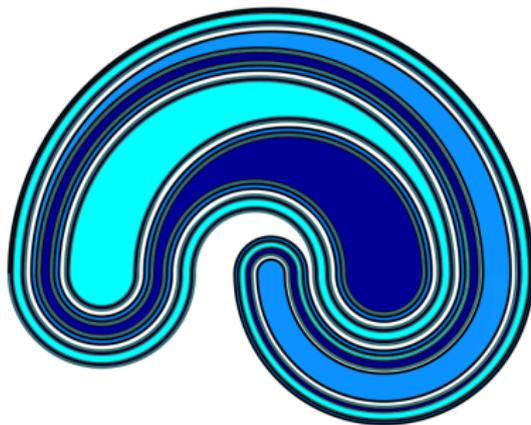


LE CHAOS MATHÉMATIQUE

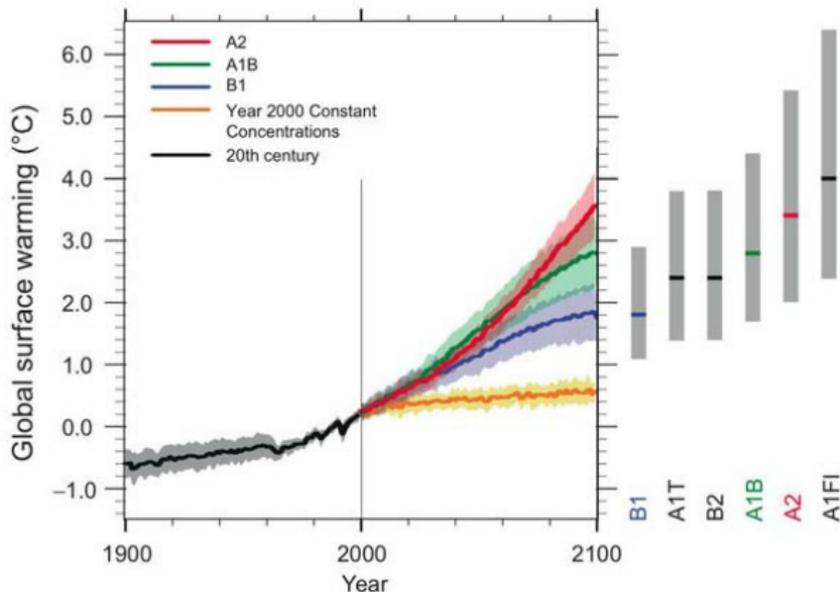


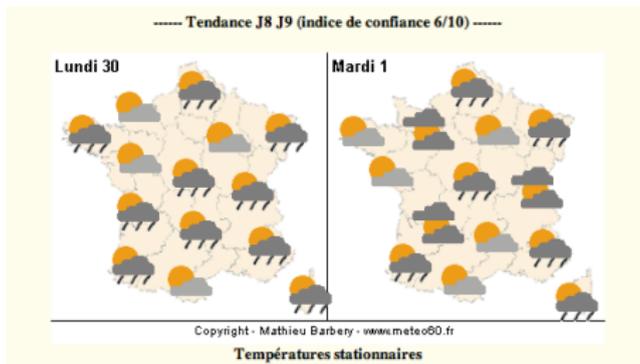
ÉTIENNE GHYS

CNRS – ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

“MATHS À VENIR 2009” PARIS, DÉCEMBRE 2009

Multi-model Averages and Assessed Ranges for Surface Warming



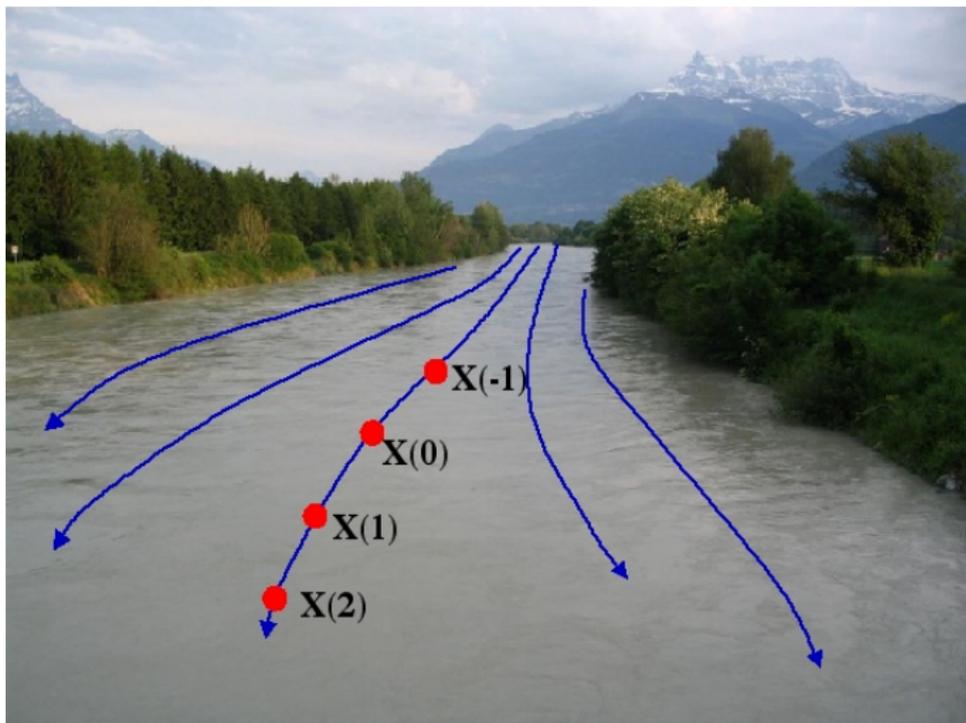


À partir du temps observé le jour J à 0 h, l'ordinateur calcule, grâce à un modèle numérique de prévision, les "scénarios" les plus probables de l'évolution du temps jusqu'à $J + 7$ et analyse leurs résultats. On examine la dispersion des différents scénarios. Si les résultats des divers scénarios sont tous très proches et peuvent être regroupés dans une seule famille, l'indice de confiance prendra la valeur 5 ; sinon, l'indice prendra une valeur d'autant plus faible que les résultats seront davantage divergents...

Le modèle de l'équation différentielle



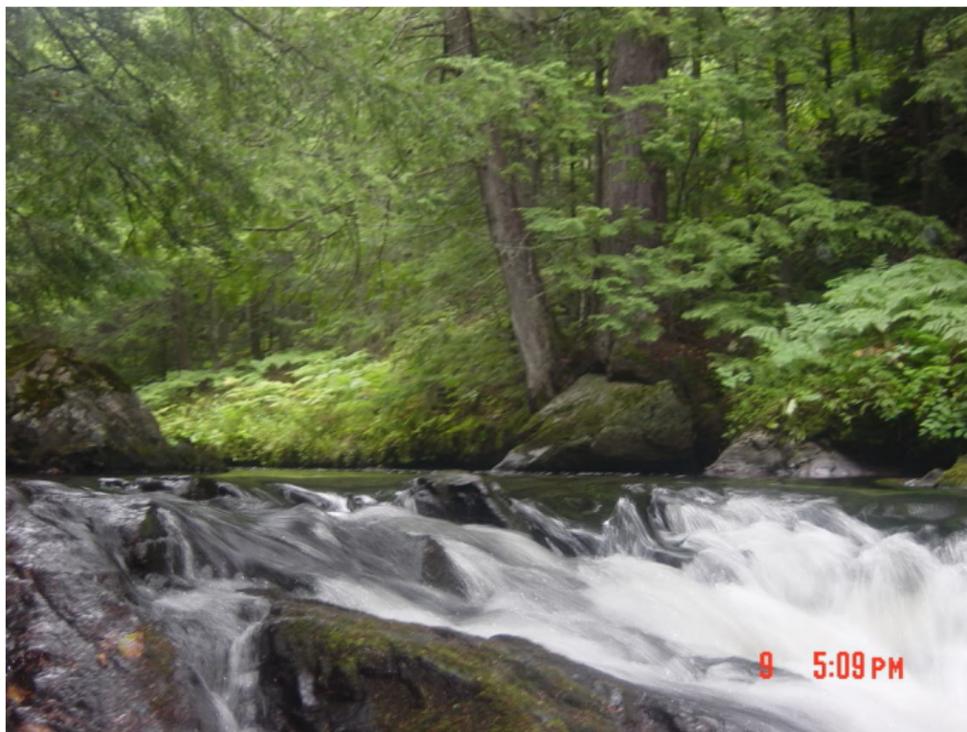
Le modèle de l'équation différentielle



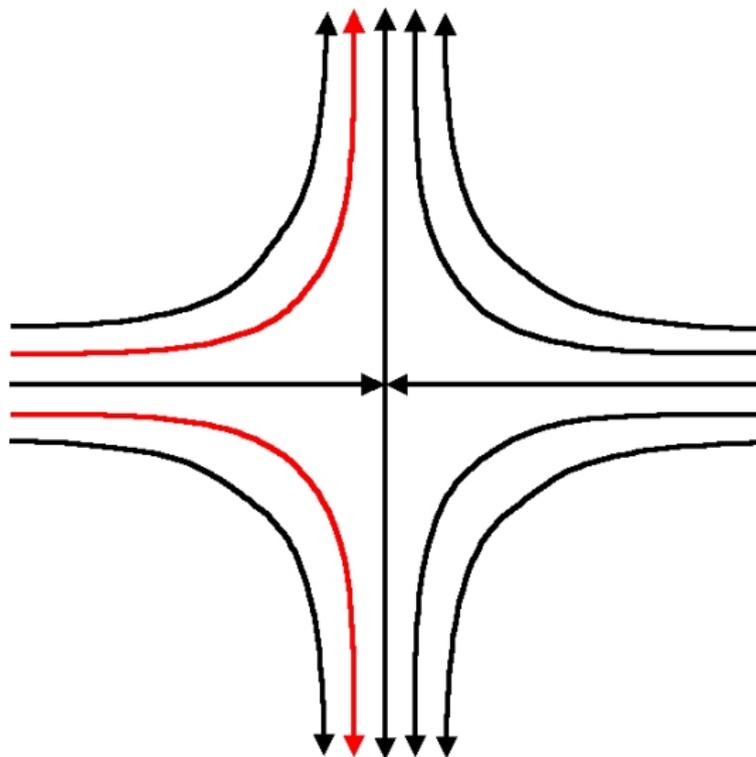
Le déterminisme selon Laplace (1814)

“Nous devons envisager l'état de l'Univers comme l'effet de son état antérieur et la cause de ce qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule le mouvement des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.”

Un flot turbulent



Le point selle



Un flot turbulent



Nikolai Andreev <http://www.etudes.ru/>

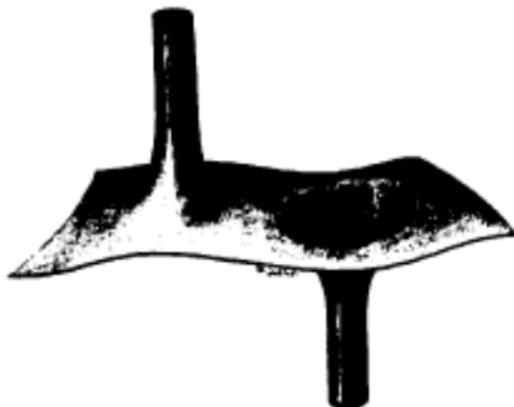
Hadamard 1897 : *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*

LES SURFACES A COURBURES OPPOSÉES.

39

infiniment petit tournant deux fois autour du pôle supérieur, les deux autres tracés, dans chacun des feuilletts, suivant le grand cercle horizontal.

Fig. 1.



Une masse matérielle glisse sur une surface; aucune pesanteur, aucune force ne la sollicite; aucun frottement ne gêne son mouvement. [...] Elle décrit une ligne que les géomètres nomment **une ligne géodésique**. Lorsqu'on se donne la position initiale de notre point matériel et la direction de sa vitesse initiale, la géodésique qu'il doit décrire est bien déterminée [...]

Imaginons le front d'un taureau, avec les éminences d'où partent les cornes et les oreilles, et les cols qui se creusent entre ces éminences; mais allongeons sans limite ces cornes et ces oreilles, de telle façon qu'elles s'étendent à l'infini; nous aurons une des surfaces que nous voulons étudier [...]

Picasso 1950 : *Cabeza de toro*



Les géodésiques peuvent présenter bien des aspects différents. [...] les unes tournent sans cesse autour de la corne droite, les autres autour de la corne gauche, ou de l'oreille droite, ou de l'oreille gauche ; d'autres, plus compliquées, font alterner suivant certaines règles les tours qu'elles décrivent autour d'une corne avec les tours qu'elles décrivent autour de l'autre corne, ou de l'une des oreilles. Enfin, sur le front de notre taureau aux cornes et aux oreilles illimitées, il y aura des géodésiques qui s'en iront à l'infini, les unes en gravissant la corne droite, les autres en gravissant la corne gauche, d'autres encore en suivant l'oreille droite ou l'oreille gauche.

Malgré cette complication, si l'on connaît avec exactitude la position et la direction initiales [...], la ligne géodésique du mouvement sera déterminée sans aucune ambiguïté. [...]

Il en sera tout autrement si les conditions initiales ne sont pas données mathématiquement, mais pratiquement [...] On aura beau augmenter la précision avec laquelle sont déterminées les données pratiques, jamais la géodésique qui demeure à distance finie en tournant sans cesse autour de la corne droite ne pourra être débarrassée de ces compagnes infidèles qui, après avoir tourné comme elle autour de la même corne, s'écarteront indéfiniment. [...]

Si donc un point matériel est lancé sur la surface étudiée à partir d'une position et une vitesse géométriquement données, **la déduction mathématique peut déterminer la trajectoire** de ce point. Mais, **pour le physicien, cette déduction est à tout jamais inutilisable.**

J. Laskar

$$d(T) \simeq d_0 \cdot 10^{T/10}$$

d_0 distance entre deux conditions initiales.

$d(T)$ distance après un temps T , exprimé en **millions d'années**.

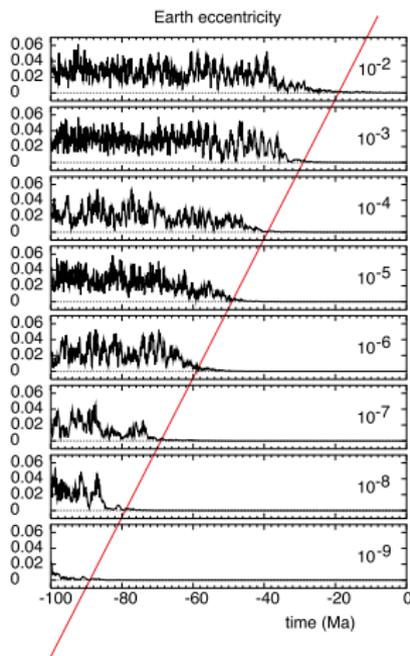
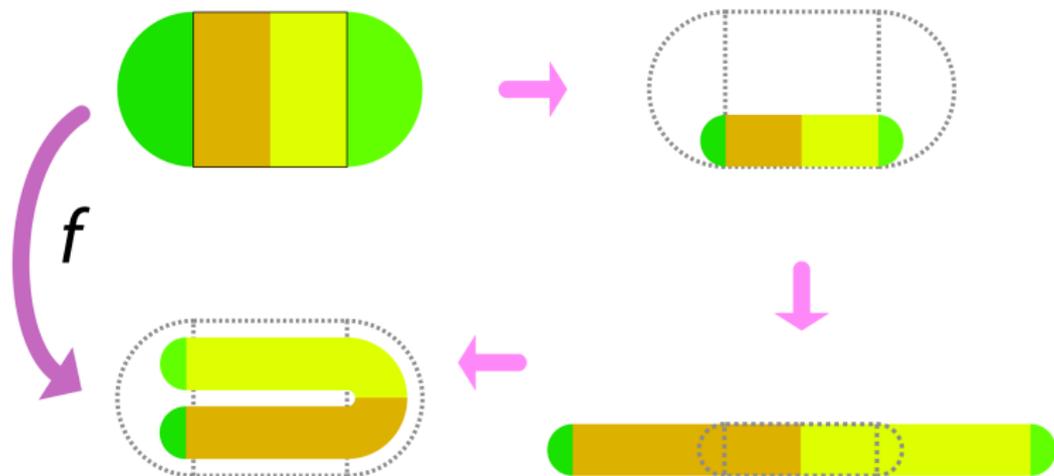


Figure 1: Error in the eccentricity of the Earth resulting from an initial change of 10^{-n} radian in the perihelion of the Earth at the origin. After about $n \times 10$ millions of years, the exponential divergence of the orbits dominates, and the solutions are no longer valid. Error in eccentricity is plotted versus time (in Ma). (Laskar, 1999)

Pourquoi les météorologistes ont-ils tant de peine à prédire le temps avec quelque certitude ? [...] Nous voyons que les grandes perturbations se produisent généralement dans les régions où l'atmosphère est en équilibre instable. Les météorologistes voient bien que cet équilibre est instable, qu'un cyclone va naître quelque part ; mais où, ils sont hors d'état de le dire ; **un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées.** Si on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard. Ici encore nous retrouvons le même contraste entre **une cause minime**, inappréciable pour l'observateur, et des **effets considérables**, qui sont quelquefois d'épouvantables désastres.

Le fer à cheval de Smale (1960)

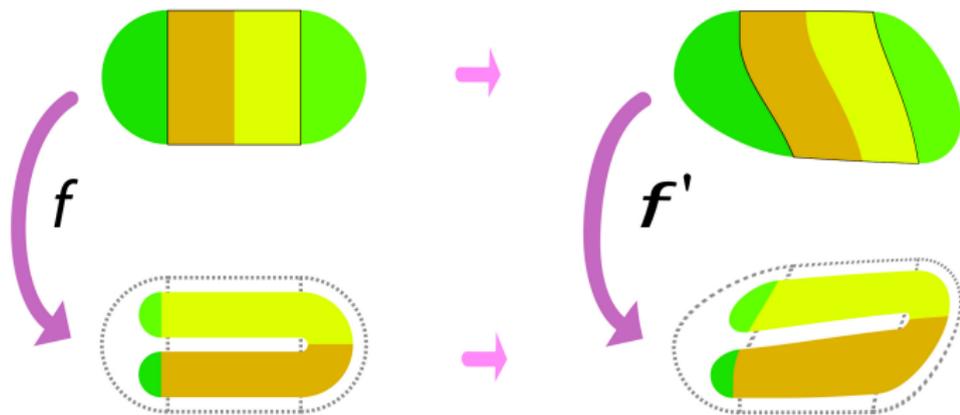


□ http://fr.wikipedia.org/wiki/Fer_à_cheval_de_Smale

Théorème (Smale) : Le fer à cheval est

- chaotique **ET**
- structurellement stable.

Stabilité structurelle



“Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer vous répondre ; mais, comme j’ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu’il y a de plus extraordinaire, c’est que ma réponse sera juste.” (Poincaré 1908)

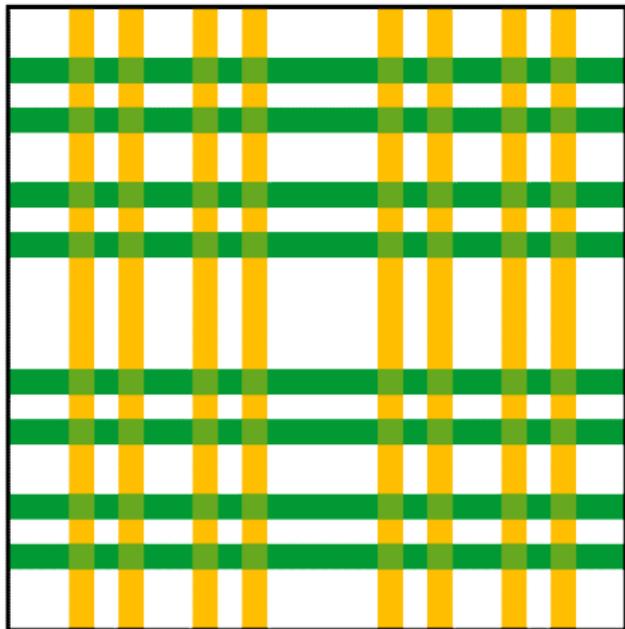
Le fer à cheval de Smale (1960)

On peut repérer un point par une suite de symboles
 G (*auche*), D (*roite*), infinie des deux côtés.

...GGDDGDGDGGG|DGGDDGGDGGGDDDDG....

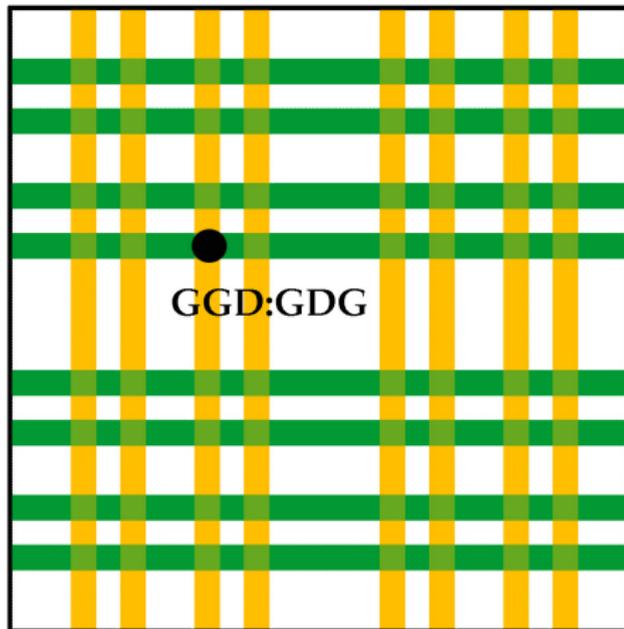
Dynamique “symbolique” initiée par Hadamard.

Le fer à cheval de Smale (1960)



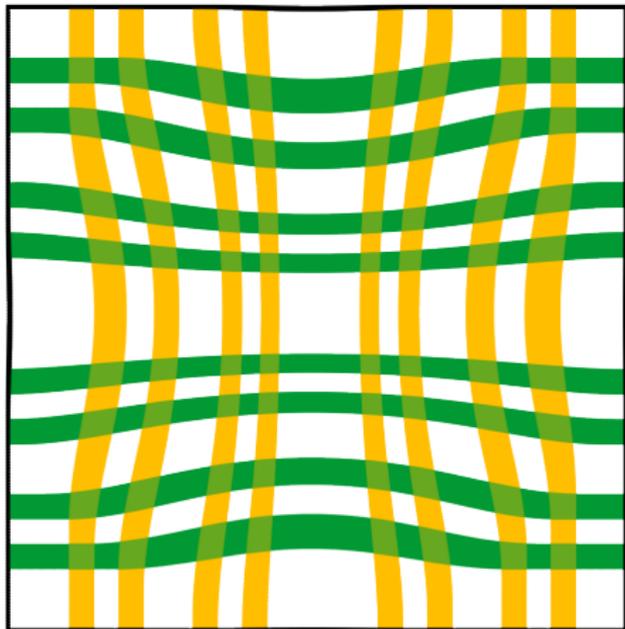
http://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe_map

Le fer à cheval de Smale (1960)



http://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe_map

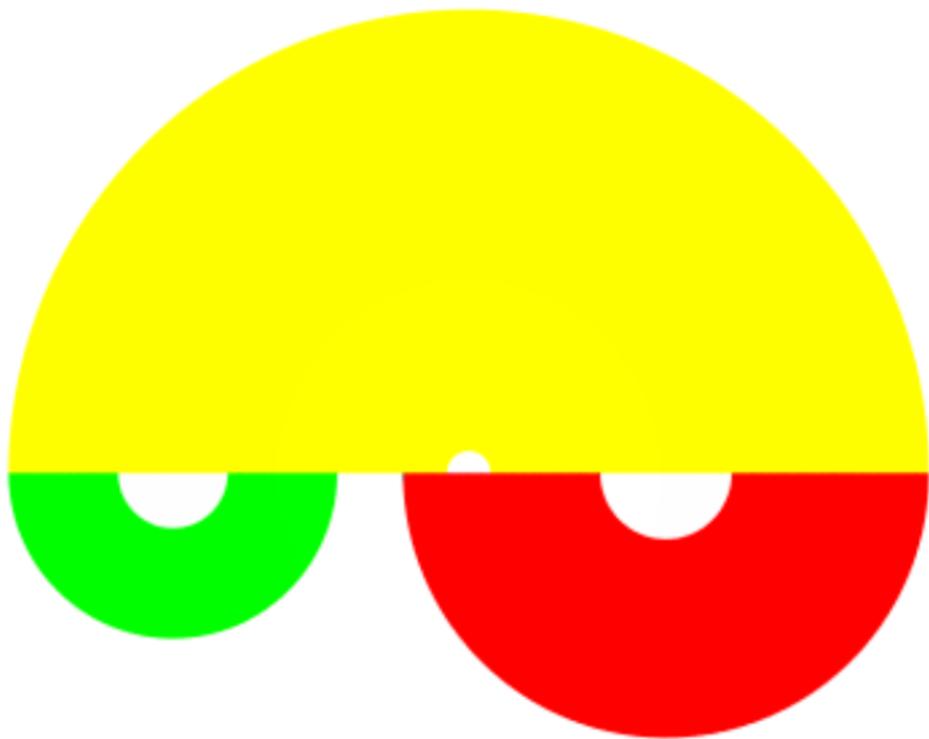
Le fer à cheval de Smale (1960)



http://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe_map

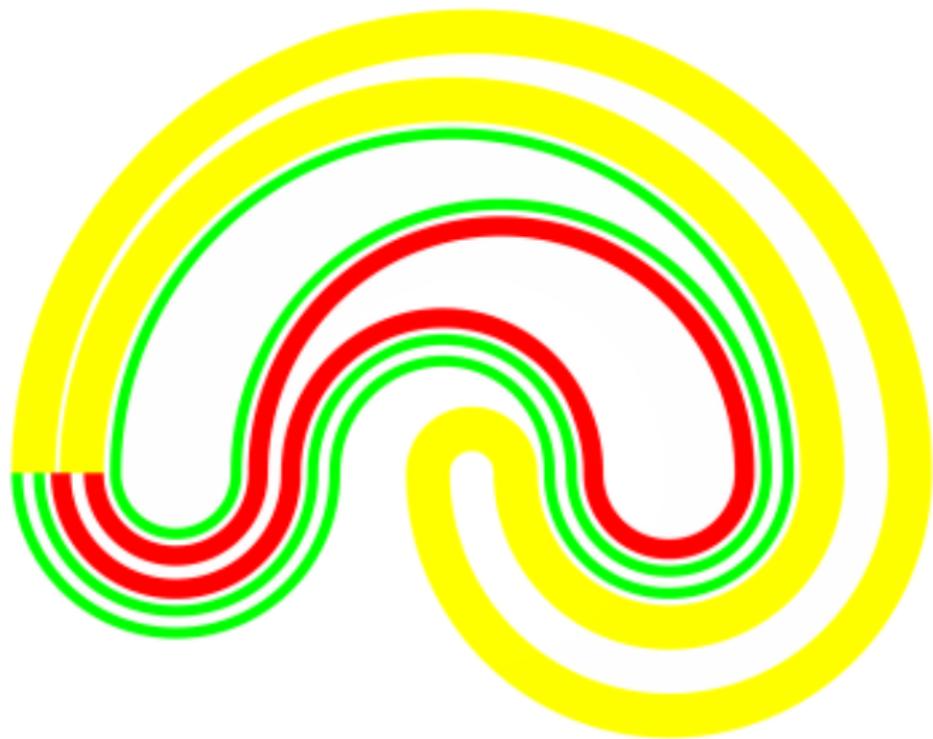
Des systèmes hyperboliques

Hyperbolique = Présence de dilatation et de contraction



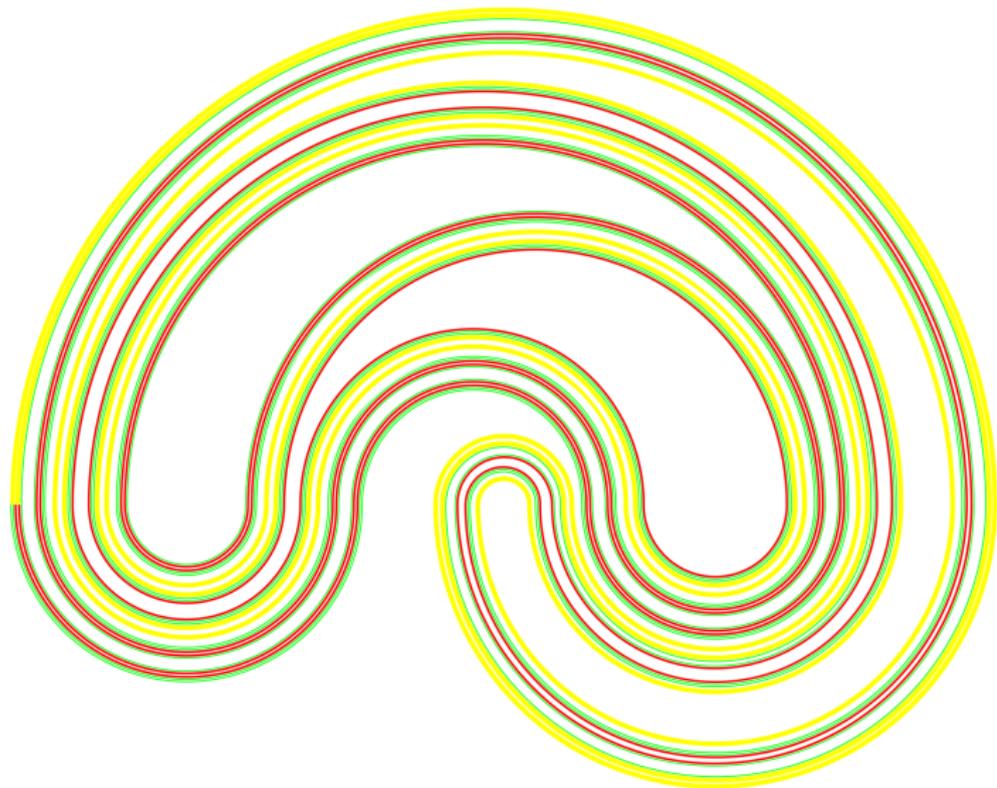
Des systèmes hyperboliques

Hyperbolique = Présence de dilatation et de contraction



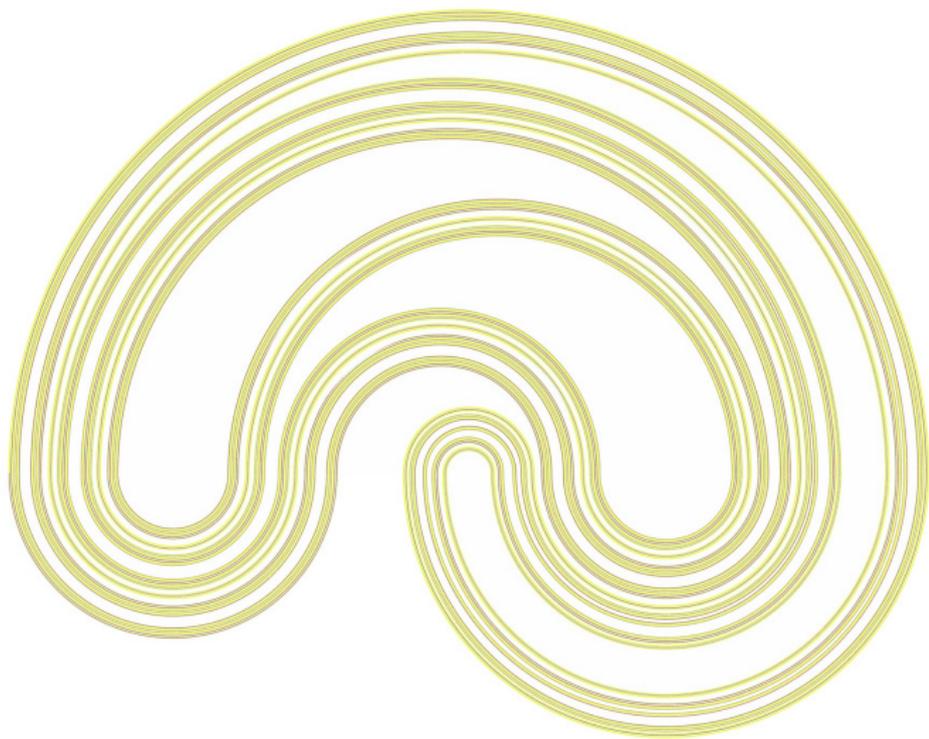
Des systèmes hyperboliques

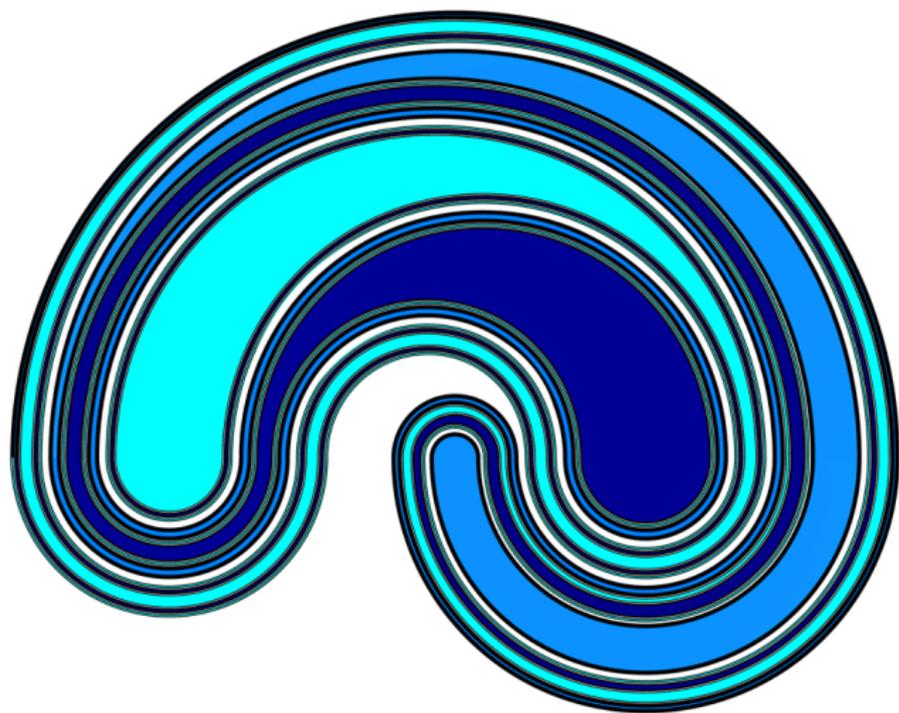
Hyperbolique = Présence de dilatation et de contraction



Des systèmes hyperboliques

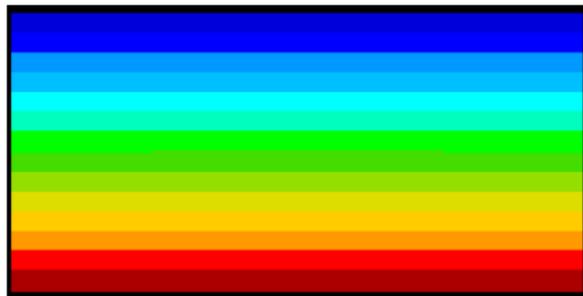
Hyperbolique = Présence de dilatation et de contraction





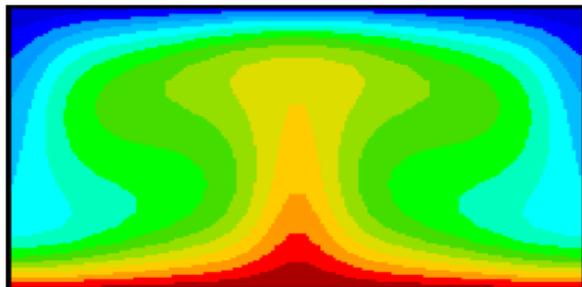
E. Lorenz (1962) : convection dans l'atmosphère

Deterministic Nonperiodic Flow
(Journal of the atmospheric sciences)



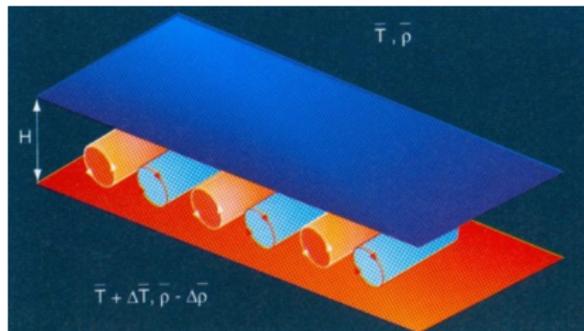
E. Lorenz (1962) : convection dans l'atmosphère

Deterministic Nonperiodic Flow
(Journal of the atmospheric sciences)



E. Lorenz (1962) : convection dans l'atmosphère

Deterministic Nonperiodic Flow
(Journal of the atmospheric sciences)



$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 10(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}$$

L'équation différentielle de Lorenz n'est pas hyperbolique et pourtant elle est robuste !

L'équation différentielle de Lorenz n'est pas hyperbolique et pourtant elle est robuste !

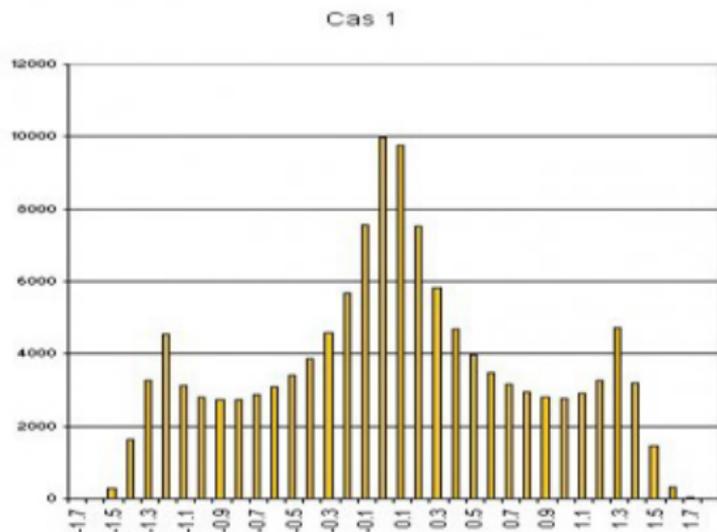
- “Si un battement d’ailes d’un papillon peut engendrer un ouragan, la même chose est vraie pour tous les autres battements d’ailes du même papillon, mais aussi pour les battements d’ailes des millions d’autres papillons, sans parler de l’influence des activités des innombrables autres créatures plus puissantes, comme les hommes par exemple !”
- “J’avance l’idée qu’au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d’apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu’ils peuvent faire, c’est de modifier l’ordre dans lequel ces événements se produisent.”

- “Si un battement d’ailes d’un papillon peut engendrer un ouragan, la même chose est vraie pour tous les autres battements d’ailes du même papillon, mais aussi pour les battements d’ailes des millions d’autres papillons, sans parler de l’influence des activités des innombrables autres créatures plus puissantes, comme les hommes par exemple !”
- “J’avance l’idée qu’au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d’apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu’ils peuvent faire, c’est de modifier l’ordre dans lequel ces événements se produisent.”

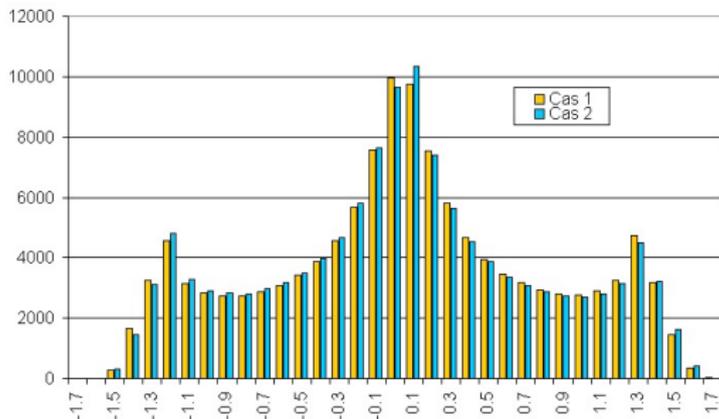
avec J. Leys \square

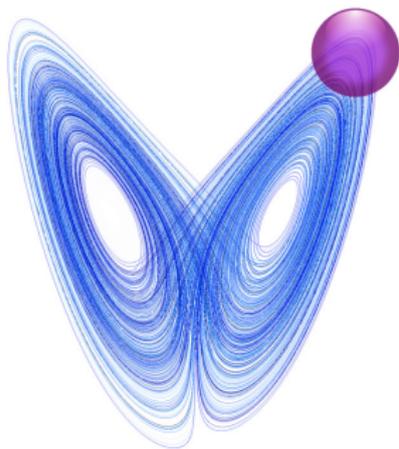
Deux conditions initiales

avec J. Leys



La statistique **semble** ne pas dépendre de la condition initiale.





$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{Leb}(\{t \in [0, T] | x(t) \in B\}) = m(B)$$

La limite ne dépend pas de $x(0)$...

Une dynamique possède **une mesure SRB m**

- s'il existe un **bassin d'attraction** E dans l'espace des conditions initiales dont le volume (de Lebesgue) non nul,
- et si, pour **presque toute** position initiale $x(0)$ dans le bassin E , et pour toute petite boule B dans l'espace, la moyenne du temps passé dans B par la trajectoire $x(t)$ issue de $x(0)$ entre l'instant 0 et l'instant T tend vers une limite $m(B)$ quand la période de temps $[0, T]$ tend vers l'infini.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{Leb}(\{t \in [0, T] | x(t) \in B\}) = m(B) \text{ si } x(0) \in E.$$

Noter que la limite ne dépend pas de $x(0)$...

Théorème (Sinai-Ruelle-Bowen) (\simeq 1970'): Les systèmes hyperboliques possèdent une mesure SRB.

... BEAUCOUP DE TRAVAIL par beaucoup de monde...

Théorème (Tucker) (2001) : Le système de Lorenz possède une mesure SRB.

ENCORE BEAUCOUP DE TRAVAIL par beaucoup de monde...

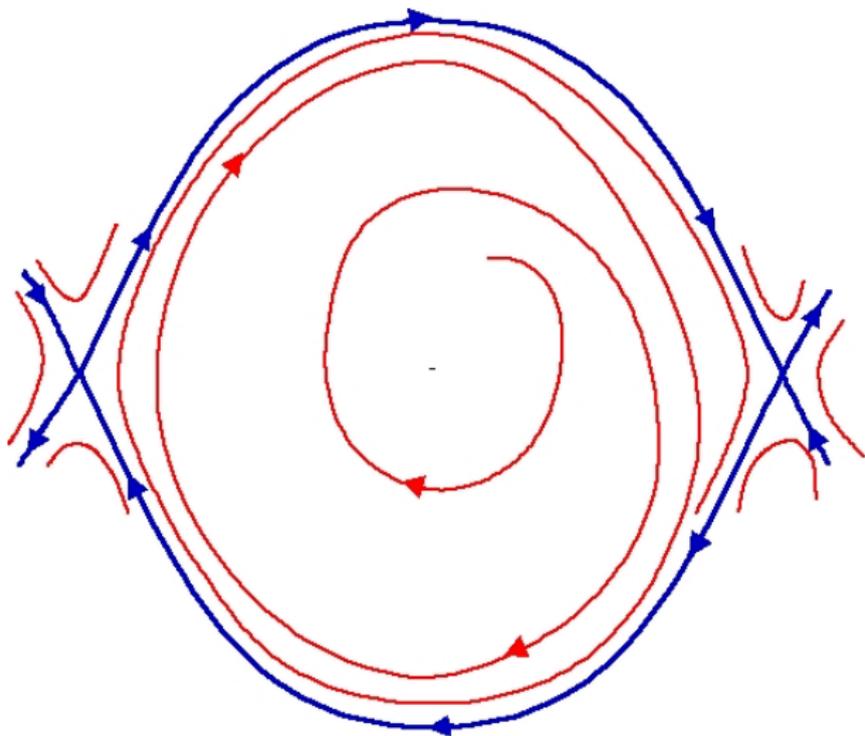
Théorème (Sinai-Ruelle-Bowen) (\simeq 1970'): Les systèmes hyperboliques possèdent une mesure SRB.

... BEAUCOUP DE TRAVAIL par beaucoup de monde...

Théorème (Tucker) (2001) : Le système de Lorenz possède une mesure SRB.

ENCORE BEAUCOUP DE TRAVAIL par beaucoup de monde...

Le contre-exemple de Bowen



Pour presque toutes les dynamiques, il existe un **nombre fini** de mesures SRB dont les bassins recouvrent presque toutes les positions initiales ?

Presque toutes ?

- Au sens topologique (Baire) ?
- Au sens de la prévalence (Lebesgue) ?

Pour presque toutes les dynamiques, il existe un **nombre fini** de mesures SRB dont les bassins recouvrent presque toutes les positions initiales ?

Presque toutes ?

- Au sens topologique (Baire) ?
- Au sens de la prévalence (Lebesgue) ?

Pour presque toutes les dynamiques, il existe un **nombre fini** de mesures SRB dont les bassins recouvrent presque toutes les positions initiales ?

Presque toutes ?

- Au sens topologique (Baire) ?
- Au sens de la prévalence (Lebesgue) ?

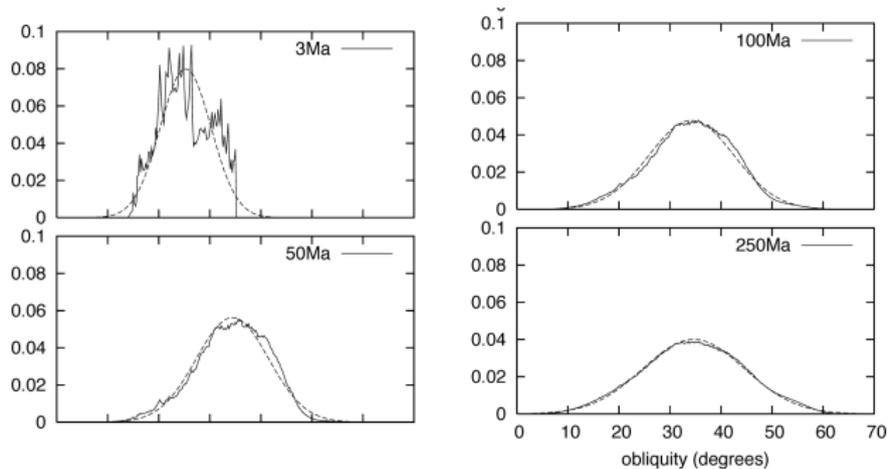
Presque toutes les dynamiques sont **stochastiquement stables** ?

“Une perturbation **aléatoire** suffisamment petite est régie par une mesure SRB assez proche de la mesure SRB initiale”

Presque toutes les dynamiques sont **stochastiquement stables** ?

“Une perturbation **aléatoire** suffisamment petite est régie par une mesure SRB assez proche de la mesure SRB initiale”

Dans le système solaire



Laskar 2008

Dans le système solaire

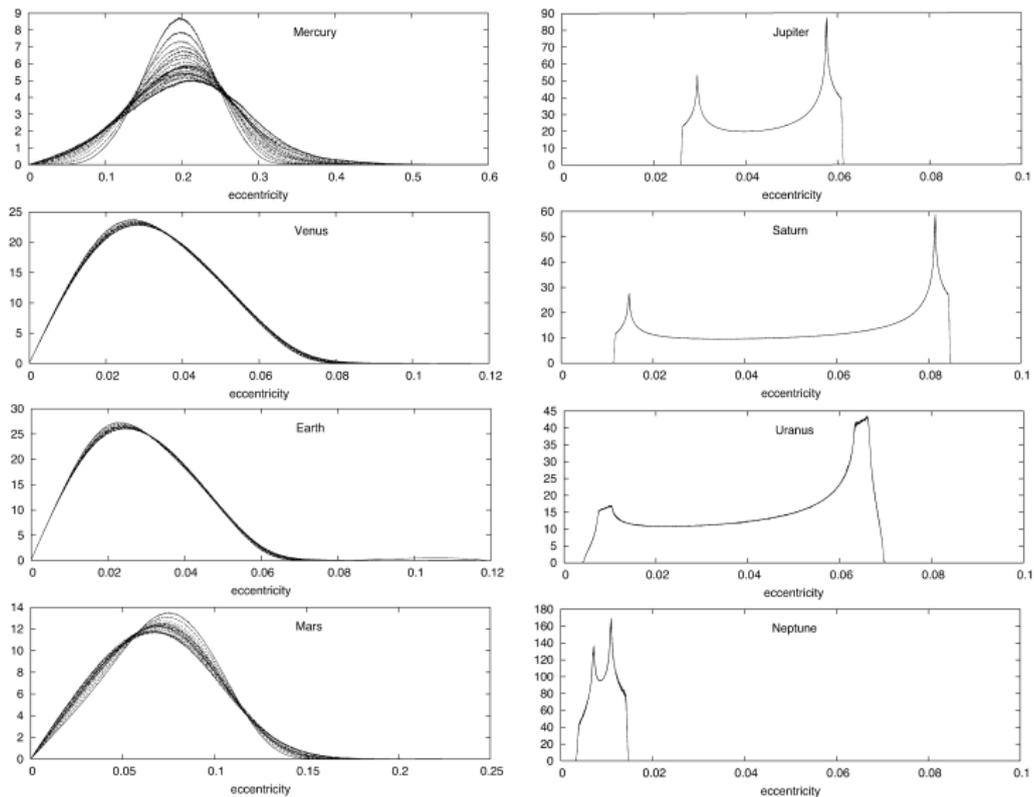


Fig. 9. Normalized density functions for the eccentricities of the planets. The statistic is established with 1001 solutions with very close initial conditions. The evolution is followed over 19 intervals of 250 Myr, represented by the different curves. The variation of these curves thus reflects the chaotic diffusion of the solutions. For the outer planets, all 19 curves are practically identical.

Y a-t-il du chaos dans l'atmosphère ?

- Le modèle simplifié de Lorenz s'applique-t-il à l'atmosphère ?
- 1966 : Arnold : *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Annales de l'Institut Fourier*. L'équation du mouvement d'un fluide parfait est analogue à celle qui décrit les géodésiques en courbure négative. Lien avec l'article d'Hadamard.
- R. Robert (2001) *L'effet papillon n'existe plus !* Gazette des Mathématiciens. Point de vue lagrangien vs. eulérien. Variables macroscopiques vs. microscopiques.

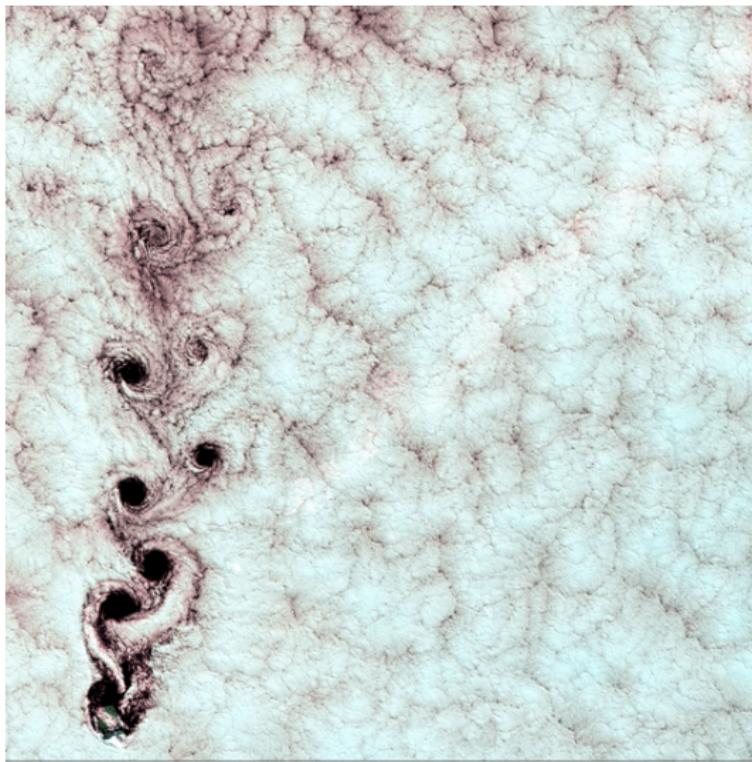
Y a-t-il du chaos dans l'atmosphère ?

- Le modèle simplifié de Lorenz s'applique-t-il à l'atmosphère ?
- 1966 : Arnold : *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Annales de l'Institut Fourier*. L'équation du mouvement d'un fluide parfait est analogue à celle qui décrit les géodésiques en courbure négative. Lien avec l'article d'Hadamard.
- R. Robert (2001) *L'effet papillon n'existe plus !* Gazette des Mathématiciens. Point de vue lagrangien vs. eulérien. Variables macroscopiques vs. microscopiques.

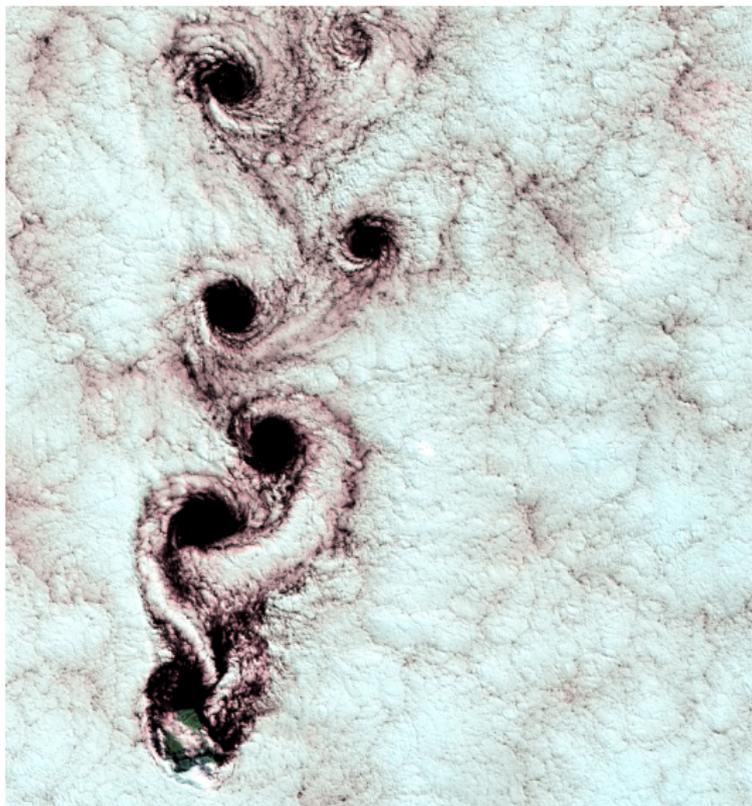
Y a-t-il du chaos dans l'atmosphère ?

- Le modèle simplifié de Lorenz s'applique-t-il à l'atmosphère ?
- 1966 : Arnold : *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Annales de l'Institut Fourier*. L'équation du mouvement d'un fluide parfait est analogue à celle qui décrit les géodésiques en courbure négative. Lien avec l'article d'Hadamard.
- R. Robert (2001) *L'effet papillon n'existe plus !* Gazette des Mathématiciens. Point de vue lagrangien vs. eulérien. Variables macroscopiques vs. microscopiques.

Y a-t-il du chaos dans l'atmosphère, des mesures SRB ?



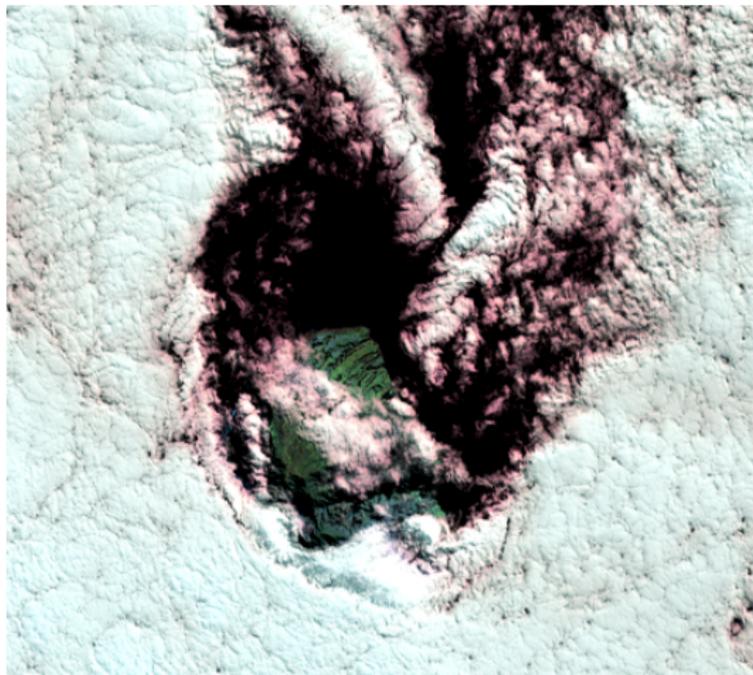
Y a-t-il du chaos dans l'atmosphère, des mesures SRB ?



Y a-t-il du chaos dans l'atmosphère, des mesures SRB ?



Y a-t-il du chaos dans l'atmosphère, des mesures SRB ?



Le chaos est-il fréquent ?

- Fixons un degré $d \geq 2$ et considérons l'espace vectoriel $E(d, n)$ des équations différentielles polynomiales X de degré d dans \mathbf{R}^n et $B(d, n)$ la boule unité dans $E(d, n)$.
- Soit $B_{chaos}(d, n) \subset B(d, n)$ l'espace des équations "chaotiques".
- Est-ce que $\text{Leb}(B_{chaos}(d, n))/\text{Leb}(B(d, n))$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini ?



Le chaos est-il fréquent ?

- Fixons un degré $d \geq 2$ et considérons l'espace vectoriel $E(d, n)$ des équations différentielles polynomiales X de degré d dans \mathbf{R}^n et $B(d, n)$ la boule unité dans $E(d, n)$.
- Soit $B_{chaos}(d, n) \subset B(d, n)$ l'espace des équations "chaotiques".
- Est-ce que $\text{Leb}(B_{chaos}(d, n))/\text{Leb}(B(d, n))$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini ?



Le chaos est-il fréquent ?

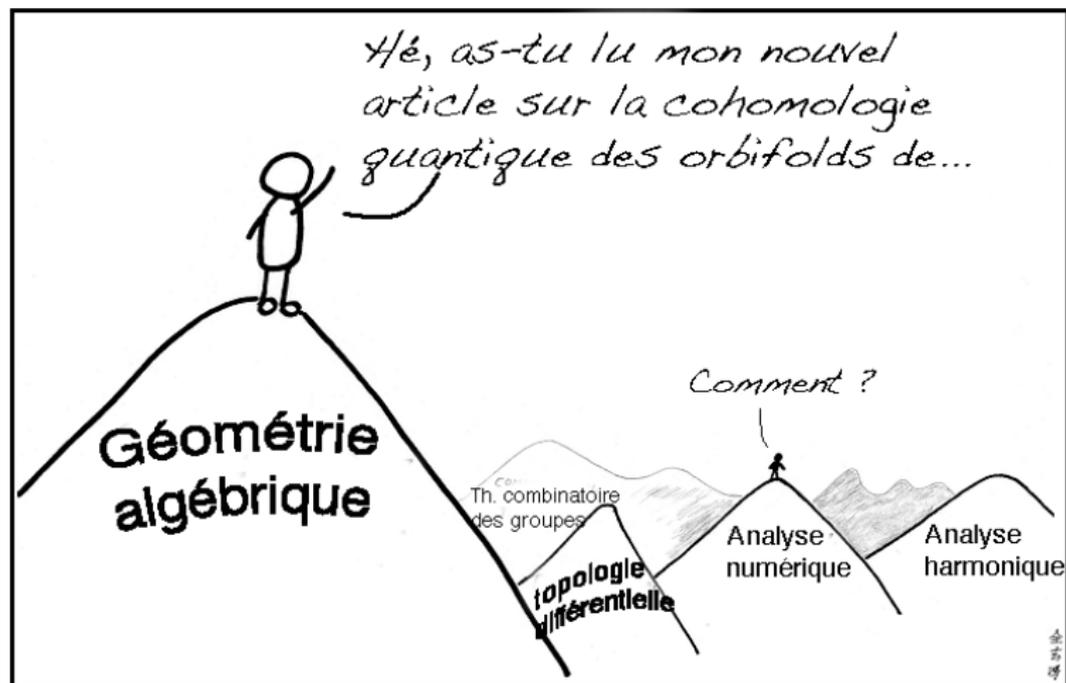
- Fixons un degré $d \geq 2$ et considérons l'espace vectoriel $E(d, n)$ des équations différentielles polynomiales X de degré d dans \mathbf{R}^n et $B(d, n)$ la boule unité dans $E(d, n)$.
- Soit $B_{chaos}(d, n) \subset B(d, n)$ l'espace des équations "chaotiques".
- Est-ce que $\text{Leb}(B_{chaos}(d, n))/\text{Leb}(B(d, n))$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini ?



- Rendre effectif l'usage des mesures SRB ? Limite quand le temps tend vers l'infini ?
- $N \rightarrow \infty$ versus $T \rightarrow \infty$,
- Le cas conservatif.

- Rendre effectif l'usage des mesures SRB ? Limite quand le temps tend vers l'infini ?
- $N \rightarrow \infty$ versus $T \rightarrow \infty$,
- Le cas conservatif.

- Rendre effectif l'usage des mesures SRB ? Limite quand le temps tend vers l'infini ?
- $N \rightarrow \infty$ versus $T \rightarrow \infty$,
- Le cas conservatif.



Le paysage des mathématiques modernes

<http://abstrusegoose.com/a/211.htm>