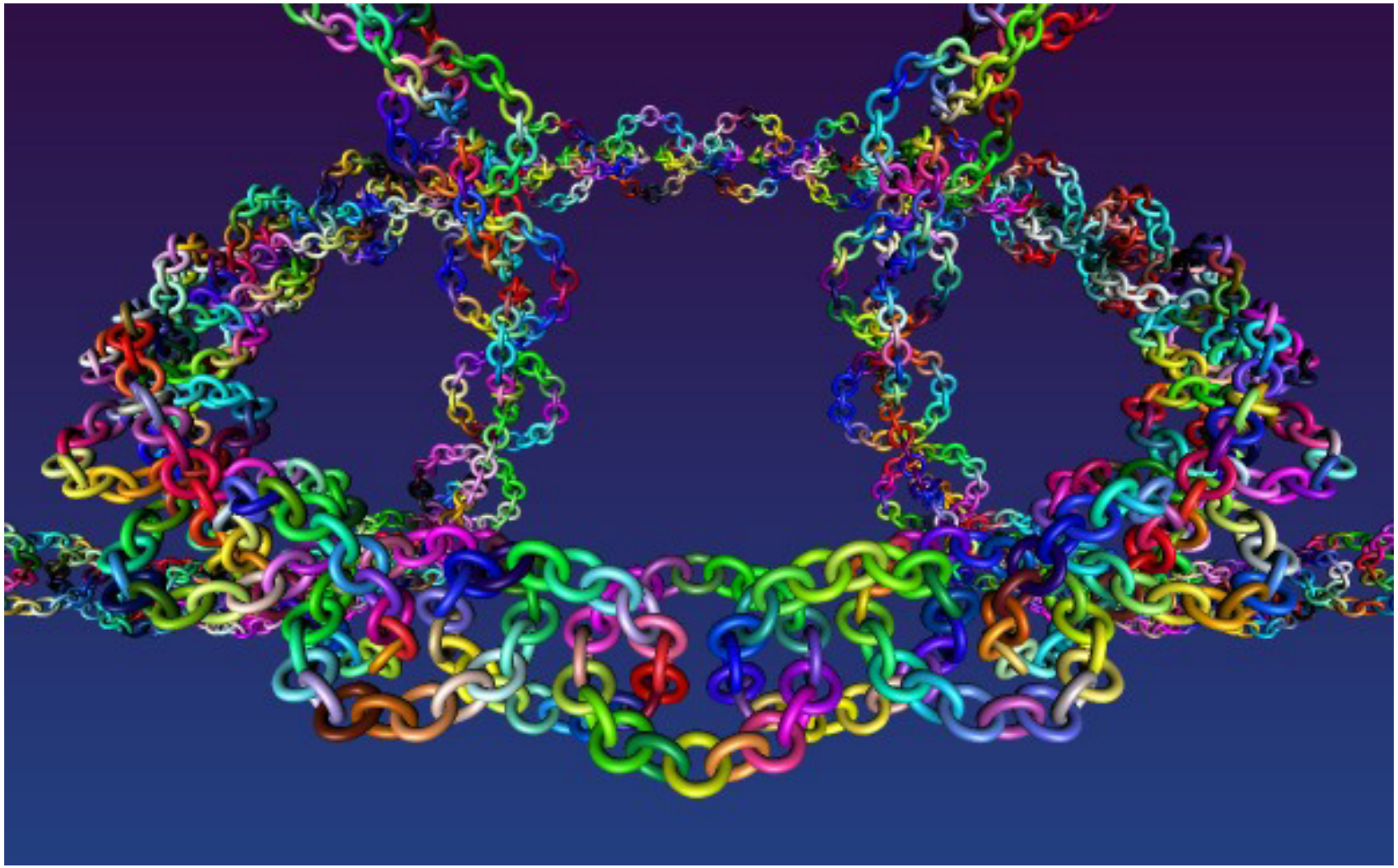
Chercher

H. Poincaré (La valeur de la Science)

Plus récemment, Lie était un intuitif ; on aurait pu hésiter en lisant ses ouvrages, on n'hésitait plus après avoir causé avec lui ; on voyait tout de suite qu'il pensait en images. Mme Kowalevski était une logicienne. Chez nos étudiants, nous remarquons les mêmes différences ; les uns aiment mieux traiter leurs problèmes "par l'Analyse", les autres "par la Géométrie". Les premiers sont incapables de "voir dans l'espace", les autres se lasseraient promptement des longs calculs et s'y embrouilleraient.
Les deux sortes d'esprits sont également nécessaires aux progrès de la science ; les logiciens, comme les intuitifs, ont fait de grandes choses que les autres n'auraient pas pu faire. Qui oserait dire s'il aimerait mieux que Weierstrass n'eût jamais écrit, ou s'il préférerait qu'il n'y eût pas eu de Riemann ? L'analyse et la synthèse ont donc toutes deux leur rôle légitime.

Chercher

Le collier d'Antoine (1888–1971)

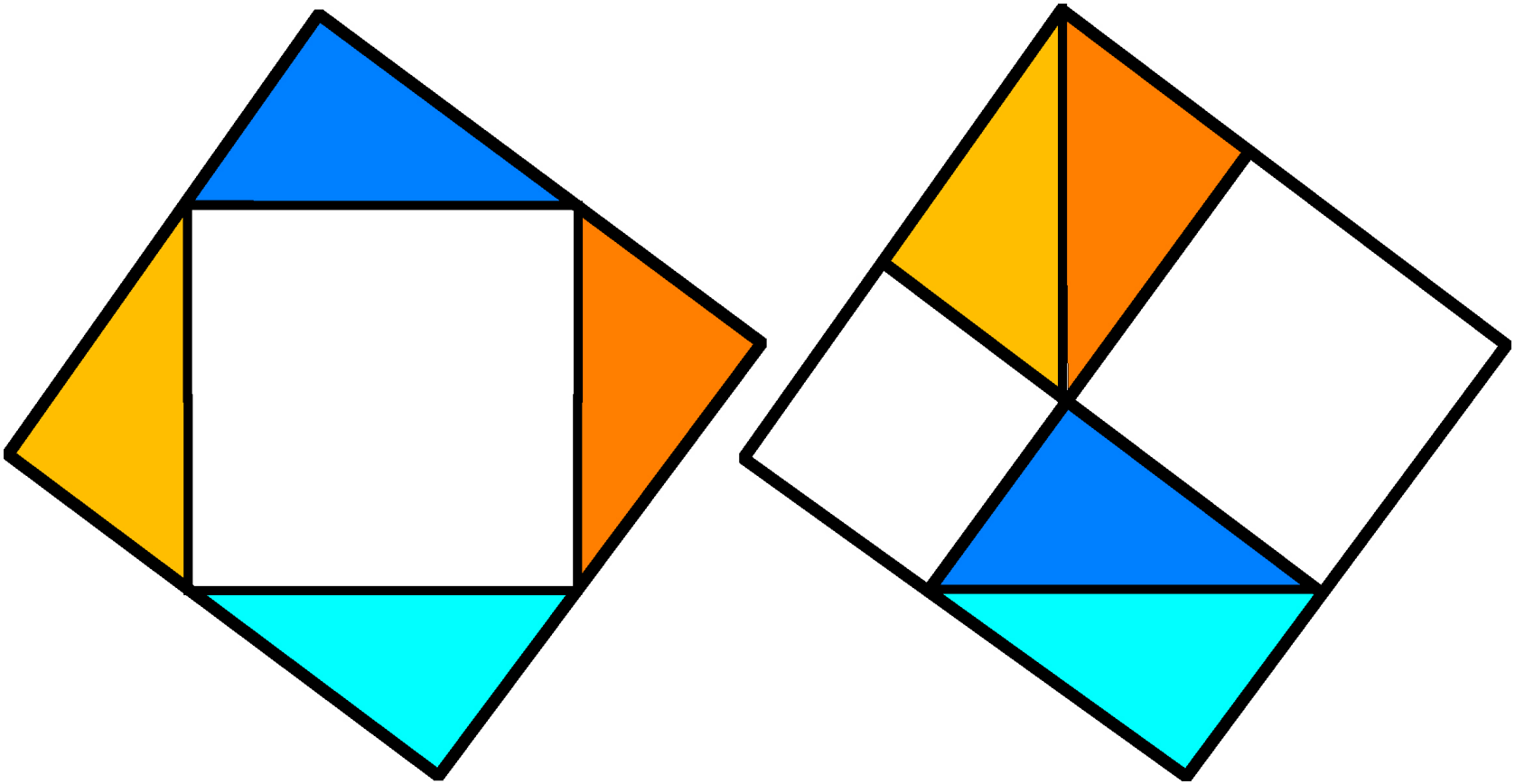


Enseigner – Communiquer

Les images fonctionnelles sont indispensables

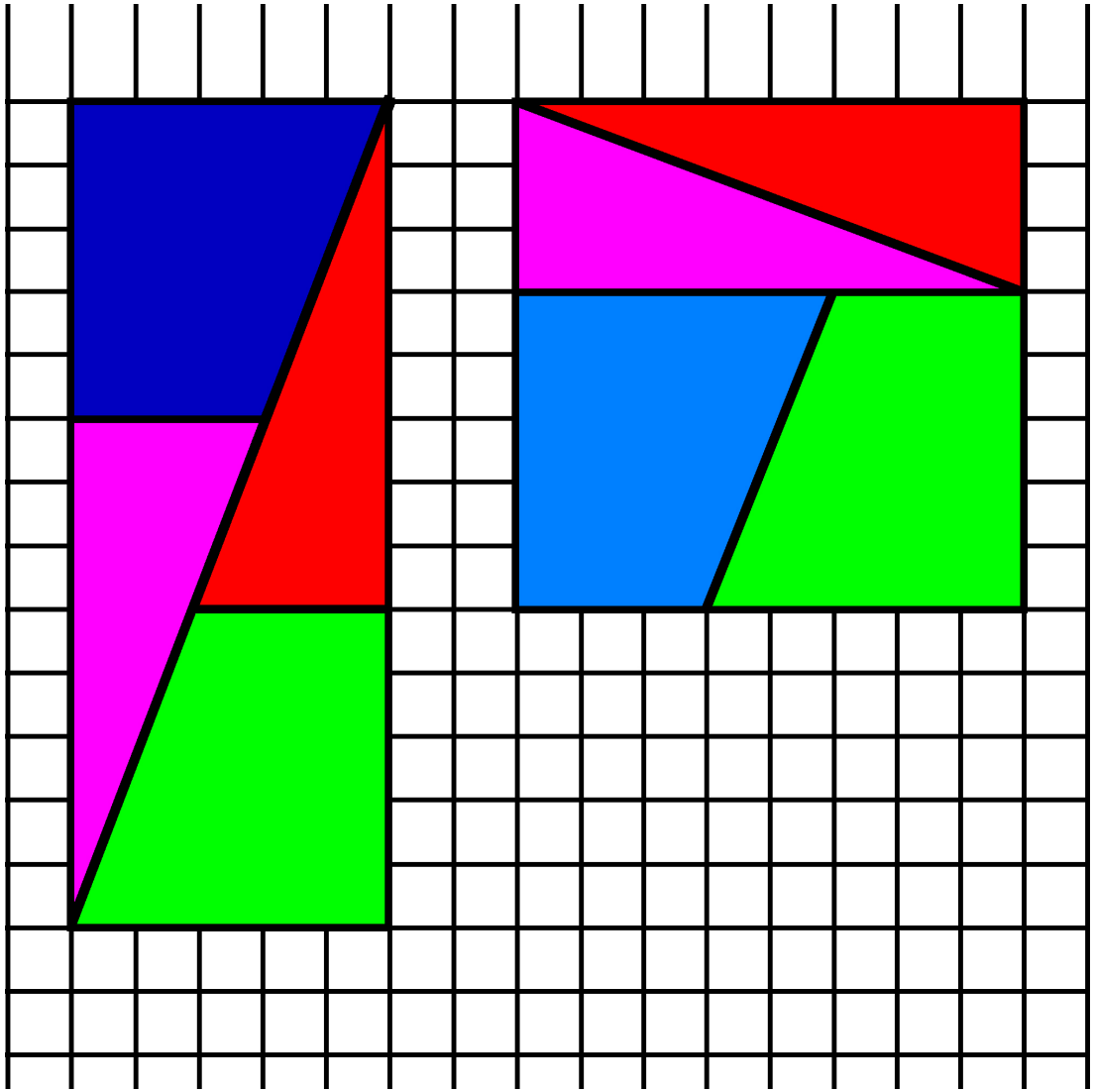
- Soit pour communiquer entre deux chercheurs.
- Soit pour enseigner.

Pouvoir des images : le théorème de Pythagore !



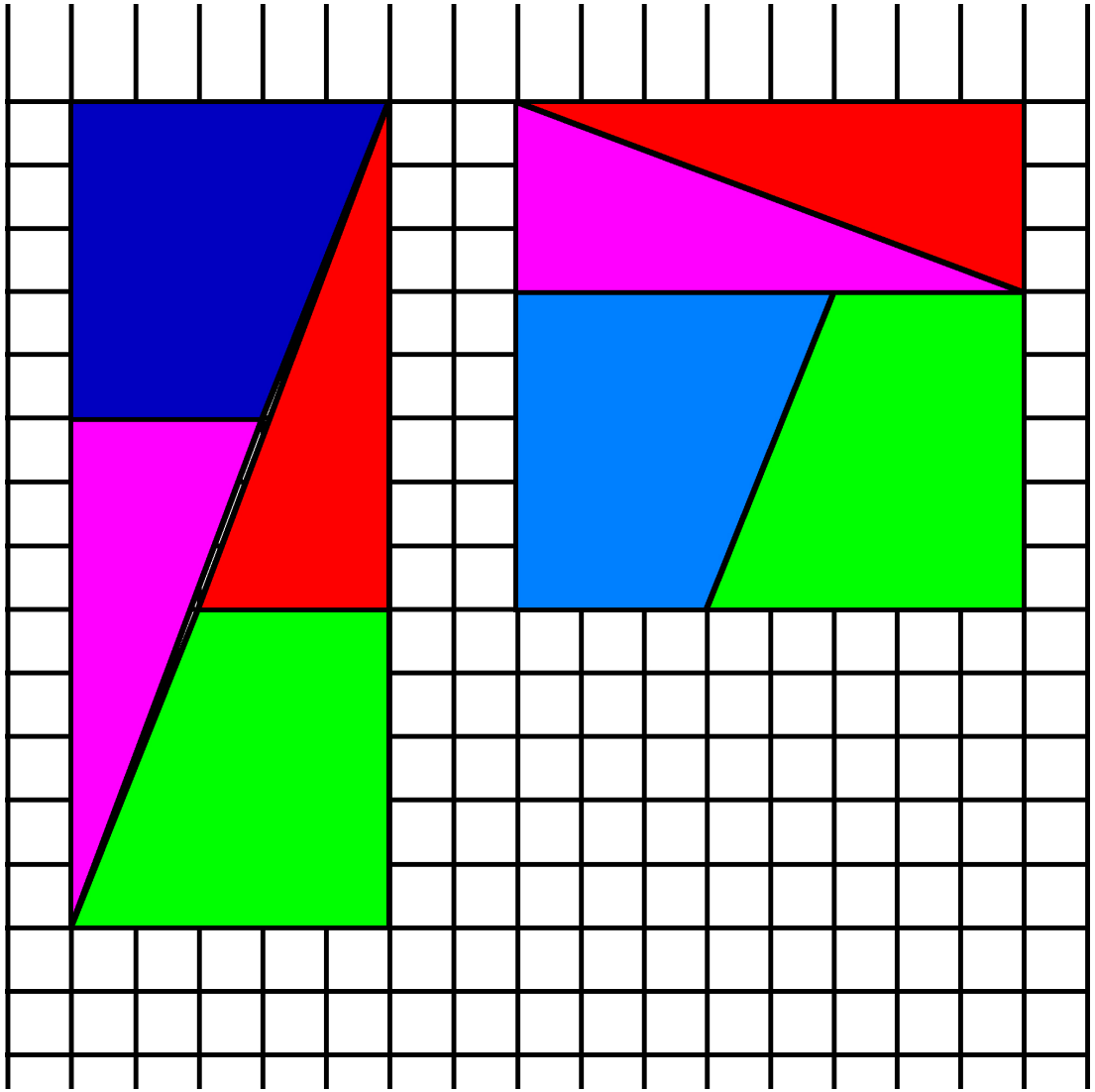
Enseigner

Images dangereuses : $64 = 65$!



Enseigner

Images dangereuses : $64 \neq 65$!



Montrer

Un film : *Dimensions*

Montrer

Un film : *Dimensions*

Jos Leys

Montrer

Un film : *Dimensions*

Jos Leys

Aurélien Alvarez

Montrer

Un film : *Dimensions*

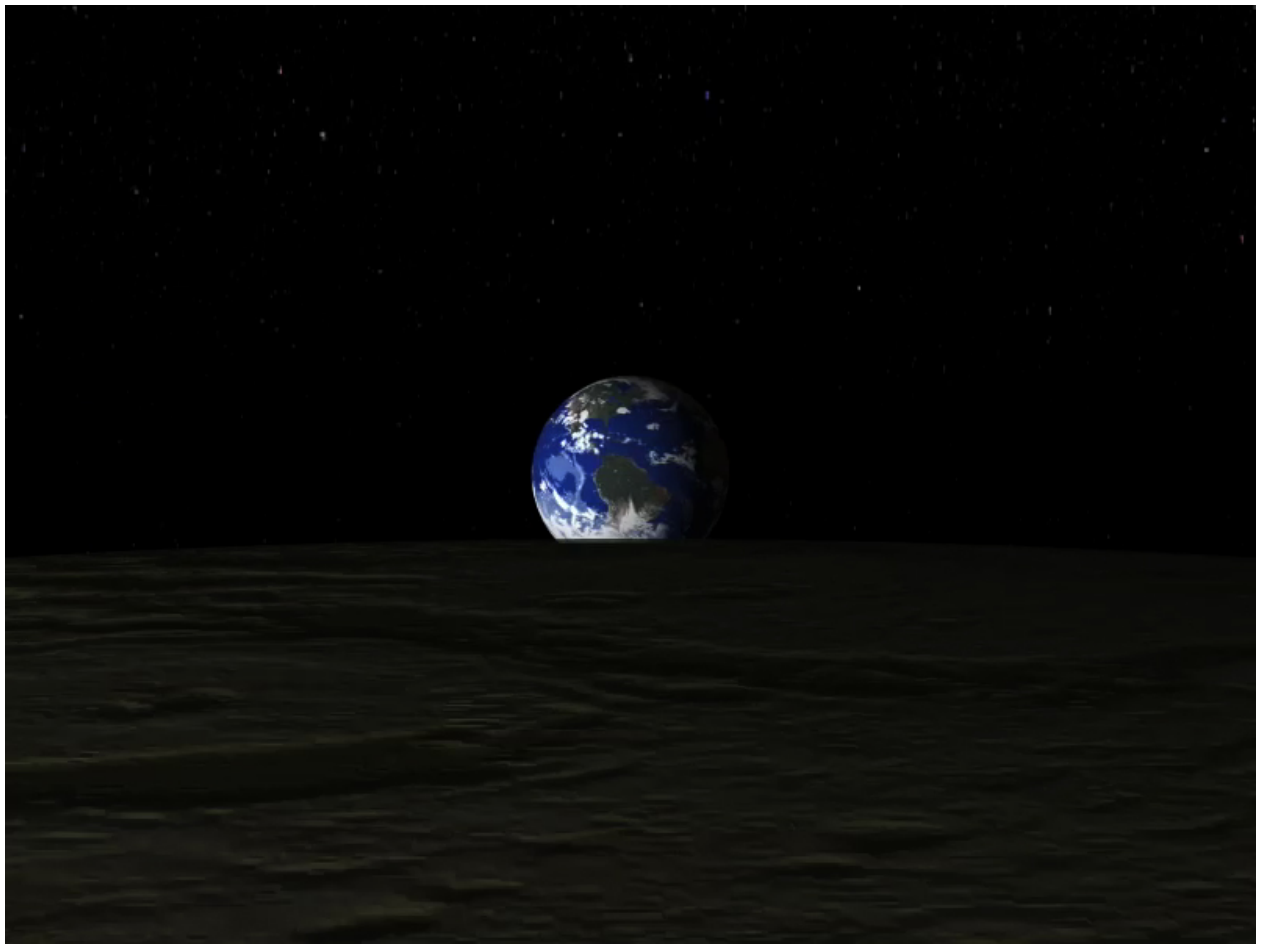
Jos Leys

Aurélien Alvarez

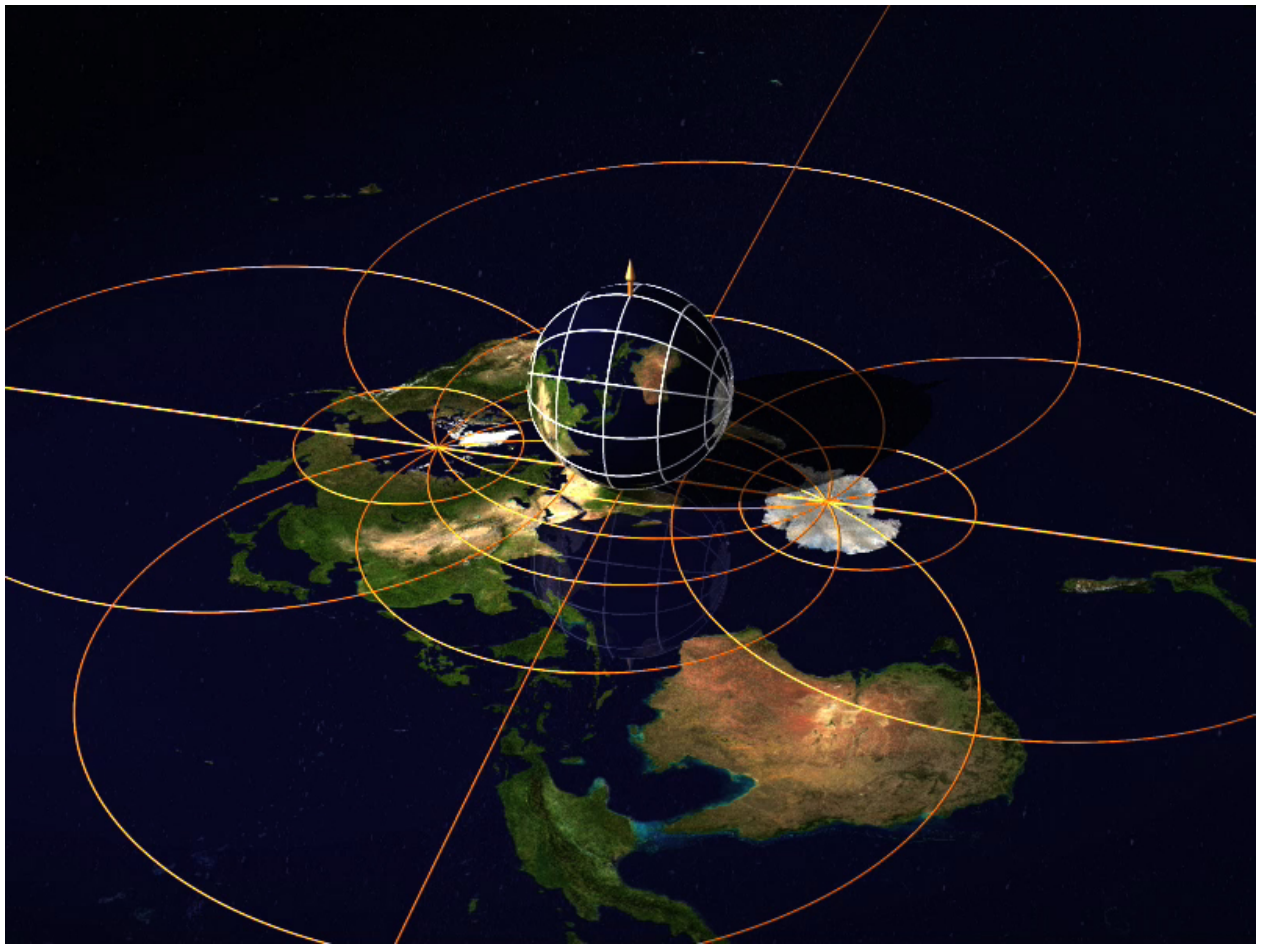
9 chapitres de 13 minutes

Dimensions

Chapitre 1 : la dimension 2

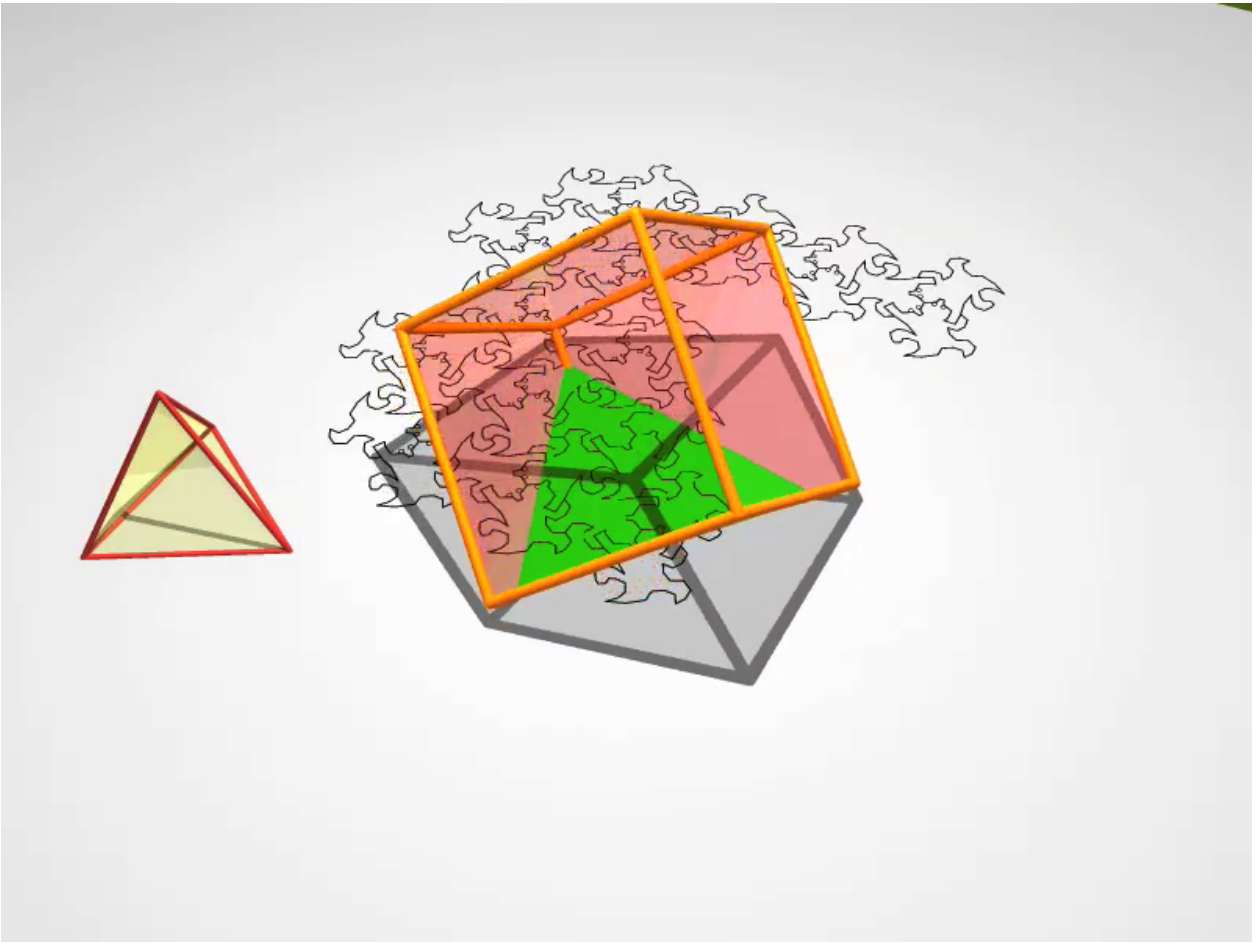


Chapitre 1 : la dimension 2

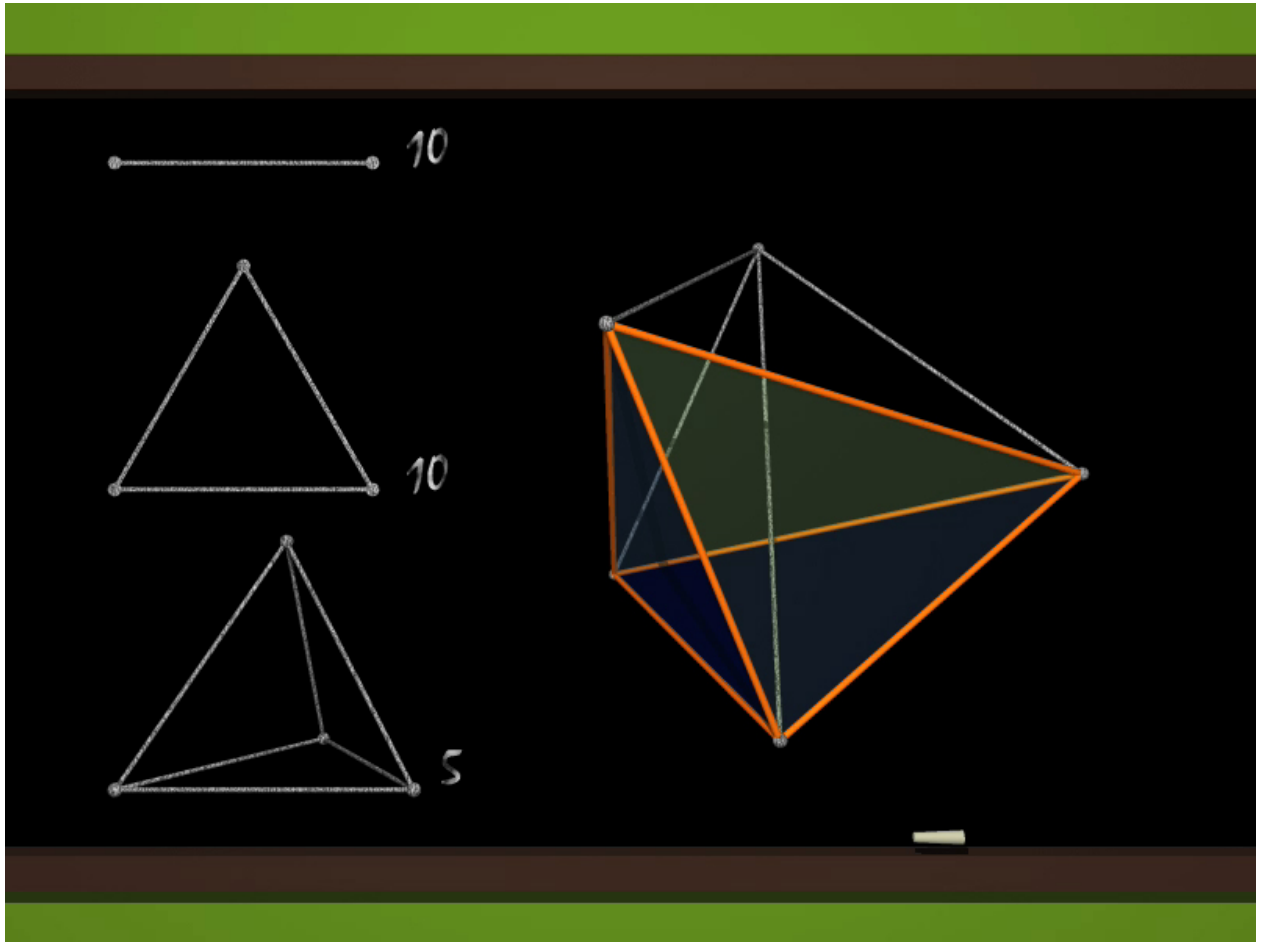


Chapitre 2 : la dimension 3

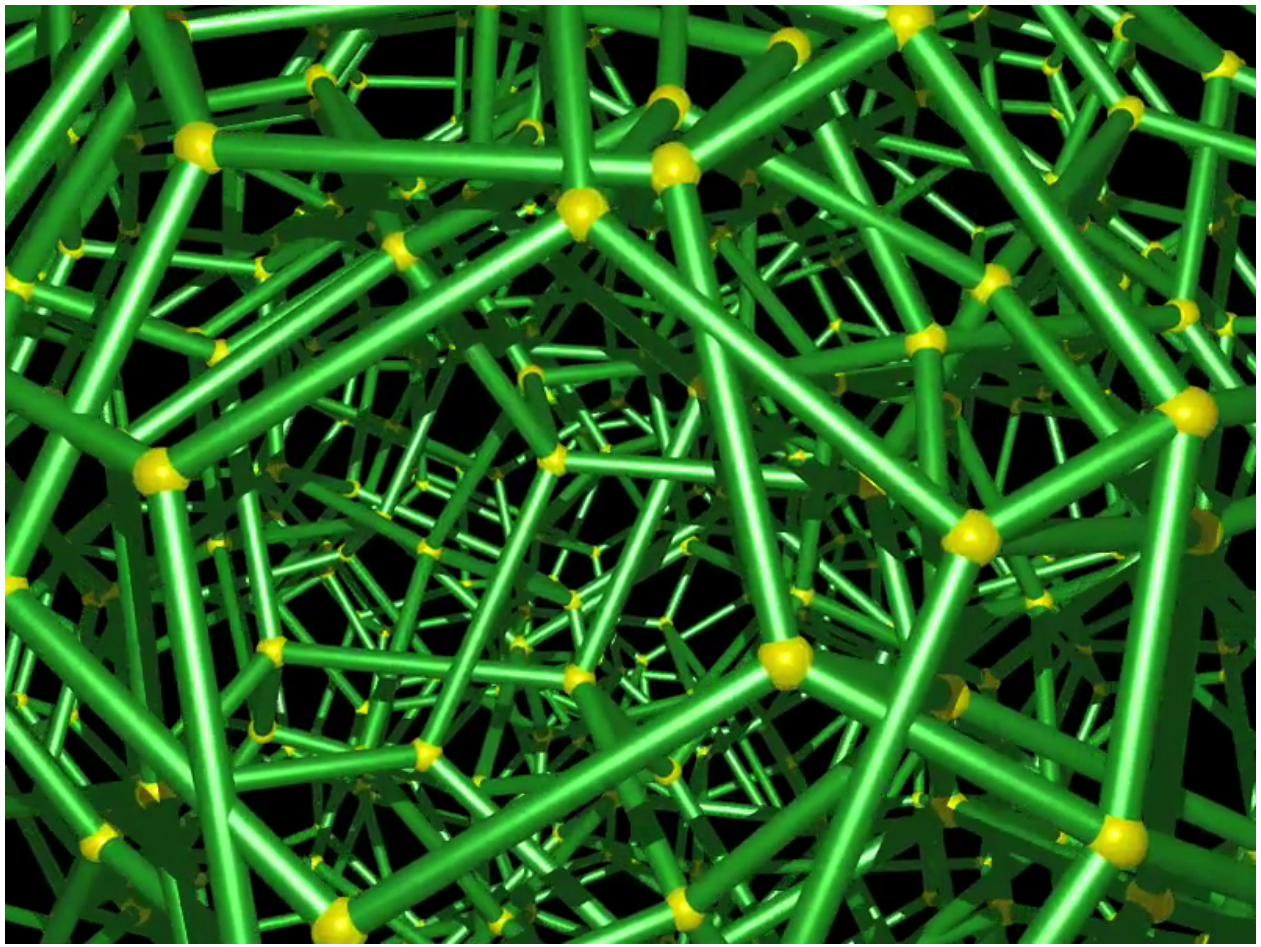
Chapitre 2 : la dimension 3



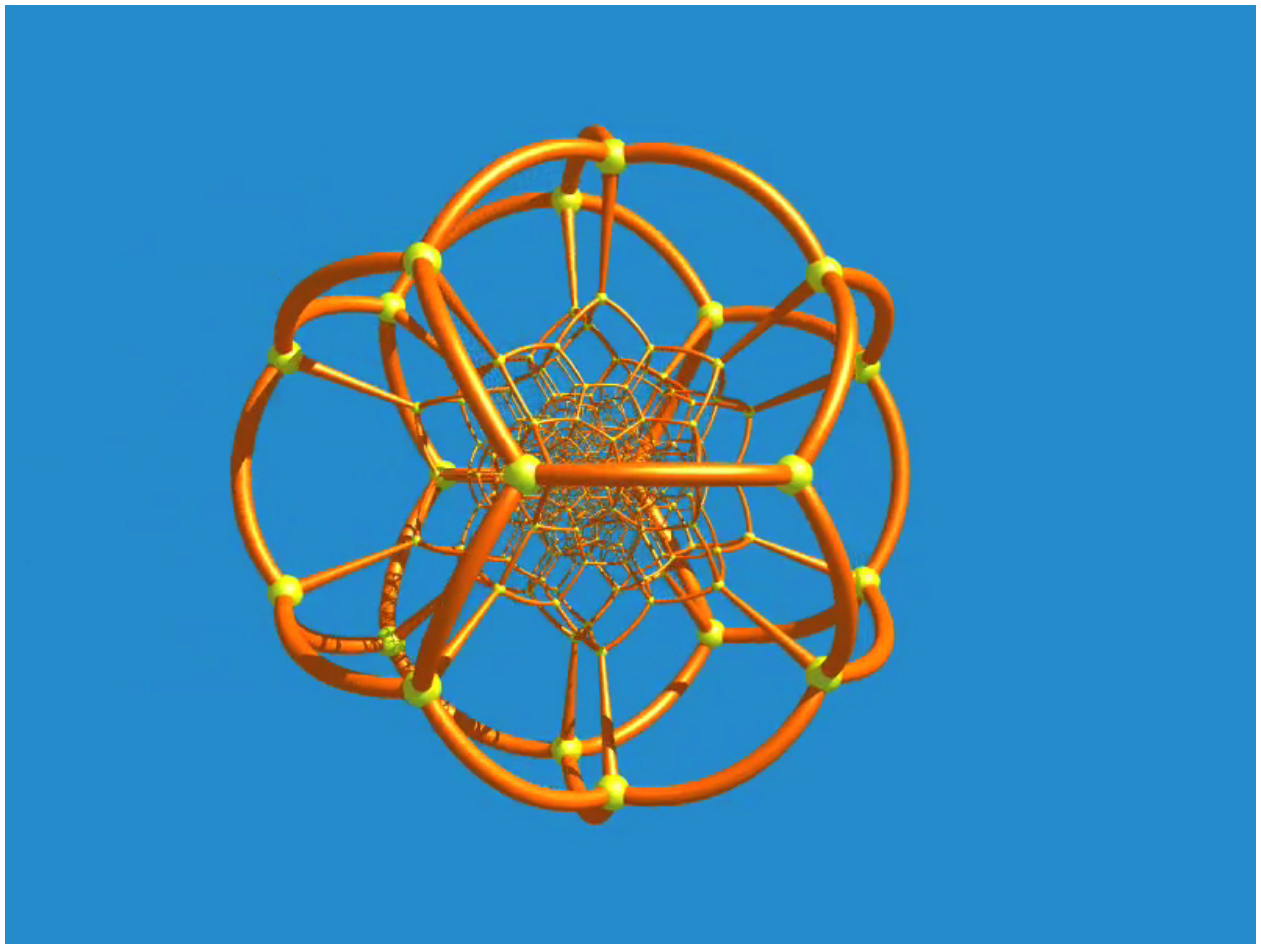
Chapitre 3 : la dimension 4



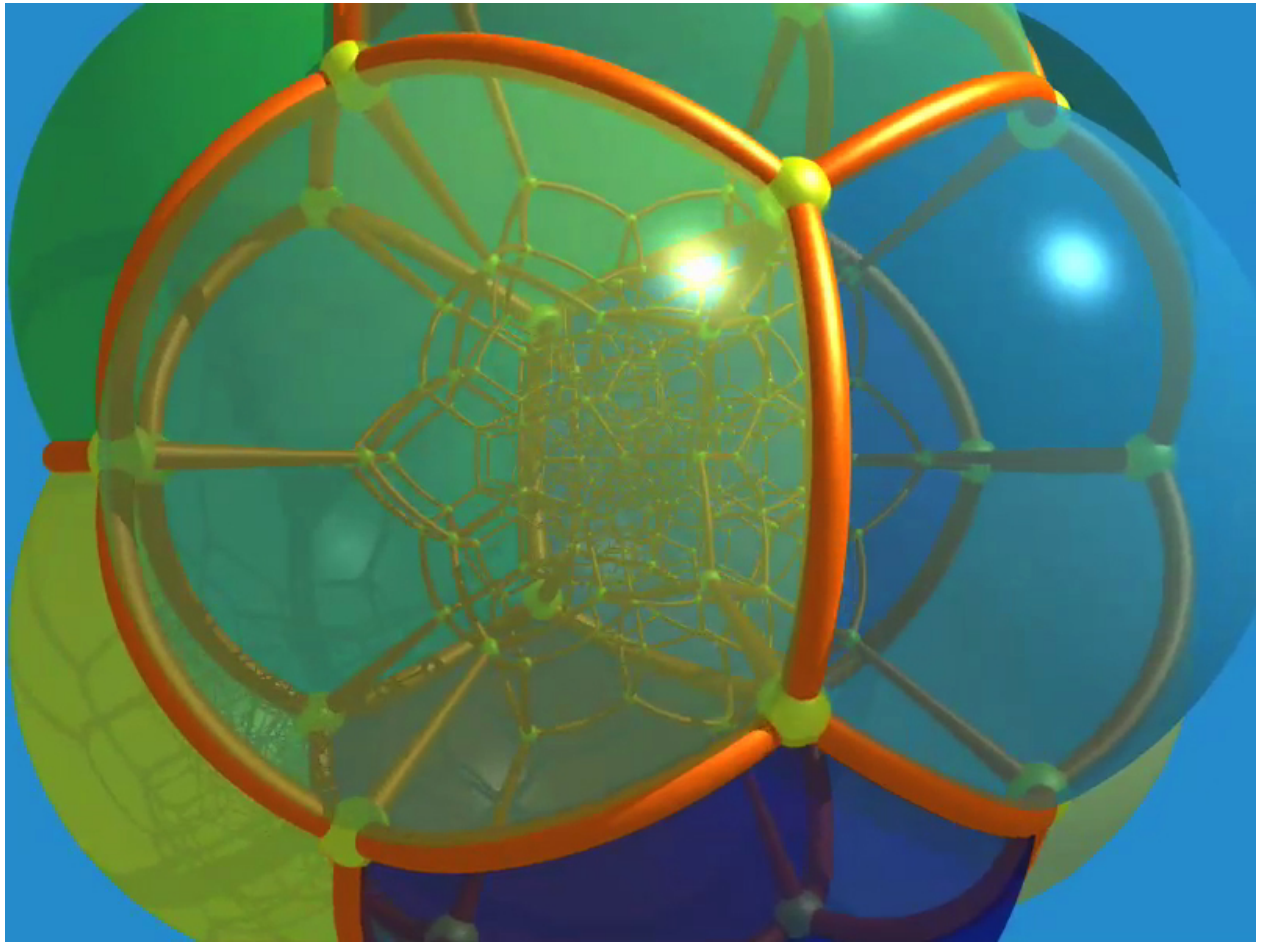
Chapitre 3 : la dimension 4



Chapitre 4 : la dimension 4, suite

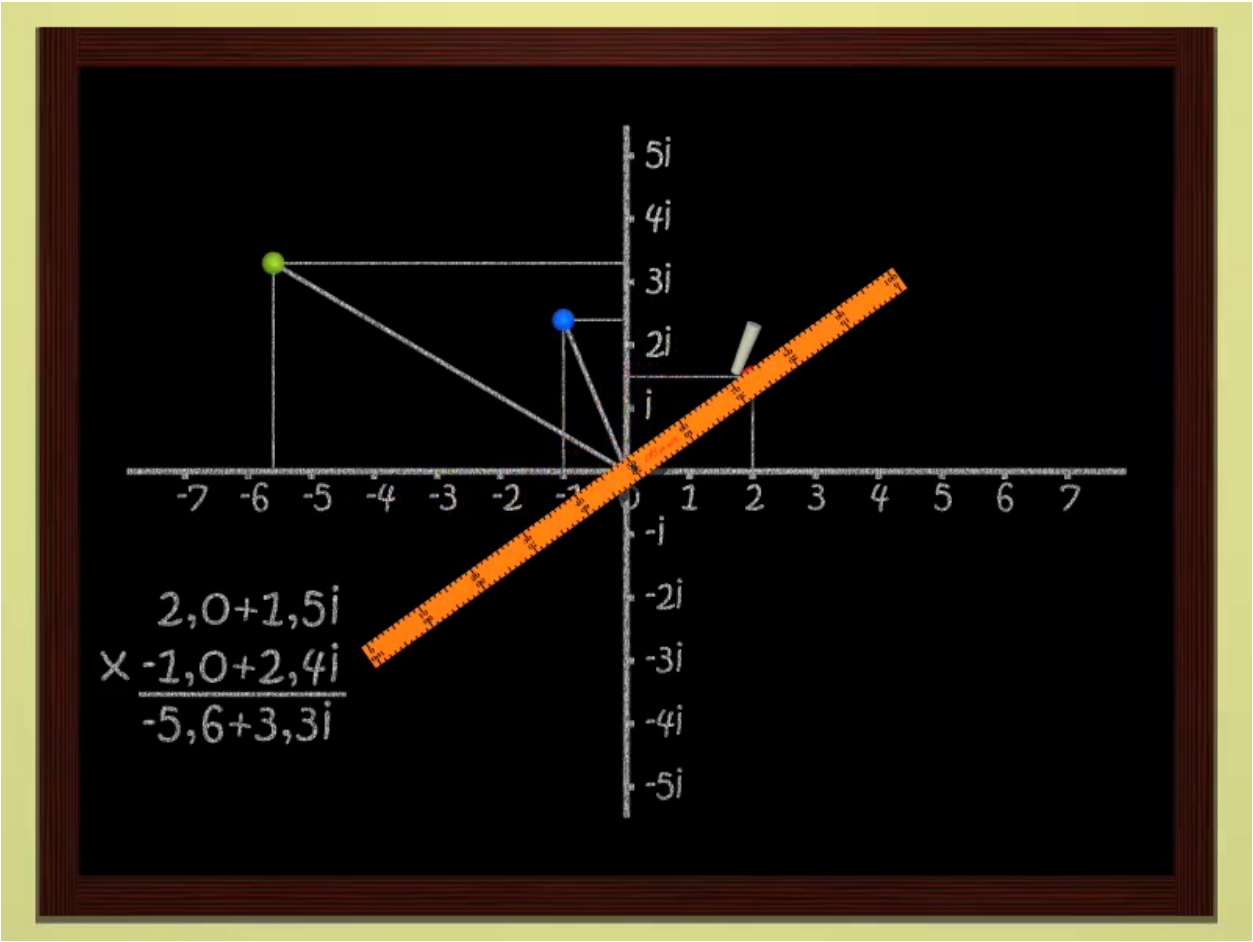


Chapitre 4 : la dimension 4, suite

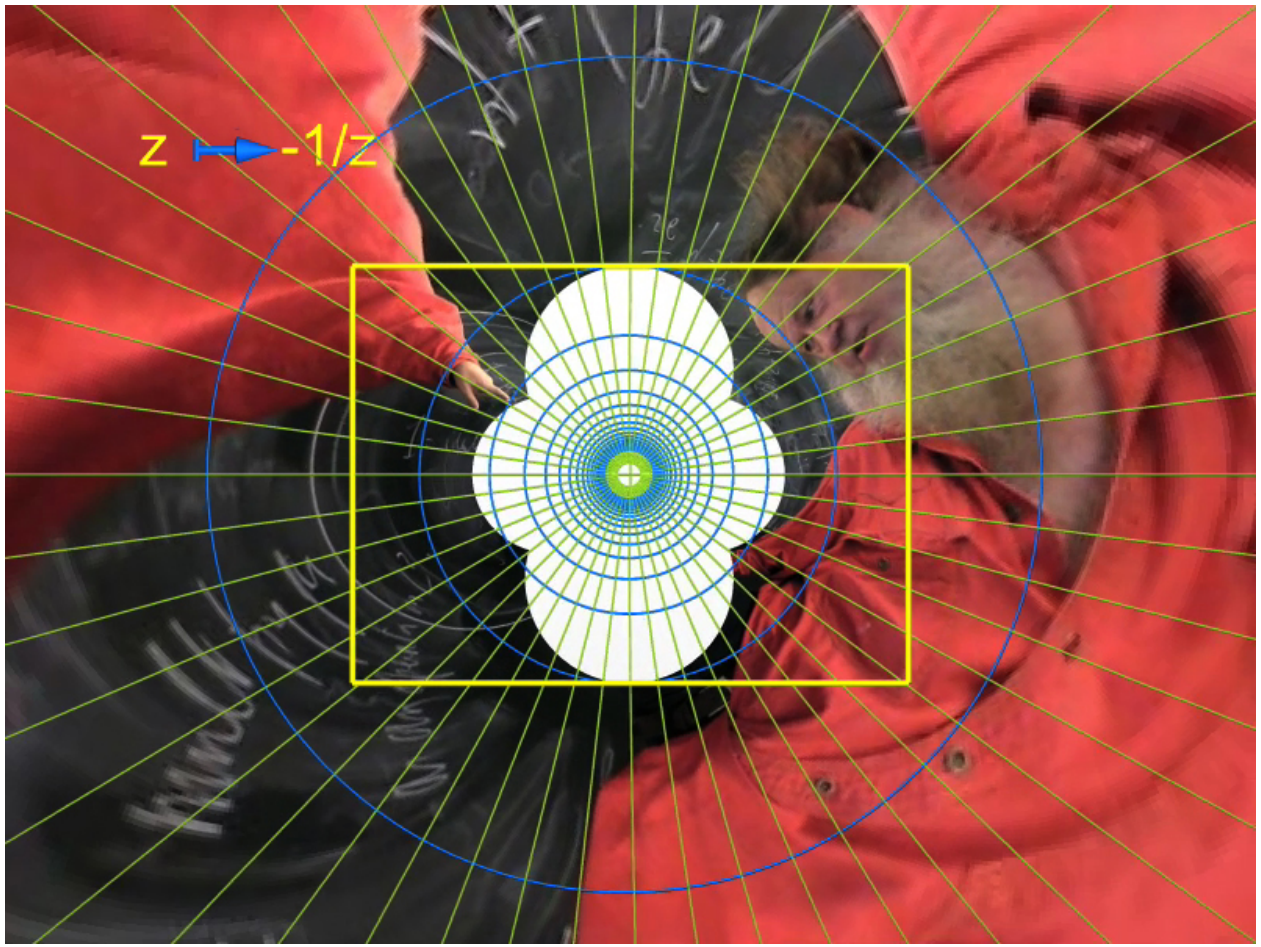


Chapitre 5 : les nombres complexes

Chapitre 5 : les nombres complexes

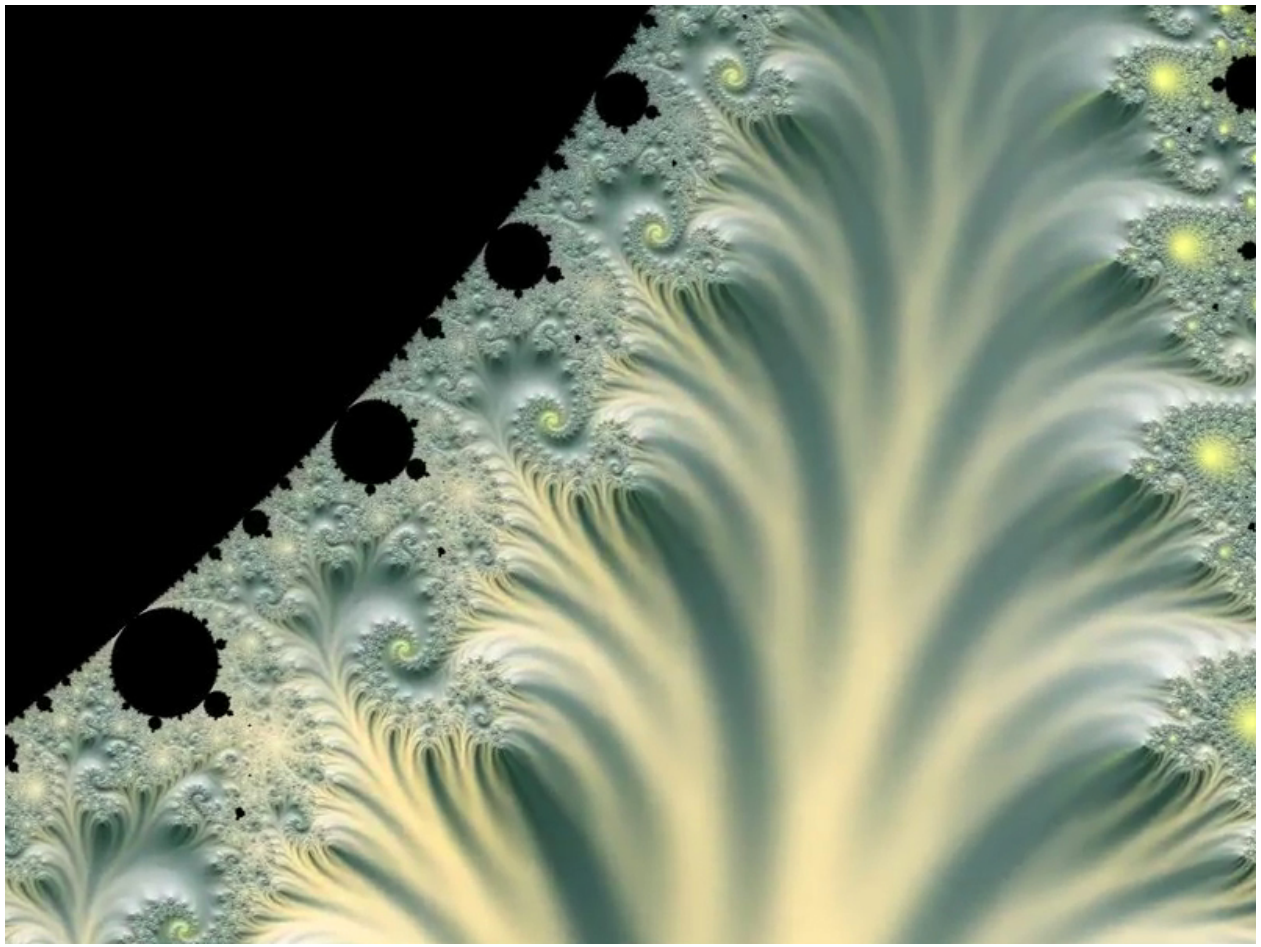


Chapitre 6 : les nombres complexes, suite.

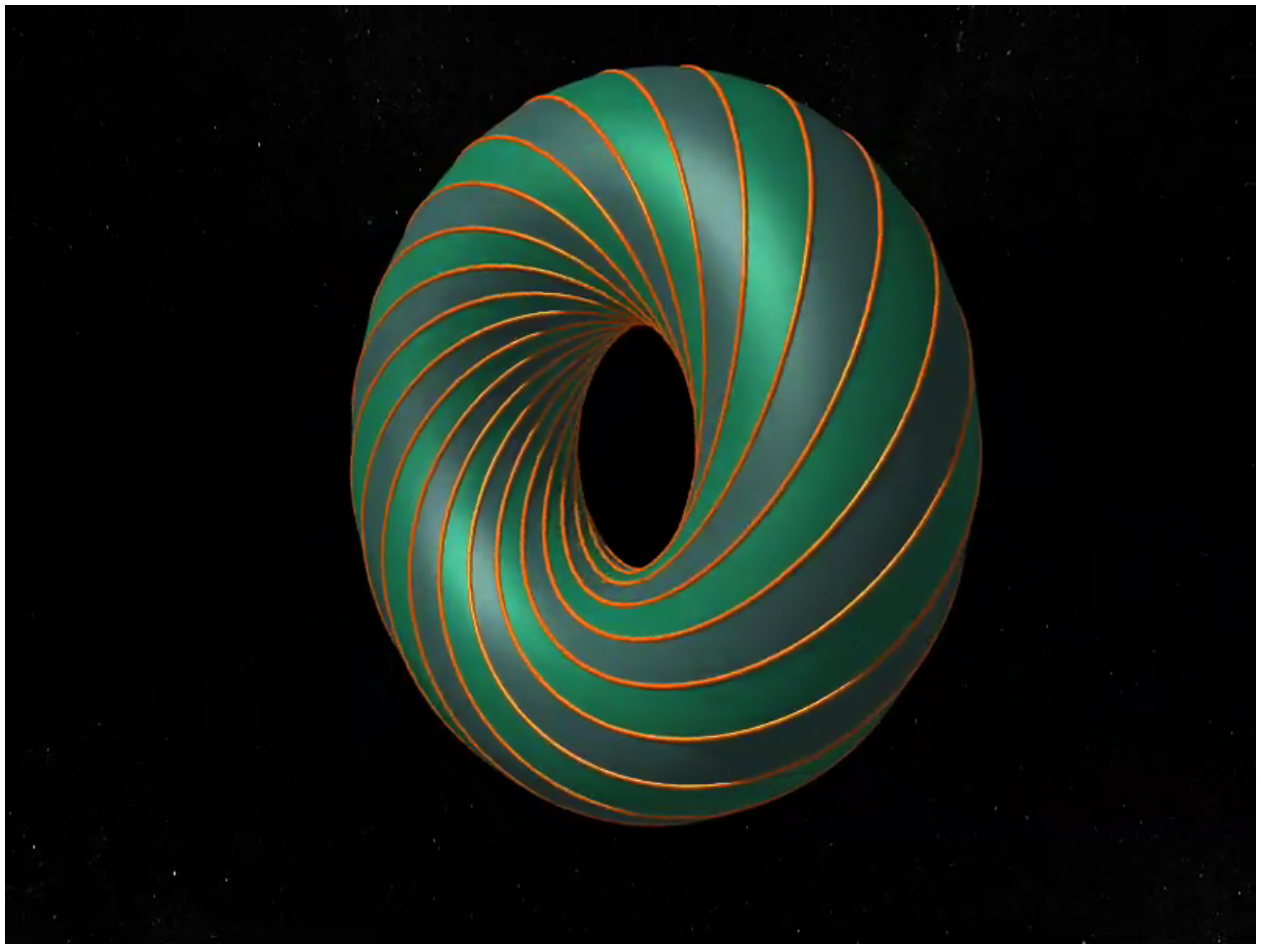


Dimensions

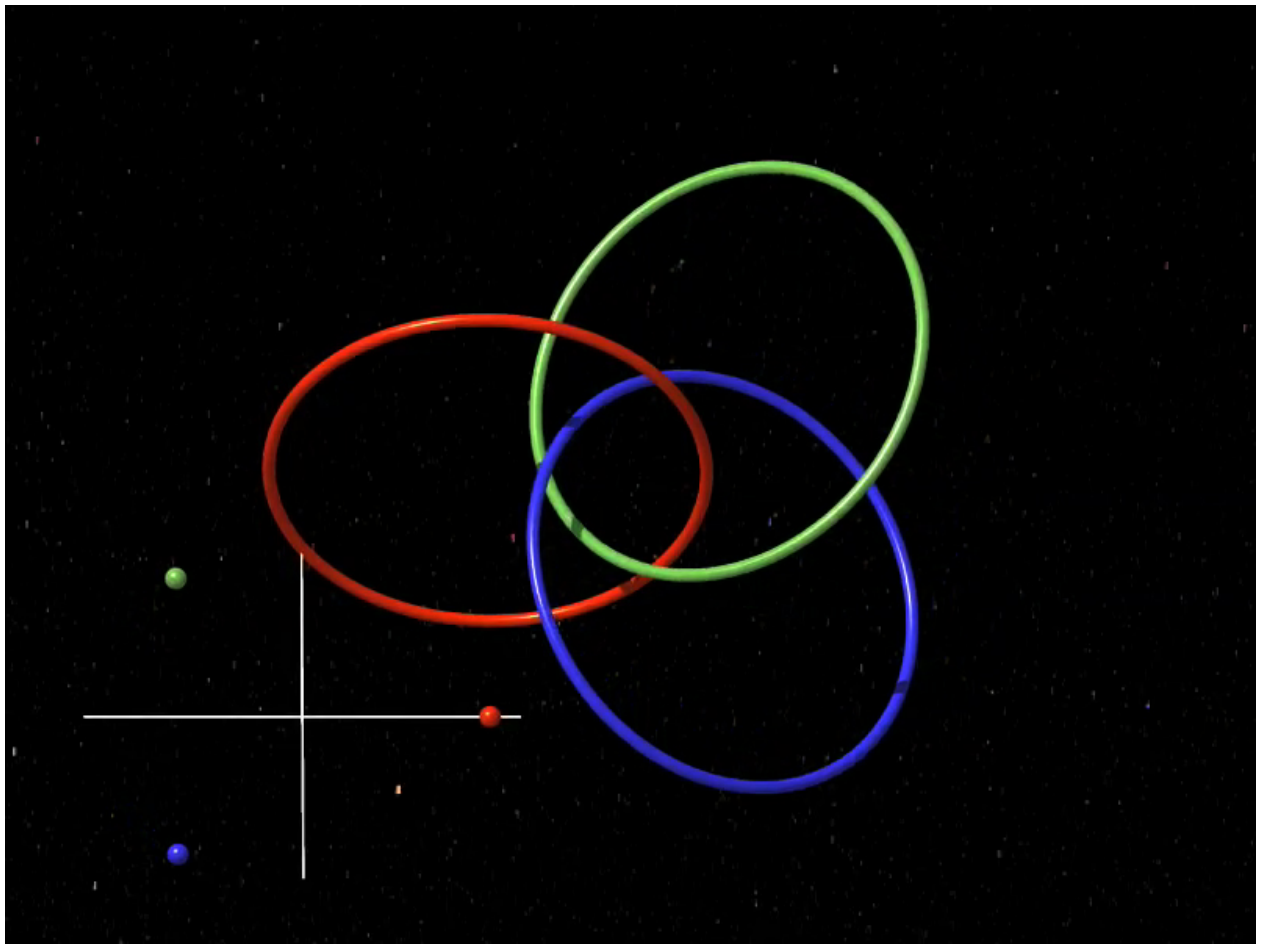
Chapitre 6 : les nombres complexes, suite.



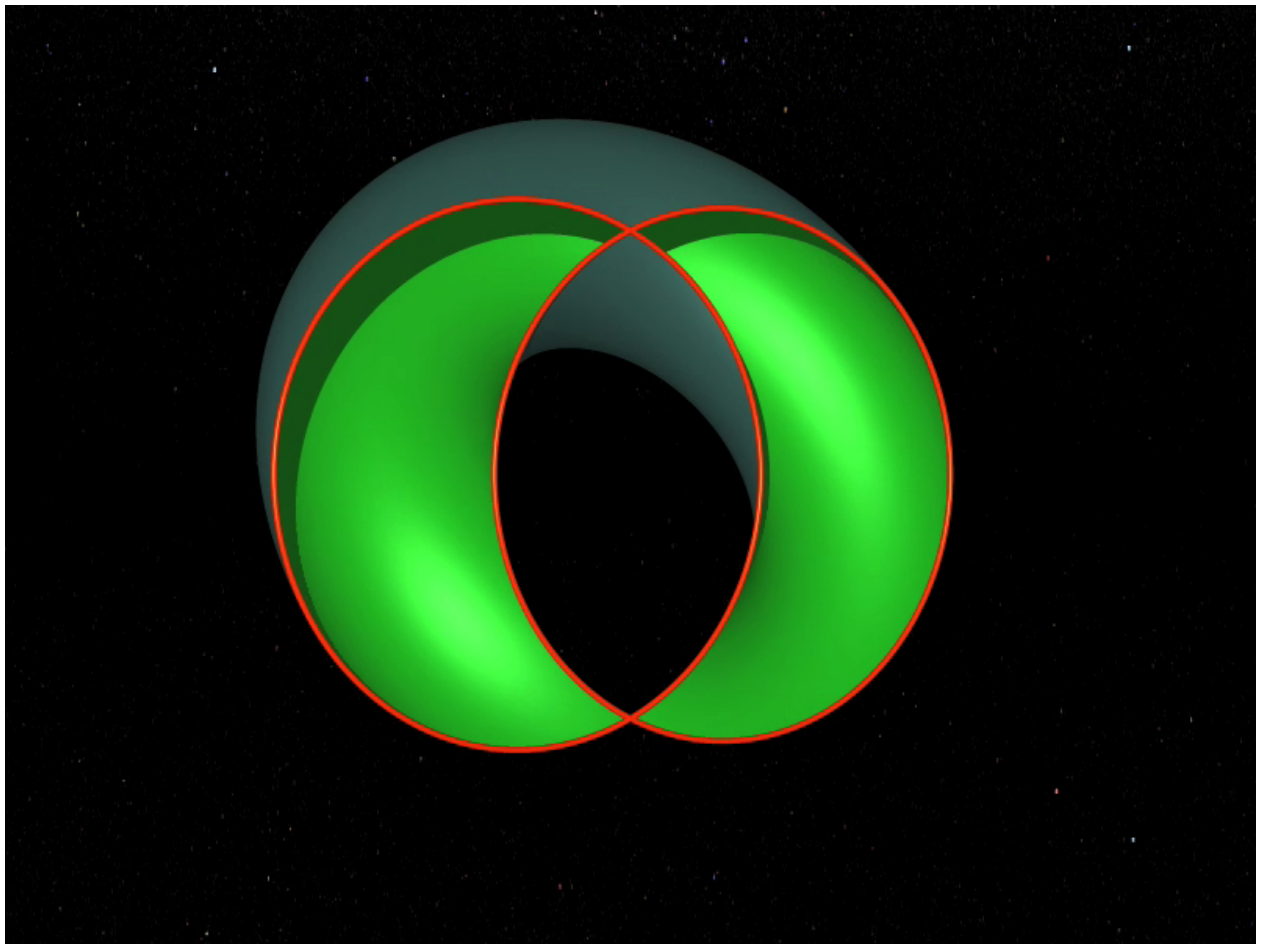
Chapitre 7 : Fibration



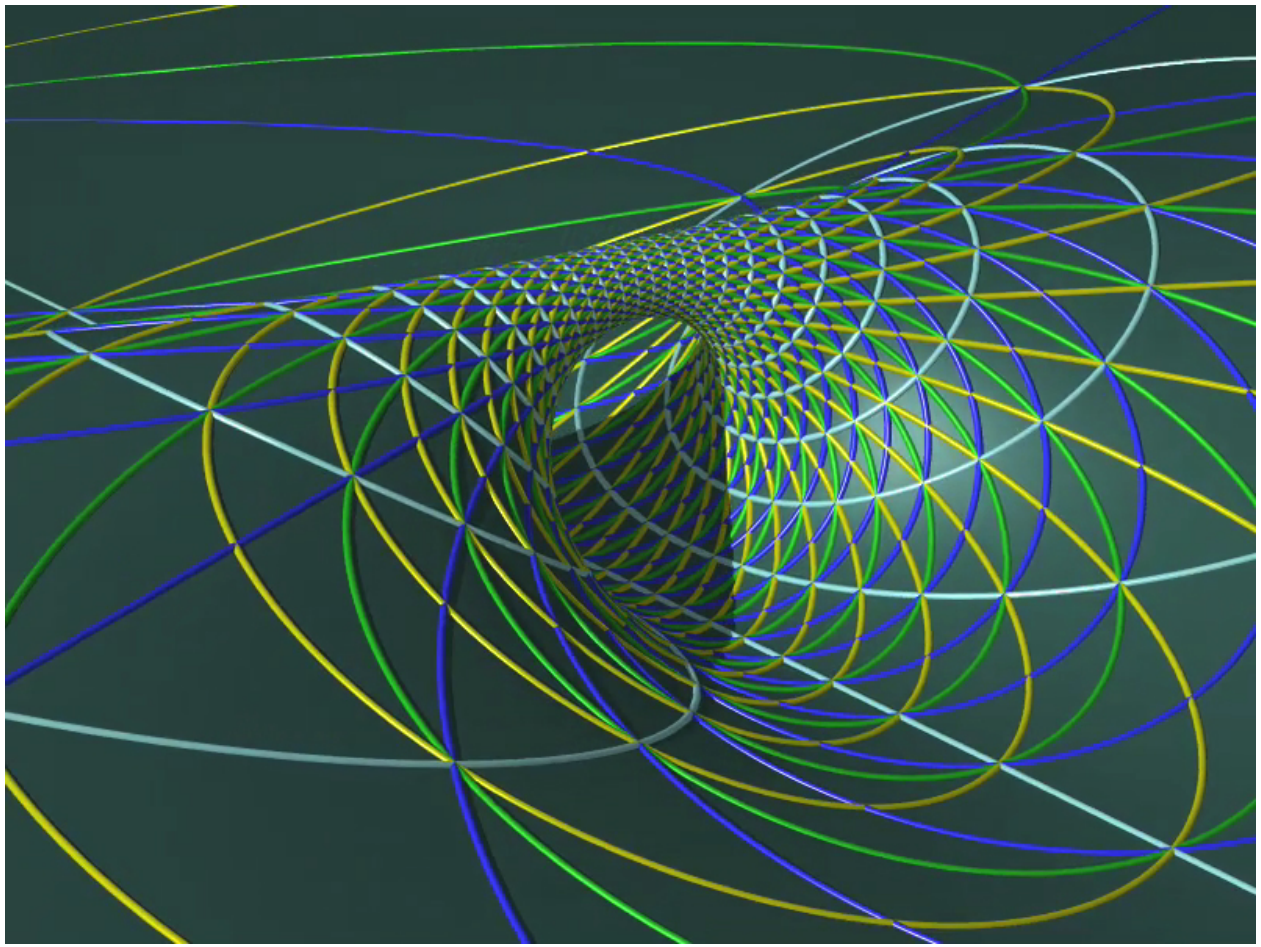
Chapitre 7 : Fibration



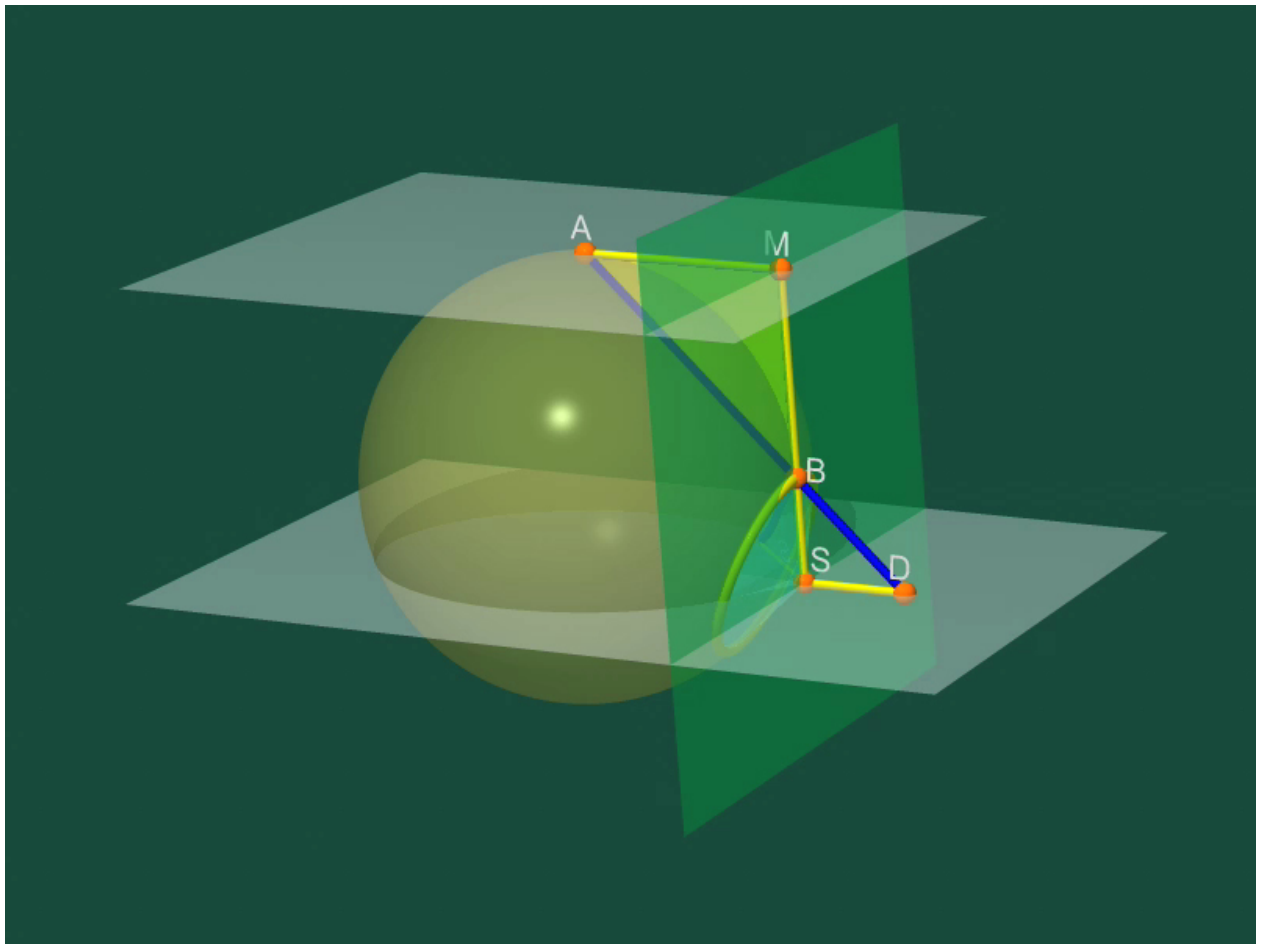
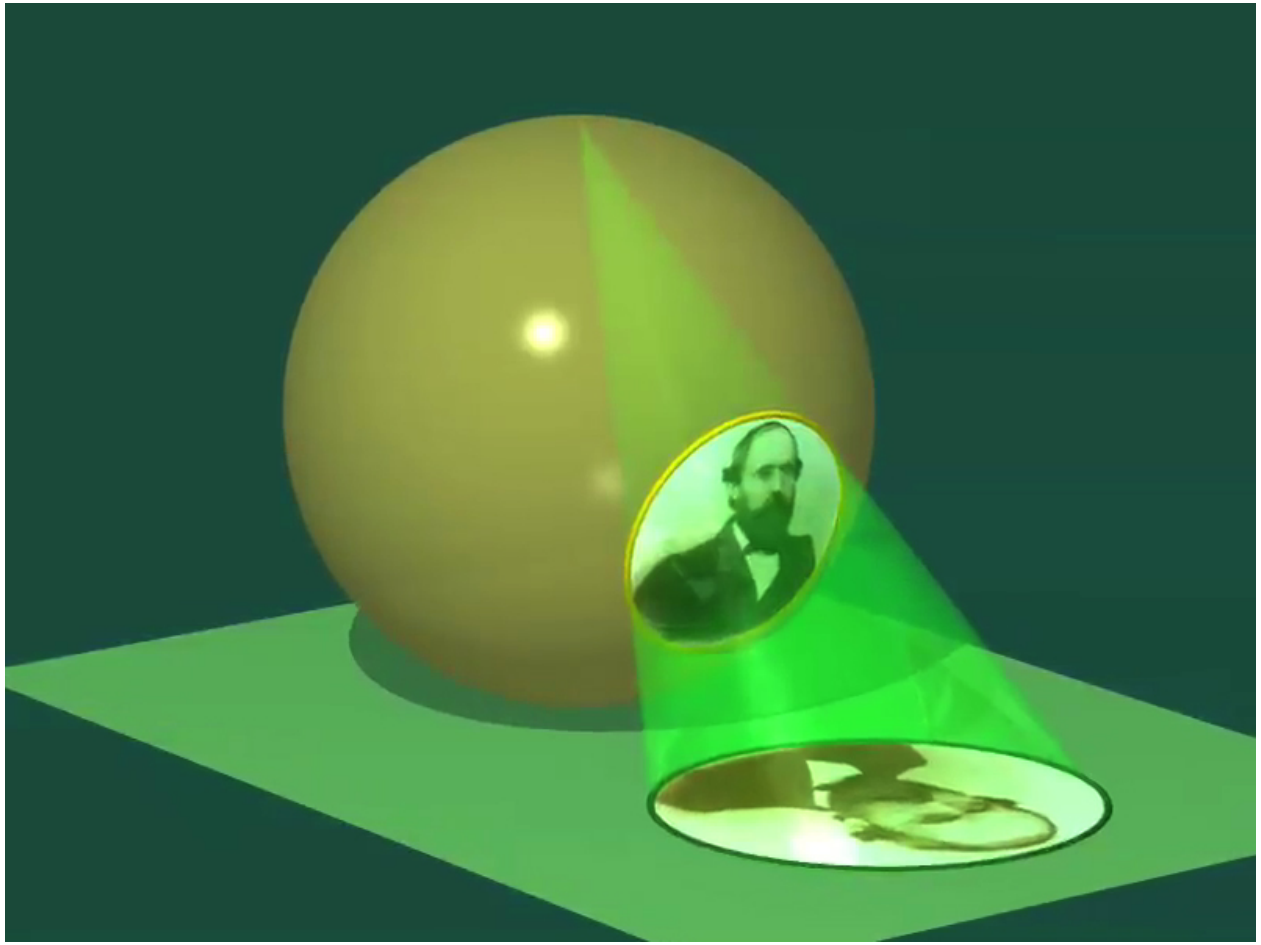
Chapitre 8 : Fibration, suite.



Chapitre 8 : Fibration, suite.



Chapitre 9 : Preuve



Chapitre 9 : Preuve