L'Histoire de la méthode de Newton

5 mars 2015

Isaac Newton

Isaac Newton

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

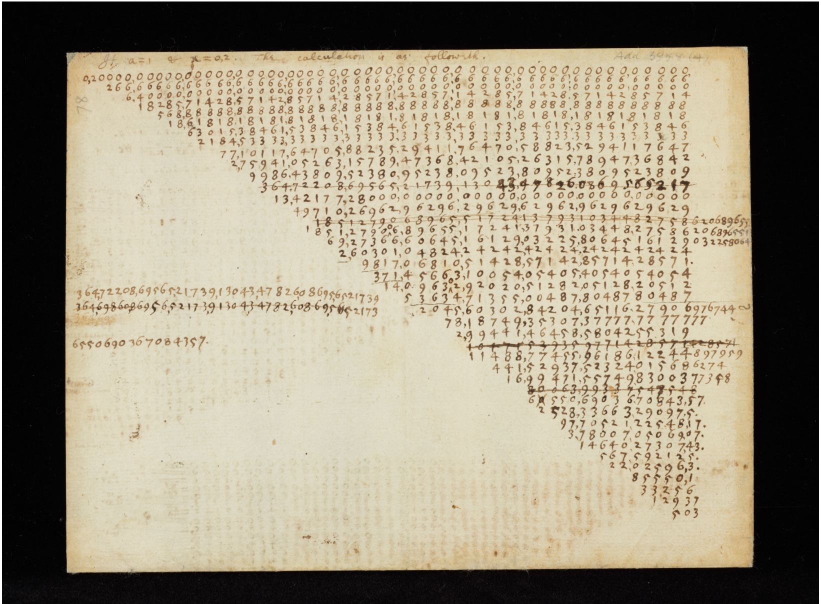
Isaac Newton

- Naissance en 1642 (ou 1643).
- 1661 : entrée à Trinity College. « Plato is my friend, Aristotle is my friend, but my best friend is truth ».
- 1663 : il lit Euclide !
- 1665 : la peste. « I was in the prime of my age ». La méthode des fluxions.
- 1669 : *De Analysi*.
- 1670 : Lucasian professor.
- 1671 : *De Methodis Serierum et Fluxionum*.
- 1687 : *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*.
- 1693 : Crise.
- 1696 : Master of the Royal Mint.
- Mort en 1727.

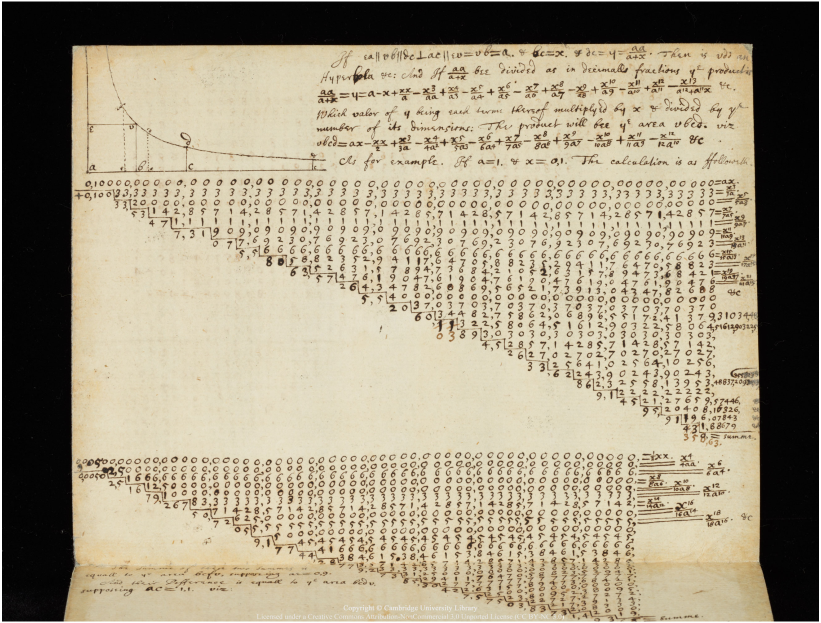
1665-66 : Annus mirabilis

« In the beginning of the year 1665 I found the Method of approximating series and the Rule for reducing any dignity of any Binomial into such a series. The same year in May I found the method of Tangents of Gregory and Slusius, and in November had the direct method of fluxions and the next year in January had the theory of Colours and in May following I had entrance into ye inverse method of fluxions. And the same year I began to think of gravity extending to ye orb of the Moon. All this was in the two plague years of 1665–1666. For in those days I was in the prime of my age for invention and minded Mathematicks and Philosophy more then at any time since. »

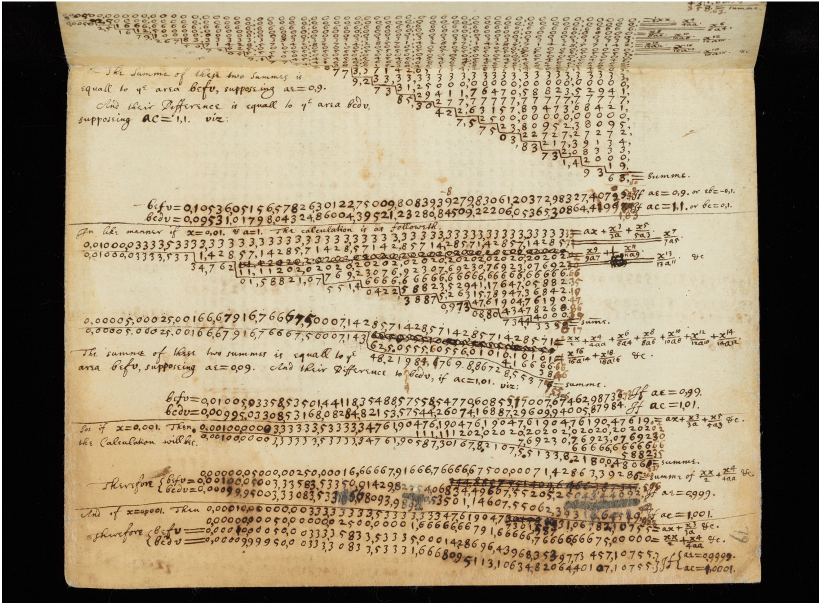
1665 : calcul de l'aire sous une hyperbole



1665 : calcul de l'aire sous une hyperbole



1665 : calcul de l'aire sous une hyperbole


The Summe of these two Summes is equall to y^e area bcfv, supposing ae=0,9.
And their Difference is equall to y^e area bcdv, supposing ac=1,1. viz:

bcfv=0,105360515657826301227500980839392798306120372983274079
bcdv=0,095310179804324860043952123280845092220605365308644199
If ae=0,9. or eb=−0,1. If ac=1,1. or bc=0,1.

In like manner if x=0,01. & a=1. The calculation is as followeth.

The summe of these two summes is equall to y^e area bcfv, supposing ae=0,99. And their Difference to bcdv, if ac=1,01. viz:

bcfv=0,010050335853501441183548857558547796085
bcdv=0,009950330853168082848215357544260741688
If ae=0,99. If ac=1,01.

Soe if x=0,001. Then the Calculation will bee.

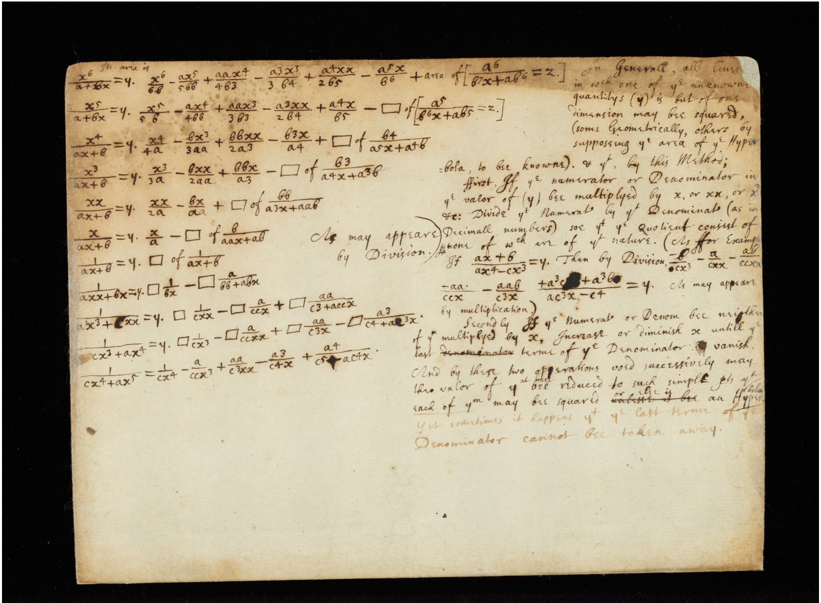
Therefore { bcfv / bcdv
If ae=0,999. If ac=1,001.

And if x=0,0001. Then

Therefore { bcfv / bcdv
If { ae=0,9999. ac=1,0001.

1665 : calcul de l'aire sous une hyperbole

1665 : calcul de l'aire sous une hyperbole



Its area is

$\frac{x^6}{a+bx}=y.\quad \frac{x^6}{6b}-\frac{ax^5}{5bb}+\frac{aax^4}{4b^3}-\frac{a^3x^3}{3b^4}+\frac{a^4xx}{2b^5}-\frac{a^5x}{b^6}+$ area of $\left[\frac{a^6}{b^7x+ab^6}=z.\right]$

$\frac{x^5}{a+bx}=y.\quad \frac{x^5}{5b}-\frac{ax^4}{4bb}+\frac{aax^3}{3b^3}-\frac{a^3xx}{2b^4}+\frac{a^4x}{b^5}-\square$ of $\left[\frac{a^5}{b^6x+ab^5}=z.\right]$

$\frac{x^4}{ax+b}=y.\quad \frac{x^4}{4a}-\frac{bx^3}{3aa}+\frac{bbxx}{2a^3}-\frac{b^3x}{a^4}+\square$ of $\frac{b^4}{a^5x+a^4b}$

$\frac{x^3}{ax+b}=y.\quad \frac{x^3}{3a}-\frac{bxx}{2aa}+\frac{bbx}{a^3}-\square$ of $\frac{b^3}{a^4x+a^3b}$

$\frac{xx}{ax+b}=y.\quad \frac{xx}{2a}-\frac{bx}{aa}+\square$ of $\frac{bb}{a^3x+aab}$

$\frac{x}{ax+b}=y.\quad \frac{x}{a}-\square$ of $\frac{b}{aax+ab}$ As may appeare by Division.

$\frac{1}{ax+b}=y.\quad \square$ of $\frac{1}{ax+b}$

$\frac{1}{axx+bx}=y.\quad \square\,\frac{1}{bx}-\square\,\frac{a}{bb+abx}$

$\frac{1}{ax^3+cxx}=y.\quad \square\,\frac{1}{cxx}-\square\,\frac{a}{ccx}+\square\,\frac{aa}{c^3+accx}$

$\frac{1}{cx^3+ax^4}=y.\quad \square\,\frac{1}{cx^3}-\square\,\frac{a}{ccxx}+\square\,\frac{aa}{c^3x}-\square\,\frac{a^3}{c^4+ac^3x}.$

$\frac{1}{cx^4+ax^5}=\frac{1}{cx^4}-\frac{a}{ccx^3}+\frac{aa}{c^3xx}-\frac{a^3}{c^4x}+\frac{a^4}{c^5+ac^4x}.$

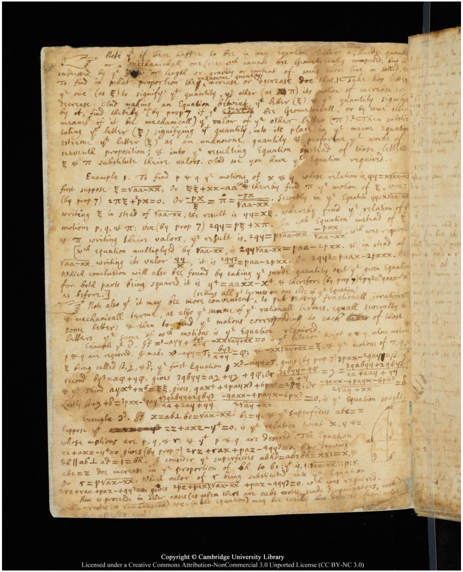
In Generall, all lines in wch one of ye unknowne quantitys (y) is but of one dimension may bee squared, (some Geometrically, others by supposeing ye area of ye Hyperbola, to bee knowne). & yt, by this Method;

ffirst, If ye numerator or Denominator in ye valor of (y) bee multiplyed by x, or xx, or x^3 &c: Divide yt Numerat by yt Denominat (as in Decimall numbers) soe yt ye Quotient consist of termes none of wch are of yt nature. (As for Example If $\frac{ax+b}{ax^4-cx^3}=y$. Then by Division, $\frac{-b}{cx^3}-\frac{a}{cxx}-\frac{ab}{ccxx}$ $\frac{-aa}{ccx}-\frac{aab}{c^3x}\ \frac{+a^3c\ +a^3b}{ac^3x-c^4}=y$. As may appeare by multiplication.)

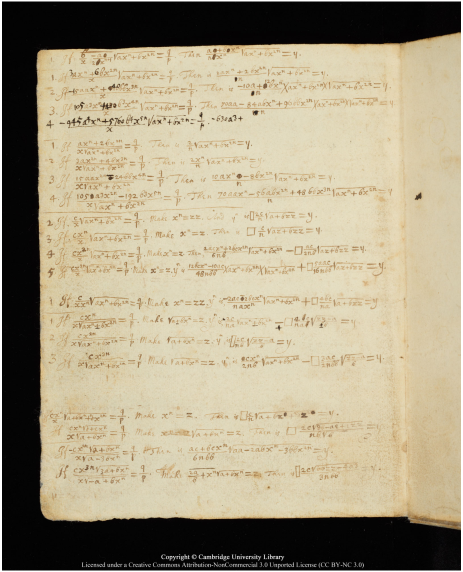
Secondly If ye Numerat or Denom bee neither of ym multiplyed by x, Increase or diminish x untill ye last ~~denominator~~ terme of ye Denominator vanish. And by these two opperations used successively may the valor of y at last bee reduced to such simple pts yt each of ym may bee squared ~~unlesse it bee~~ or else is an Hyperbola.

Yet sometimes it happens yt ye last terme of ye Denominator cannot bee taken away.

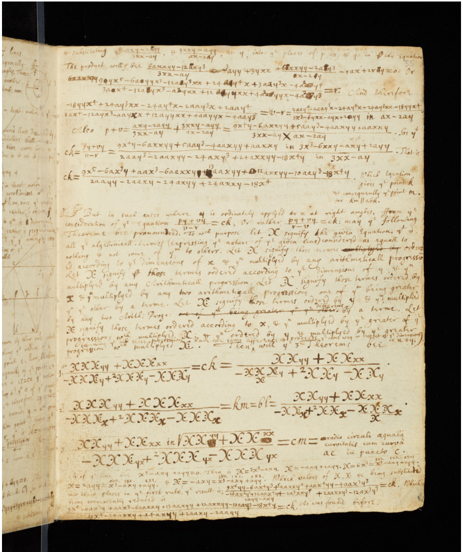
Octobre 1666 : texte sur les fluxions



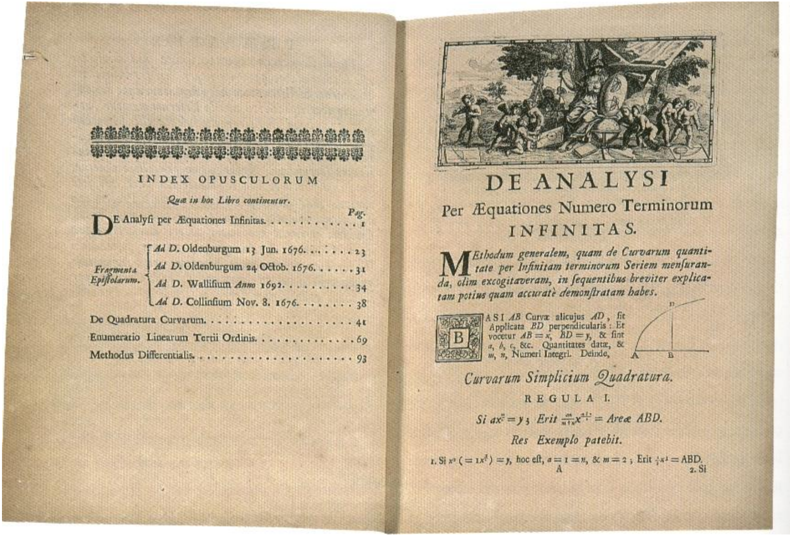
Octobre 1666 : texte sur les fluxions



Octobre 1666 : texte sur les fluxions



Juillet 1669 / 1771 : De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas



INDEX OPUSCULORUM

Quæ in hoc Libro continentur.

DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum

INFINITAS.

METhodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensurandam, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, sit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur *AB* = *x*, *BD* = *y*, & sint *a*, *b*, *c*, &c. Quantitates datæ, & *m*, *n*, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Areæ ABD.*

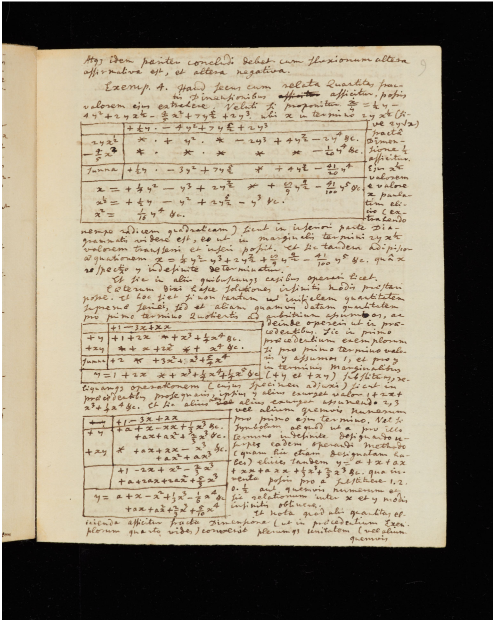
Res Exemplo patebit.

1. Si x^2 ($= 1x^{\frac{2}{1}}$) $= y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

A

2. Si

1671, De methodis serierum et fluxionum



Atque idem pariter concludi debet cum fluxionum altera affirmativa est, et altera negativa. 9

Exemp. 4. Haud secus cum relata Quantitas fractis Dimensionibus ~~afficitur~~ afficitur, posis valorem ejus extrahere. Veluti si proponitur $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{2}y - 4y^2 + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$. ubi x in termino $2yx^{\frac{1}{2}}$ (sive $2y\sqrt{x}$) fractâ Dimensione $\frac{1}{2}$ afficitur. Ejus $x^{\frac{1}{2}}$ valorem e valore x paulatim elicio (extrahendo

	$+\frac{1}{2}y \cdot -4y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$
$2yx^{\frac{1}{2}}$	$* \cdot + y^2 \cdot * - 2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^4$ &c.
$-\frac{4}{5}x^2$	$* \cdot * \cdot * \quad * \quad * - \frac{1}{20}y^4$ &c.
summa	$+\frac{1}{2}y \cdot -3y^2 + 7y^{\frac{5}{2}} \quad * + 4y^{\frac{7}{2}} - \frac{41}{20}y^4$
	$x = +\frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} \quad * + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c.
	$x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - y^2 + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$ &c.
	$x^2 = \frac{1}{16}y^4$ &c.

nempe radicem quadraticam) sicut in inferiori parte Diagrammatis videre est, eo ut in marginalis termini $2yx^{\frac{1}{2}}$ valorem transferri et inseri possit. Et sic tandem adipiscor æquationem $x = \frac{1}{4}y^2 - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$ &c. quâ x respectu y indefinite determinatur.

Et sic in aliis quibuscunque casibus operari licet.

Cæterum dixi hasce solutiones infinitis modis præstari posse. Et hoc fiet si non tantum initialem quantitatem supremæ seriei, sed et aliam quamvis datam quantitatem pro primo termino Quotientis ad arbitrium assumas, ac deinde opereris ut in præcedentibus. Sic in primo præcedentium exemplorum si pro primo termino valoris y assumas 1, et pro y in terminis Marginalibus ($+y$ et $+xy$) substituas, reliquamque operationem (cujus specimen adjunxi) sicut in præcedentibus prosequaris, ipsius y alius exurget valor $1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+1 + 2x \quad * + x^3 + \frac{1}{4}x^4$ &c.
$+xy$	$* + x + 2x^2 \quad * + x^4$ &c.
summa	$+2 \quad * + 3x^2 + x^3 + \frac{5}{4}x^4$
	$y = 1 + 2x \quad * + x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$ &c

Et sic alius atque ~~vel~~ alius exurget assumendo 2, 3 vel alium quemvis numerum pro primo ejus termino. Vel si symbolum aliquod ut a pro illo termino indefinite designando, insuper eadem operandi methodo (quam hic etiam designatam habes) elicies tandem $y = a + x + ax + xx + axx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^3$ &c. qua inventa posis pro a substituere 1. 2. 0. $\frac{1}{2}$ aut quemvis numerum et sic relationum inter x et y modis infinitis obtinere.

~~$+y$~~	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+a + x - xx + \frac{1}{3}x^3$ &c. $+ax + ax^2 + \frac{2}{3}x^3$ &c.
$+xy$	$* \quad +ax + xx - x^3$ &c. $+ax^2 + ax^3$
	$+1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3$ $+a + 2ax + 2ax^2 + \frac{5}{3}x^3$
	$y = a + x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$ &c $+ax + ax^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{10}x^4$

Et nota quod ubi quantitas eliciienda afficitur fracta Dimensione (ut in præcedentium Exemplorum quarto vides) convenit plerumque unitatem (vel alium quemvis

1671, The method of fluxions and infinite series, traduit en 1736

THE

METHOD of FLUXIONS

AND

INFINITE SERIES;

WITH ITS

Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR

Sir ISAAC NEWTON, *Kt.*

Late Prefident of the Royal Society.

Tranflated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL *not yet made publick.*

To which is fubjoin'd,

A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,

Confifting of

ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,

In order to make this Treatife

A compleat Inftitution for the ufe of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M.A. and F.R.S.

Mafter of Sir *Jofeph Williamfon*'s free Mathematical-School at *Rochefter*.

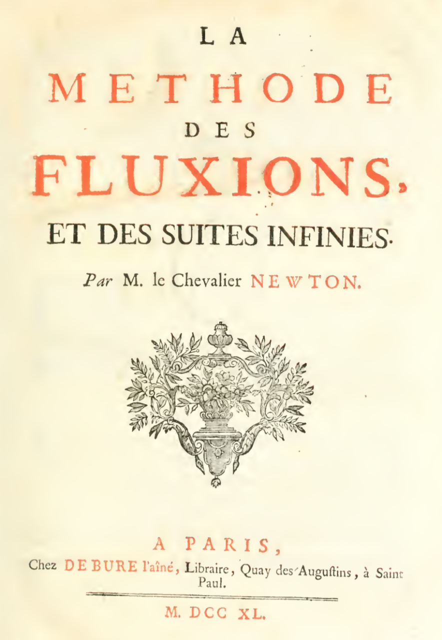
LONDON:

Printed by HENRY WOODFALL;

And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.

M.DCC.XXXVI.

Traduction de Buffon



LA

METHODE

DES

FLUXIONS,

ET DES SUITES INFINIES.

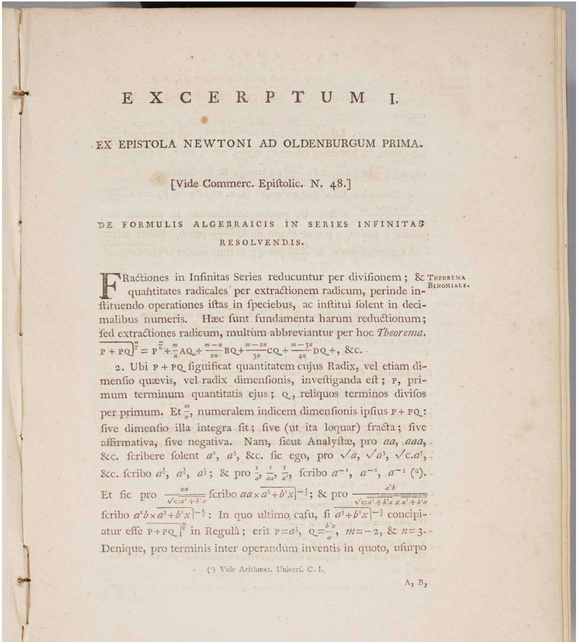
Par M. le Chevalier NEWTON.

A PARIS,

Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Auguſtins, à Saint Paul.

M. DCC XL.

Juin et Octobre 1676 : Epistola Prior / Posterior



EXCERPTUM I.

EX EPISTOLA NEWTONI AD OLDENBURGUM PRIMA.

[Vide Commerc. Epiſtolic. N. 48.]

DE FORMULIS ALGEBRAICIS IN SERIES INFINITAS RESOLVENDIS.

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus, ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multùm abbreviantur per hoc *Theorema.* THEOREMA BINOMIALE.

$$\overline{P + PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ +, \&c.$$

2. Ubi P + PQ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt; P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius P + PQ: ſive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro *aa*, *aaa*, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} (a). Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{c: \overline{a^3+b^2x}}}$ ſcribo $aa \times \overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{a^2b}{\sqrt{c: \overline{a^3+b^2x} \times \overline{a^3+b^2x}}}$ ſcribo $a^2b \times \overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$: In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regulâ; erit $P=a^3$, $Q=\frac{b^2x}{a^3}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, uſurpo

(a) Vide Arithmet. Univerſ. C. I.

A, B,

(a) I can hardly tell with what pleasure I have read the letters of those very distinguished men Leibniz and Tschirnhaus. Leibniz's method for obtaining convergent series is certainly very elegant, and it would have sufficiently revealed the genius of its author, even if he had written nothing else. But what he has scattered elsewhere throughout his letter is most worthy of his reputation—it leads us also to hope for very great things from him. The variety of ways by which the same goal is approached has given me the greater pleasure, because three methods of arriving at series of that kind had already become known to me, so that I could scarcely expect a new one to be communicated to us. One of mine I have described before; I now add another, namely, that by which I first chanced on these series—for I chanced on them before I knew the divisions and extractions of roots which I now use. And an explanation of this will serve to lay bare, what Leibniz desires from me, the basis of the theorem set forth near the beginning of the former letter.

At the beginning of my mathematical studies, when I had met with the works of our celebrated Wallis, on considering the series by the intercalation of which he himself exhibits the area of the circle and the hyperbola, the fact that, in the series of curves whose common base or axis is x and the ordinates

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{3}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{5}{2}},\quad \text{etc.},$$

if the areas of every other of them, namely

$$x,\quad x-\tfrac{1}{3}x^3,\quad x-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5,\quad x-\tfrac{3}{3}x^3+\tfrac{3}{5}x^5-\tfrac{1}{7}x^7,\quad \text{etc.}$$

could be interpolated, we should have the areas of the intermediate ones, of which the first $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ is the circle: in order to interpolate these series I noted that in all of them the first term was x and the second terms $\frac{0}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3$, etc., were in arithmetical progression, and hence that the first two terms of the series to be intercalated ought to be $x-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$, $x-\frac{1}{3}(\frac{3}{2}x^3)$, $x-\frac{1}{3}(\frac{5}{2}x^3)$, etc. To intercalate the rest I began to reflect that the denominators $1, 3, 5, 7$, etc. were in arithmetical progression, so that the numerical coefficients of the numerators only were still in need of investigation. But in the alternately given areas these were the figures of powers of the number 11, namely of these, $11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4$, that is, first 1; then 1, 1; thirdly, 1, 2, 1; fourthly 1, 3, 3, 1; fifthly 1, 4, 6, 4, 1, etc. And so I began to inquire how the remaining figures in these series could be derived from the first two given figures, and I found that on putting m for the second figure, the rest would be produced by continual multiplication of the terms of this series,

$$\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5},\quad \text{etc.}$$

For example, let $m = 4$, and $4 \times \frac{1}{2}(m-1)$, that is 6 will be the third term, and $6 \times \frac{1}{3}(m-2)$, that is 4 the fourth, and $4 \times \frac{1}{4}(m-3)$, that is 1 the fifth, and $1 \times \frac{1}{5}(m-4)$, that is 0 the sixth, at which term in this case the series stops. Accordingly, I applied this rule for interposing series among series, and since, for the circle, the second term was $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$, I put $m = \frac{1}{2}$, and the terms arising were

$$\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\ \text{or}\ -\tfrac{1}{8},\qquad -\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\ \text{or}\ +\tfrac{1}{16},\qquad \frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4}\ \text{or}\ -\tfrac{5}{128},$$

and so to infinity. Whence I came to understand that the area of the circular segment which I wanted was

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \quad \text{etc.}$$

And by the same reasoning the areas of the remaining curves, which were to be inserted, were likewise obtained: as also the area of the hyperbola and of the other alternate curves in this series $(1+x^2)^{\frac{0}{2}}$, $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1+x^2)^{\frac{2}{2}}$, $(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$, etc. And the same theory serves to intercalate other series, and that through intervals of two or more terms when they are absent at the same time. This was my first entry upon these studies, and it had certainly escaped my memory, had I not a few weeks ago cast my eye back on some notes.

But when I had learnt this, I immediately began to consider that the terms

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{6}{2}}, \quad \text{etc.,}$$

that is to say,

$$1, \quad 1-x^2, \quad 1-2x^2+x^4, \quad 1-3x^2+3x^4-x^6, \quad \text{etc.}$$

could be interpolated in the same way as the areas generated by them: and that nothing else was required for this purpose but to omit the denominators 1, 3, 5, 7, etc., which are in the terms expressing the areas; this means that the coefficients of the terms of the quantity to be intercalated $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, or $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, or in general $(1-x^2)^m$, arise by the continued multiplication of the terms of this series

$$m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}, \quad \text{etc.,}$$

so that (for example)

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ was the value of } 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 \quad \text{etc.,}$$

and

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \text{ of } 1 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \tfrac{1}{16}x^6, \quad \text{etc.,}$$

$$(1-x^2)^{\frac{1}{3}} \text{ of } 1 - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}x^4 - \tfrac{5}{81}x^6, \quad \text{etc.}$$

So then the general reduction of radicals into infinite series by that rule, which I laid down at the beginning of my earlier letter became known to me, and that before I was acquainted with the extraction of roots. But once this was known, that other could not long remain hidden from me. For in order to test these processes, I multiplied

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6, \quad \text{etc.}$$

into itself; and it became $1 - x^2$, the remaining terms vanishing by the continuation of the series to infinity. And even so $1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$, etc. multiplied twice into itself also produced $1 - x^2$. And as this was not only sure proof of these conclusions so too it guided me to try whether, conversely, these series, which it thus affirmed to be roots of the quantity $1 - x^2$, might not be extracted out of it in an arithmetical manner. And the matter turned out well. This was the form of the working in square roots.

$$\begin{array}{l} 1 - x^2 \;(\; 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6, \quad \text{etc.} \\ 1 \\ \overline{0 - x^2} \\ \quad - x^2 + \frac{1}{4}x^4 \\ \quad \overline{\quad - \frac{1}{4}x^4} \\ \quad\quad - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8 \\ \quad\quad \overline{0 \quad - \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8.} \end{array}$$

After getting this clear I have quite given up the interpolation of series, and have made use of these operations only, as giving more natural foundations. Nor was there any secret about reduction by division, an easier affair in any case.

(b) But in that treatise infinite series played no great part. Not a few other things I brought together, among them the method of drawing tangents which the very skilful Sluse communicated to you two or three years ago, about which you wrote back [to him] (on the suggestion of Collins) that the same method had been known to me also. We happened on it by different reasoning: for, as I work it, the matter needs no proof. Nobody, if he possessed my basis, could draw tangents any other way, unless he were deliberately wandering from the straight path. Indeed we do not here stick at equations in radicals involving one or each indefinite quantity, however complicated they may be; but without any reduction of such equations (which would generally render the work endless) the tangent is drawn directly. And the same is true in questions of maxima and minima, and in some others too, of which I am not now speaking. The foundation of these operations is evident enough, in fact; but because I cannot proceed with the explanation of it now, I have preferred to conceal it thus: *6accdæ13eff7i3l9n4o4qrr4s8t12vx*. On this foundation I have also tried to simplify the theories which concern the squaring of curves, and I have arrived at certain general Theorems. And, to be frank, here is the first Theorem.

For any curve let $dz^{\theta} \times (e + fz^{\eta})^{\lambda}$ be the ordinate, standing normal at the end z of the abscissa or the base, where the letters d, e, f denote any given quantities, and θ, η, λ are the indices of the powers of the quantities to which they are attached. Put

$$\frac{\theta + 1}{\eta} = r, \quad \lambda + r = s, \quad \frac{d}{\eta f} \times (e + fz^{\eta})^{\lambda + 1} = Q \quad \text{and} \quad r\eta - \eta = \pi,$$

then the area of the curve will be

$$Q \times \left\{ \frac{z^{\pi}}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^{\eta}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{\eta}} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fz^{\eta}}, \text{ etc.} \right\}$$

the letters A, B, C, D, etc., denoting the terms immediately preceding; that is, A the term z^{π}/s, B the term $-((r-1)/(s-1)) \times (eA)/(fz^{\eta})$, etc. This series, when r is a fraction or a negative number, is continued to infinity; but when r is positive and integral it is continued only to as many terms as there are units in r itself; and so it exhibits the geometrical squaring of the curve. I illustrate the fact by examples.

(c) When I said that almost all problems are soluble I wished to be understood to refer specially to those about which mathematicians have hitherto concerned themselves, or at least those in which mathematical arguments can gain some place. For of course one may imagine others so involved in complicated conditions that we do not succeed in understanding them well enough, and much less in bearing the burden of such long calculations as they require. Nevertheless—lest I seem to have said too much—inverse problems of tangents are within our power, and others more difficult than those, and to solve them I have used a twofold method of which one part is neater, the other more general. At present I have thought fit to register them both by transposed letters, lest, through others obtaining the same result, I should be compelled to change the plan in some respects.

5accdae10effh11i4l3m9n6oqqr8s11t9y3x:11ab3cdd10eaeg10ill4m7n6o3p3q6r5s11t8vx,

3acae4egh5i4l4m5n8oq4r3s6t4v, aaddaececceiijmmnnooprrrsssssttuu.

This inverse problem of tangents, when the tangent between the point of contact and the axis of the figure is of given length, does not demand these methods. Yet it is that mechanical curve the determination of which depends on the area of an hyperbola. The problem is also of the same kind, when the part of the axis between the tangent and the ordinate is given in length. But I should scarcely have reckoned these cases among the sports of nature. For when in the right-angled triangle, which is formed by that part of the axis, the tangent and the ordinate, the relation of any two sides is defined by any equation, the problem can be solved apart from my general method. But when a part of the axis ending at some point given in position enters the bracket, then the question is apt to work out differently.

The communication of the solution of affected equations by the method of Leibniz will be very agreeable; so too an explanation how he comports himself when the indices of the powers are fractional, as in this equation $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, or surds, as in $(x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}})^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$, where $\sqrt{2}$ and $\sqrt{7}$ do not mean coefficients of x, but indices of powers or dignities of it, and $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ means the power of the binomial $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. The point, I think, is clear by my method, otherwise I should have described it. But a term must at last be set to this wordy letter. The letter of the most excellent Leibniz fully deserved of course that I should give it this more extended reply. And this time I wanted to write in greater detail because I did not believe that your more engaging pursuits should often be interrupted by me with this rather austere kind of writing.

The second anagram runs as follows:

'Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione Seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis resultantis, ad eruendos terminos assumptæ seriei.' ('One method consists in extracting a fluent quantity from an equation at the same time involving its fluxion; but another by assuming a series for any unknown quantity whatever, from which the rest could conveniently be derived, and in collecting homologous terms of the resulting equation in order to elicit the terms of the assumed series.')

LA METHODE DES FLUXIONS.

I. J'AI observé que les Géometres modernes ont la plufpart négligé la Synthefe des anciens, & qu'ils fe font appliqués principalement à cultiver l'Analyfe ; cette Methode les a mis en état de furmonter tant d'obftacles, qu'ils ont épuifé toutes les Spéculations de la Géometrie, à l'exception de la Quadrature des Courbes & de quelques autres matieres femblables, qui ne font point encore difcutées ; cela joint à l'envie de faire plaifir aux jeunes Géometres, m'a engagé à compofer le Traité fuivant, dans lequel j'ai tâché de reculer encore les limites de l'Analyfe, & de perfectionner la fcience des Lignes Courbes.

II. La grande conformité qui fe trouve dans les Opérations litterales de l'Algebre, & dans les Opérations numeriques de l'Arithmetique ; cette reffemblance ou analogie, qui feroit parfaite, fi les Caracteres n'étoient pas differens, les premiers étant généraux & indéfinis, & les autres particuliers & définis, devoit naturellement nous conduire à en faire ufage ; & je ne puis qu'être étonné de ce que perſonne, à moins que vous ne vouliez excepter M. *Mercator, de Quadratura Hyperbolæ*, n'a ſongé à appliquer à l'Algebre la doctrine des Fractions Decimales, puiſque cette application ouvre la route pour arriver à des découvertes plus importantes & plus difficiles. Mais, puiſqu'en effet cette doctrine reduite en eſpeces doit avoir avec l'Algebre la même relation que la doctrine des Nombres Decimaux ſe trouve avoir avec l'Arithmetique ordinaire, il ſuffit de ſçavoir l'Arithmetique & l'Algebre, & d'obſerver la correſpondance qui doit être entre les Fractions Decimales & les Termes Algebriques continués à l'infini, pour faire les Opérations de l'Addition, Souſtraction, Multiplication, Diviſion & Extraction de Racines dans cette nouvelle façon de calcul. Car comme dans les Nombres les places à droite diminuent en raiſon Decimale, ou Soudecuple, il en eſt reſpectivement de même dans les eſpeces, lorſque les Termes ſont diſpoſés en Progreſſion uniforme continuée à l'infini, ſuivant l'ordre des dimenſions d'un Nominateur ou Dénominateur quelconque; & comme les Fractions Decimales ont l'avantage de transformer en quelque façon toutes les Fractions ordinaires & tous les Radicaux en Nombres entiers, de ſorte que, lorſque ces Fractions & ces Nombres ſourds ſont reduits en Decimales, ils peuvent être traités comme des Nombres entiers; de même les ſuites infinies ont l'avantage de reduire à la claſſe des Quantités ſimples toutes les eſpeces de Termes compliqués, tels que les Fractions dont les Dénominateurs ſont des Quantités complexes, les Racines des Quantités compoſées ou des Equations affectées, & d'autres ſemblables; c'eſt-à-dire qu'elles donnent la commodité de pouvoir les exprimer par une ſuite infinie de Fractions, dont les Numerateurs & les Dénominateurs ſont des Termes ſimples, ce qui applanit des difficultés, qui ſous la forme ordinaire, auroient paru inſurmontables. Je vais donc commencer par faire voir comment ces Reductions doivent ſe faire, ou ce qui eſt la même choſe, comment une Quantité compoſée quelconque peut être reduite à des Termes ſimples, dans les cas ſur-tout où la Methode de calculer ne ſe préſente pas d'abord; j'appliquerai enſuite cette Analyſe à la ſolution des Problêmes.

III. La Reduction par la Diviſion & par l'Extraction des Racines ſe concevra clairement par les exemples ſuivans, en comparant les façons d'opérer en Nombres & en Eſpeces.

Exemples de Reduction par la Division.

IV. La Fraction $\frac{aa}{b+x}$ étant proposée, Divises aa par $b+x$ de la maniere qui suit.

$$b+x)\,aa+o\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5}\right.,\ \&c.$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$o-\frac{aax}{b}+o$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$$

$$o+\frac{a^2x^2}{b^2}+o$$

$$+\frac{a^2x^2}{b^2}+\frac{a^2x_3}{b^3}$$

$$o-\frac{a^2x^3}{b^3}+o$$

$$-\frac{a^2x^3}{b^3}-\frac{a^2x^4}{b^4}$$

$$o+\frac{a^2x^4}{b^4},\ \&c.$$

Le Quotient est donc $\frac{aa}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\frac{a^2x^4}{b^5}$, &c.

laquelle suite étant continuée à l'infini $=\frac{aa}{b+x}$· ou si l'on fait x le premier Terme du Diviseur de cette façon, $x+b\,(aa+o$, alors le Quotient sera $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{x^2}+\frac{aab^2}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$, &c. ce que l'on trouvera par la même maniere que ci-dessus.

V. De même la Fraction $\frac{1}{1+xx}$, se reduira à $1-x^2+x^4-x^6+x^8$, &c. ou bien à $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}$, &c.

VI. Et la Fraction $\frac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$, se reduira à $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}$, &c.

VII. Il convient ici d'obſerver que je me ſers de x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, &c. au lieu de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. de $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{5}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, &c. au lieu de $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x^5}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$, & de $x^{-\frac{1}{2}}$, $x^{-\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{4}}$, &c. au lieu de $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c. Et cela par regle d'Analogie, comme on peut le concevoir par des Progreſſions Géometriques ſemblables à celles-ci, x^3, $x^{\frac{5}{2}}$, x^2, $x^{\frac{3}{2}}$, x, x^0 ou 1, $x^{-\frac{1}{2}}$, x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2}, &c.

VIII. Ainſi au lieu de $\frac{aa}{x} - \frac{aab}{x^2} + \frac{aab^2}{x^3}$, &c. on peut écrire $aax^{-1} - aabx^{-2} + aab^2x^{-3}$, &c.

IX. Et au lieu de $\sqrt{aa-xx}$, on peut écrire $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$, & $\overline{aa-xx}|^{2}$, au lieu du Quarré de $aa-xx$, & $\overline{\frac{abb-y^3}{by+yy}}\Big|^{\frac{1}{3}}$ au lieu de $\sqrt[3]{\frac{ab^2-y^3}{by+yy}}$, & ainſi des autres.

X. Ainſi il convient aſſez de diſtinguer les Puiſſances en Affirmatives, Négatives ; Entieres & Rompuës.

Exemples de Reduction par l'Extraction des Racines.

XI. La quantité $aa+xx$ étant proposée, vous pouvez en extraire la Racine quarrée, comme vous le voyez ici.

$$aa+xx\,\left(a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}},\ \text{\&c.}\right.$$

$$\begin{array}{l}
aa \\
\hline
0+xx \\
+xx+\dfrac{x^4}{4a^2} \\
\hline
-\dfrac{x^4}{4a^2} \\
-\dfrac{x^4}{4a^2}-\dfrac{x^6}{8a^4}+\dfrac{x^8}{64a^6} \\
\hline
+\dfrac{x^6}{8a^4}-\dfrac{x^8}{64a^6} \\
+\dfrac{x^6}{8a^4}+\dfrac{x^8}{16a^6}-\dfrac{x^{10}}{64a^8}+\dfrac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
-\dfrac{5x^8}{64a^6}+\dfrac{x^{10}}{64a^8}-\dfrac{x^{12}}{256a^{10}},\ \text{\&c.} \\
-\dfrac{5x^8}{64a^6}-\dfrac{5x^{10}}{128a^8}+\dfrac{5x^{12}}{512a^{16}} \\
\hline
+\dfrac{7x^{10}}{128a^8}-\dfrac{7x^{12}}{512a^{10}},\ \text{\&c.} \\
+\dfrac{7x^{10}}{128a^8}+\dfrac{7x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
-\dfrac{21x^{12}}{512a^{10}},\ \text{\&c.}
\end{array}$$

La Racine se trouve donc être $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$, &c.

On peut observer que vers la fin de l'Opération je néglige tous les Termes dont les Dimensions surpassent les Dimensions du dernier Terme, c'est-à-dire du Terme auquel je veux finir ma suite, par Exemple, $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

XII. En changeant l'ordre des Termes, c'eſt-à-dire en écrivant $xx + aa$, la Racine ſera $x + \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7}$, &c.

XIII. Ainſi la Racine de $aa - xx$ eſt $a - \frac{xx}{aa} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$, &c.

XIV. La Racine de $x - xx$ eſt $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

XV. Celle de $aa + bx - xx$ eſt $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}$, &c.

XVI. Et $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$ eſt $\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6, \&c.}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6, \&c.}$ & en diviſant actuellement, on aura

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2 \; x^4 & + \frac{5}{16}b^3 \; x^6, \&c. \\ + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 \\ & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b \\ & & + \frac{1}{16}a^3 \end{array}$$

XVII. Mais ces Opérations peuvent être abregées par une préparation convenable. Dans l'Exemple précedent $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, ſi la Forme du Numerateur & du Dénominateur n'avoit pas été la même, j'aurois pû les multiplier tous deux par $\sqrt{1-bxx}$, ce qui auroit produit $\frac{\sqrt{1 + ax^2 - abx^4} \atop -b}{1-bxx}$, auquel cas il ne reſte plus qu'à extraire la Racine du Numerateur ſeulement, & la diviſer par le Dénominateur.

XVIII. Je m'imagine qu'en voilà aſſez pour faire connoître comment on peut extraire les autres Racines, quelque compliquées qu'elles ſoient, comme

$$x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{axx + x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3 + 2x^5 - x^{\frac{7}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx} - \sqrt{2x - x^{\frac{2}{3}}}})$$

& les reduire à une ſuite infinie de Termes Simples.

De la Reduction des Equations Affectées.

XIX. Il faut que nous entrions dans un détail un peu plus grand, pour expliquer comment on doit reduire les Racines de ces Equations à des ſuites infinies ; car ce que les Géometres nous ont donné ſur les Equations en Nombres, eſt extrêmement embaraſſé, & chargé d'Opérations ſuperfluës; de ſorte qu'on ne peut prendre ſur cela un bon Modele pour faire les mêmes Opérations en Eſpeces. Je ferai donc voir d'abord comment ſe doit faire en Nombres la Reduction des Equations Affectées, & enſuite j'appliquerai la Methode aux Eſpeces.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en ſuite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ſes dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, ſubſtituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cauſe de ſa petiteſſe, il reſtera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui eſt très-près de la vraie valeur de p; c'eſt pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & ſubſtituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reſte $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en diviſant 0,061 par 11,23 juſqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient excluſivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-deſſous parce que ce Terme eſt Négatif; & ſuppoſant $-0{,}0054 + r = q$, je ſubſtitue comme auparavant, & je continue ainſi l'Opération auſſi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-deſſous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544852$ $+2{,}09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $-4 - 2p$ -5
SOMME.		$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+0{,}06 + 1{,}2 + 6$ $+1, + 10,$ $-1,$
SOMME.		$+0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$-0{,}0054 + r = q.$	$+q^3$ $+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$-0{,}00000015\cancel{7464} + 0{,}000\cancel{087}\cancel{48}r - \cancel{0{,}0162}r^2 + r^3$ $+0{,}0001837\cancel{08} - 0{,}068\cancel{04} + \cancel{6{,}3}$ $-0{,}060642 + 11{,}23$ $+0{,}061$
SOMME.		$+0{,}0005416 + 11{,}162r$
$-0{,}00004852 + s = r$		

La méthode de Newton

Newton (1664) : « De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas ». Récursif.

Raphson (1690) : « Analysis asquaetionarum ». Itératif.

Simpson (1740) « Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks, Illustred by a Variety of Examples ». Itératif et différentiel.

XII. En changeant l'ordre des Termes, c'est-à-dire en écrivant $xx + aa$, la Racine fera $x + \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7}$, &c.

XIII. Ainsi la Racine de $aa - xx$ est $a - \frac{xx}{aa} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$, &c.

XIV. La Racine de $x - xx$ est $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

XV. Celle de $aa + bx - xx$ est $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}$, &c.

XVI. Et $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$ est $\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6, \&c.}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6, \&c.}$ & en divisant actuellement, on aura

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}\ b^2\ x^4 & + \frac{5}{16}\ b^3\ x^6, \&c. \\ + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}\ ab & + \frac{3}{16}\ ab^2 \\ & - \frac{1}{8}\ a^2 & - \frac{1}{16}\ a^2b \\ & & + \frac{1}{16}\ a^3 \end{array}$$

XVII. Mais ces Opérations peuvent être abregées par une préparation convenable. Dans l'Exemple précedent $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, si la Forme du Numerateur & du Dénominateur n'avoit pas été la même, j'aurois pû les multiplier tous deux par $\sqrt{1-bxx}$, ce qui auroit produit $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4} \atop -b}{1-bxx}$, auquel cas il ne reste plus qu'à extraire la Racine du Numerateur seulement, & la diviser par le Dénominateur.

XVIII. Je m'imagine qu'en voilà assez pour faire connoître comment on peut extraire les autres Racines, quelque compliquées qu'elles soient, comme

$$x^3 + \frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{axx+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx}-\sqrt{2x-x^{\frac{2}{3}}}})$$

& les reduire à une suite infinie de Termes Simples.

De la Reduction des Equations Affectées.

XIX. Il faut que nous entrions dans un détail un peu plus grand, pour expliquer comment on doit reduire les Racines de ces Equations à des suites infinies; car ce que les Géometres nous ont donné fur les Equations en Nombres, eſt extrêmement embaraſſé, & chargé d'Opérations ſuperfluës; de ſorte qu'on ne peut prendre ſur cela un bon Modele pour faire les mêmes Opérations en Eſpeces. Je ferai donc voir d'abord comment ſe doit faire en Nombres la Reduction des Equations Affectées, & enſuite j'appliquerai la Methode aux Eſpeces.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en ſuite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ſes dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, ſubſtituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cauſe de ſa petiteſſe, il reſtera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui eſt très-près de la vraie valeur de p; c'eſt pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & ſubſtituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reſte $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en diviſant 0,061 par 11,23 juſqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient excluſivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-deſſous parce que ce Terme eſt Négatif; & ſuppoſant $-0{,}0054 + r = q$, je ſubſtitue comme auparavant, & je continue ainſi l'Opération auſſi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-deſſous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2{,}10000000$ $- 0{,}00544852$ $+ 2{,}09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$	$+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
SOMME.		$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+ 0{,}06 + 1{,}2 + 6$ $+ 1, + 10,$ $- 1,$
SOMME.		$+ 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$- 0{,}0054 + r = q.$	$+ q^3$ $+ 6{,}3q^2$ $+ 11{,}23q$ $+ 0{,}061$	$- 0{,}000000157464 + 0{,}00008748r - 0{,}0162r^2 + r^3$ $+ 0{,}000183708 - 0{,}068$[illegible] $+ 6{,}3$ $- 0{,}060642 + 11{,}23$ $+ 0{,}061$
SOMME.		$+ 0{,}0000416 + 11{,}162r$
$- 0{,}00004852 + s = r$		

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+ 2{,}10000000$ $- 0{,}00544852$ $+ 2{,}09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$ $+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
SOMME.	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$ $+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+ 0{,}06 \quad + 1{,}2 \quad + 6$ $+ 1{,} \quad + 10{,}$ $- 1{,}$
SOMME.	$+ 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$- 0{,}0054 + r = q.$ $+ q^3$ $+ 6{,}3\ q^2$ $+ 11{,}23\ q$ $+ 0{,}061$	$- 0{,}000000157464 + 0{,}00008748r - 0{,}0162r^2 + r^3$ $+ 0{,}000183708 \quad - 0{,}06804 \quad + 6{,}3$ $- 0{,}060642 \quad + 11{,}23$ $+ 0{,}061$
SOMME.	$+ 0{,}0005416 \quad + 11{,}162r$
$- 0{,}00004852 + s = r$	

plusieurs Dimensions, si l'on cherche avec cette exactitude les Figures qu'il faut ajoûter au Quotient, c'est-à-dire si l'on extrait ainsi la plus petite Racine des trois derniers Termes des Equations; car cela donnera à chaque Opération autant de Figures au Quotient.

XXIII. Cette maniere de reduire les Equations numeriques va nous conduire à celles des Equations litterales; mais il faut observer.

XXIV. 1°. Que l'un des Coefficiens litteraux, supposé qu'il y en ait plus d'un, doit être distingué des autres, lequel Coefficient est ou peut être supposé de beaucoup le plus grand, ou le plus petit de tous, ou bien le plus approchant d'une quantité donnée; & cela parce que ses Dimensions augmentant continuellement dans les Numerateurs ou dans les Dénominateurs des Termes du Quotient, ces Termes doivent devenir toujours moindres, & par conséquent le Quotient doit toujours approcher de la vraie valeur de la Racine, comme on peut le voir dans les Exemples de Reduction par la Division & l'Extraction de Racine de la Lettre x; je m'en servirai dans la suite aussi-bien que de la Lettre z pour marquer les Racines dont on cherche la valeur, & je me servirai de y, p, q, r, s, &c. pour exprimer les Radicaux qu'il faut extraire.

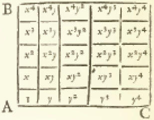
XXV. 2°. Lorsque l'Equation contient des Fractions complexes, ou des Quantités irrationelles, ou lorsqu'il s'en trouve après l'Opération, il faut pour plus de facilité s'en débarasser par les Methodes que les Analystes nous ont données pour cela. Comme si l'Equation proposée étoit $y^3 + \frac{bb}{b-x}y^2 - x^3 = 0$, il faudroit multiplier par $b-x$, & tirer la Racine y du Produit $by^3 - xy^3 + bby^2 - bx^3 + x^4 = 0$; ou bien on peut supposer $y(b-x) = u$, car en écrivant $\frac{v}{b-x}$ au lieu de y on aura $v^3 + b^2v^2 - b^3x^3 + 3b^2x^4 - 3bx^5 + x^6 = 0$, dont, après avoir tiré la Racine v, il faudra diviser le Quotient par $b-x$ pour avoir la valeur de y. De même si l'Equation proposée étoit $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$, on pourroit faire $y^{\frac{1}{2}} = v$ & $x^{\frac{1}{3}} = z$, ce qui donneroit $v^6 - z^3v + z^4 = 0$, dont, après avoir extrait la Racine, on tireroit par la Substitution les valeurs de x & y, car on trouvera la Racine $v = z + z^3 + 6z^5$, &c. & substituant, on auroit $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x + 6x^{\frac{5}{3}}$, &c. ou $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + 13x^2$, &c.

XXVI. Et de même s'il se trouve des Dimensions Négatives de x & y, on les fera disparoître en multipliant par x & y; comme si l'Equation proposée étoit $x^3 + 3x^2y^{-1} - 2x^{-1} - 16y^{-3} = 0$, en multipliant par x & y^3, on aura $x^4y^3 + 3x^3y^2 - 2y^3 - 16x = 0$. Et si l'Equation étoit $x = \frac{aa}{y} - \frac{2a^3}{y^2} + \frac{3a^4}{y^3}$, en multipliant par y^3 on aura $xy^3 = a^2y^2 - 2a^3y + 3a^4$, & ainſi des autres.

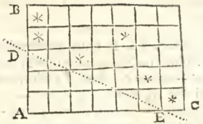
XXVII. 3°. Après que l'Equation ſera ainſi préparée, il faut commencer l'Opération par trouver le premier Terme du Quotient. Nous allons donner une regle génerale pour cela, auſſi-bien que pour trouver les Termes ſuivans, lorſque l'Eſpece x ou z eſt ſuppoſée petite, ce qui ſervira pour les deux autres cas qui ſont reductibles à celui-ci.

XXVIII. De tous les Termes dans leſquels l'Eſpece Radicale y ou p, q, r, &c. ne ſe trouve pas, prenez celui qui eſt le plus bas eu égard aux Dimenſions de l'Eſpece indéfinie x ou z; puis entre les Termes dans leſquels cette Eſpece Radicale y, ſe trouve, choiſiſſez-en un, tel que la Progreſſion des Dimenſions de chacune de ces Eſpeces depuis le Terme que vous aurez pris d'abord, juſqu'à celui-ci, deſcende le plus, ou monte le moins qu'il ſe pourra; & ſi l'Equation contient quelques autres termes, dont les Dimenſions tombent dans cette Progreſſion continuée à volonté, il faudra les joindre aux deux autres, & égaler leur ſomme totale à zero, ce qui donnera la valeur de l'Eſpece Radicale qu'il faudra écrire dans le Quotient.

XXIX. La Figure ſuivante facilitera l'uſage, & donnera une idée plus claire de cette regle. Diviſez l'Eſpace Angulaire ABC en petits Quarrés ou Paralellogrammes égaux, dans leſquels vous inſcrirez x & y ſelon leurs Dimenſions, comme vous le voyez. Quand on vous propoſera une Equation, marquez tous les Paralellogrammes qui correſpondent par leurs Dimenſions à tous les Termes de l'Equation; puis appliquez une Regle à l'Angle du Paralellogramme le plus bas à main gauche de tous les Paralellogrammes marqués, faites tourner cette Regle juſqu'à ce qu'elle touche un ou plus d'un Paralellogramme marqué à main droite, ſans qu'elle quitte celui qui eſt à main gauche; prenez ces termes que la Regle touche, & en les égalant à zero, tirez-en la quantité qu'il faut écrire au Quotient.



XXX. Par exemple pour tirer la Racine y de l'Equation $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$, je marque les Paralellogrammes auſquels les termes de cette Equation appartiennent de la Note *, puis j'applique la Regle DE au plus bas Paralellogramme marqué à main gauche, & je la fais tourner à main droite, juſqu'à ce qu'elle touche un ou plus d'un autre Paralellogramme marqué; je vois que ceux qu'elle touche appartiennent à x^3, x^2y^2 & y^6 je prens donc dans l'Equation les Termes de ces Dimenſions, ſçavoir $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$, & je les égale à zero; & pour avoir une Equation plus ſimple, je fais $y = v\sqrt{ax}$ ce qui en ſubſtituant me donne $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, dont les Racines $\pm\sqrt{ax}$ & $\pm\sqrt{2ax}$ me donnent chacune à mon choix le premier Terme du Quotient, & cela ſelon la Racine de cette Equation que j'ai deſſein de tirer.



XXXI. Si l'Equation propoſée étoit $y^5 - by^2 + 9bx^2 - x^3 = 0$, je choiſirois $-by^2 + 9bx^2$, dont je tirerai $+3x$ pour le premier Terme du Quotient.

XXXII. Dans l'Equation $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, je choiſis $y^3 + a^2y - 2a^3$, & j'écris au Quotient ſa Racine $+a$.

XXXIII. De même dans l'Equation $x^2y^5 - 3c^4xy^2 - c^5x^2 + c^7 = 0$, je prens $x^2y^5 + c^7$ ce qui me donne $-\sqrt{\frac{c^7}{x}}$ pour le premier Terme du Quotient, & ainſi des autres.

XXXIV. Mais lorſqu'après avoir trouvé ce Terme, il arrive que ſa Puiſſance eſt Négative, j'abaiſſe l'Equation, c'eſt-à-dire je la multiplie par cette même Puiſſance Négative, afin qu'il ne ſoit pas neceſſaire de le faire dans la Réſolution, & outre cela pour que la Regle que nous donnerons pour retrancher les Termes ſuperflus, puiſſe être appliquée comme il faut. Par exemple ſi l'Equation propoſée étoit $8z^6y^3 + az^6y^2 - 27a^9 = 0$ le premier Terme du Quotient ſeroit $\frac{3a^3}{2z^2}$ ainſi je multiplierai l'Equation par z^{-2} & j'aurai $8z^4y^3 + az^4y^2 - 27a^9z^{-2} = 0$, de laquelle je chercherai la Réſolution.

XXXV. Par cette Methode continuée, on trouve les Termes ſuivans du Quotient, en les tirant des Equations ſecondaires, ce qui ſe fait d'ordinaire plus aiſément que l'Extraction du premier Terme, car il ſuffit de diviſer le plus bas des Termes affectés de la petite eſpece x ou x^2, x^3, &c. & non affectés de l'Eſpece Radicale p ou q, r, &c. par la quantité dont cette Eſpece Radicale qui n'a qu'une Dimenſion, eſt affectée, ſans être affectée de l'Eſpece indéfinie; & enſuite écrire au Quotient le Réſultat. Ainſi dans l'Exemple ſuivant les Termes $\frac{x}{4}$, $\frac{xx}{64a}$, $\frac{131x^3}{512a^2}$, &c. font produits par la Divifion de a^2x, $\frac{1}{16}ax^2$, $\frac{131}{128}x^3$ par $4aa$.

XXXVI. Il nous refte maintenant à montrer la pratique de la Réfolution. Soit donc pour Exemple l'Equation $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, dont il faille tirer la Racine; je choifis, comme je l'ai dit les Termes $y^3 + a^2y - 2a^3$, qui étant égalés à zero, me donnent $y - a = 0$, ainfi j'écris $+a$ dans le Quotient; mais parce que $+a$ n'eft pas la valeur complette de y je fais $a + p = y$, & je fubftitue dans l'Equation cette valeur de y, & parmi les Termes $p^3 + 3ap^2 + axp$, &c. qui en réfultent; je choifis de la même façon les Termes $+ 4a^2p + a^2x$, qui étant égalés à zero donnent $p = -\frac{1}{4}x$, j'écris donc $-\frac{1}{4}x$ au Quotient; mais parce que $-\frac{1}{4}x$ n'eft pas la valeur exacte de p, je fais $-\frac{1}{4}x + q = p$, & fubftituant cette valeur je choifis dans les Termes $q^3 - \frac{3}{4}xq^2 + 3aq^2$, &c. qui en réfultent, les Termes $q^3 - \frac{2}{16}ax^2$ qui étant égales à zero donnent $q = \frac{xx}{64a}$ que j'écris au Quotient, mais comme $\frac{xx}{64a}$ n'eft pas la valeur exacte de q, je fais $\frac{xx}{64a} + r = q$, & je fubftitue comme ci-deffus, ce qui fe peut continuer auffi long-tems qu'on voudra, comme on peut le voir dans la Figure fuivante.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0.\quad y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}\ \&c.$$

$+a+p=y.$	$+y^3$	$+a^3 \quad +3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+axy$	$+a^2x + axp$
	$+a^2y$	$+a^3 \quad +a^2p$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p.$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 \quad +\frac{3}{16}x^2q \quad -\frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq \quad +3aq^2$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$
	$+4a^2p$	$-a^2x \quad +4a^2q$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q.$	$+q^3$	$*$
	$-\frac{3}{4}xq^2$	$*$
	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} \ * + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a} \ * + \frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 \quad -\frac{1}{2}axr$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2 \quad +4a^2r$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$

$$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}\ \left(+ \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

Le théorème de Newton-(Puiseux)

$\mathbf{C}[x]$: anneau des polynômes en x, i.e. $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$.

$\mathbf{C}[[x]]$: anneau des séries formelles en x, i.e. $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))$: corps des séries de Laurent en x, i.e. $\sum_{i \geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))^\star$: corps des séries de Puiseux en x, i.e. $\sum_{i \geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}((x))$ *est* $\mathbf{C}((x))^\star$.

Le théorème de Newton-(Puiseux)

$\mathbf{C}[x]$: anneau des polynômes en x, i.e. $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$.

$\mathbf{C}[[x]]$: anneau des séries formelles en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))$: corps des séries de Laurent en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))^\star$: corps des séries de Puiseux en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}((x))$ *est* $\mathbf{C}((x))^\star$.

Le théorème de Newton-(Puiseux)

$\mathbf{C}[x]$: anneau des polynômes en x, i.e. $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$.

$\mathbf{C}[[x]]$: anneau des séries formelles en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))$: corps des séries de Laurent en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))^\star$: corps des séries de Puiseux en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}((x))$ *est* $\mathbf{C}((x))^\star$.

Le théorème de Newton-(Puiseux)

$\mathbf{C}[x]$: anneau des polynômes en x, i.e. $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$.

$\mathbf{C}[[x]]$: anneau des séries formelles en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))$: corps des séries de Laurent en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))^{\star}$: corps des séries de Puiseux en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}((x))$ *est* $\mathbf{C}((x))^{\star}$.

Le théorème de Newton-(Puiseux)

$\mathbf{C}[x]$: anneau des polynômes en x, i.e. $\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$.

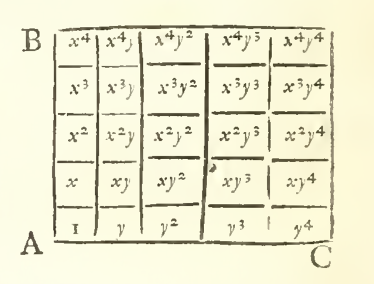
$\mathbf{C}[[x]]$: anneau des séries formelles en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

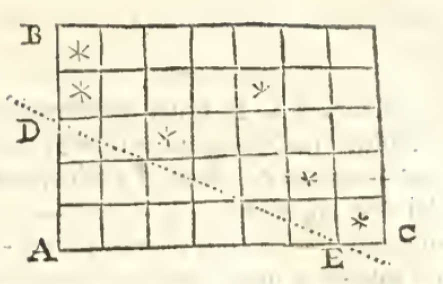
$\mathbf{C}((x))$: corps des séries de Laurent en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}((x))^\star$: corps des séries de Puiseux en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}((x))$ *est* $\mathbf{C}((x))^\star$.

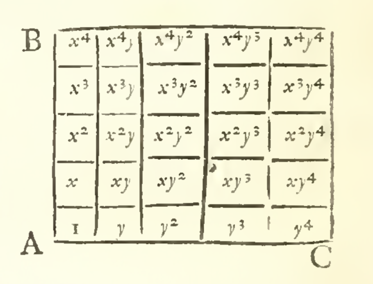
$$f(x,y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

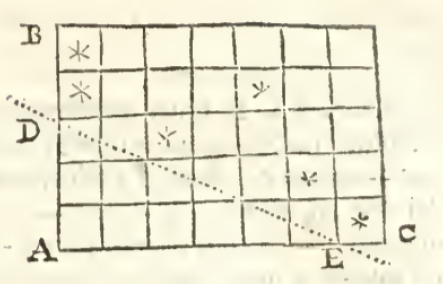




$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

$$f(x,y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$





$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

$$f(x,y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

Équation approchée :

$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = cx_1$$

$$c^6x_1^6 - 7a^2c^2x_1^6 + 6a^2x_1^6 = 0$$

$$c = \pm\sqrt{a} \quad ; \quad \pm\sqrt{2a}$$

Quatre solutions approchées. La première :

$$y \simeq \sqrt{ax}$$

On cherche à l'améliorer.

$$f(x,y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

Équation approchée :

$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = cx_1$$

$$c^6x_1^6 - 7a^2c^2x_1^6 + 6a^2x_1^6 = 0$$

$$c = \pm\sqrt{a} \quad ; \quad \pm\sqrt{2a}$$

Quatre solutions approchées. La première :

$$y \simeq \sqrt{ax}$$

On cherche à l'améliorer.

$$f(x,y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

Équation approchée :

$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = cx_1$$

$$c^6x_1^6 - 7a^2c^2x_1^6 + 6a^2x_1^6 = 0$$

$$c = \pm\sqrt{a} \quad ; \quad \pm\sqrt{2a}$$

Quatre solutions approchées. La première :

$$y \simeq \sqrt{ax}$$

On cherche à l'améliorer.

$$f(x,y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

Équation approchée :

$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = cx_1$$

$$c^6x_1^6 - 7a^2c^2x_1^6 + 6a^2x_1^6 = 0$$

$$c = \pm\sqrt{a} \quad ; \quad \pm\sqrt{2a}$$

Quatre solutions approchées. La première :

$$y \simeq \sqrt{ax}$$

On cherche à l'améliorer.

$$f(x, y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

Équation approchée :

$$y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 = 0$$

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = cx_1$$

$$c^6x_1^6 - 7a^2c^2x_1^6 + 6a^2x_1^6 = 0$$

$$c = \pm\sqrt{a} \quad ; \quad \pm\sqrt{2a}$$

Quatre solutions approchées. La première :

$$y \simeq \sqrt{ax}$$

On cherche à l'améliorer.

$$f(x,y) = y^6 - 5xy^5 + (x^3/a)y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$$

$$y \simeq \sqrt{ax}$$

$$x = x_1^2 \quad ; \quad y = \sqrt{a}x_1(1+y_1)$$

On substitue ces valeurs dans $f = 0$ et on simplifie par x_1^6.

$$\begin{aligned} f_1 \quad = \quad & -5a^{5/2}x_1 + b^2x_1^2 + ax_1^4 - 8a^3y_1 - 25a^{5/2}x_1y_1 + 4ax_1^4y_1 \\ & +8a^3y_1^2 - 50a^{5/2}x_1y_1^2 + 6ax_1^4y_1^2 + 20a^3y_1^3 \\ & -50a^{5/2}x_1y_1^3 + 4ax_1^4y_1^3 + 15a^3y_1^4 - 25a^{5/2}x_1y_1^4 \\ & +ax_1^4y_1^4 + 6a^3y_1^5 - 5a^{5/2}x_1y_1^5 + a^3y_1^6 \end{aligned}$$

Le polygone de Newton est $(1,0),(0,1)$. Donc, y_1 est une série entière en x_1. CQFD.

Attention !

A strictement parler, Newton ne démontre rien...

- Il n'aborde pas la question de la convergence.
- Il ne se pose pas la question de savoir si les exposants rationnels qui apparaissent ont un dénominateur commun.

Exemple : $y = \sum_{k \geq 0} x^{2-2^{-k}}$ est une solution de $y^2 + x^2 y + x^2 = 0$ en caractéristique 2.

Attention !

A strictement parler, Newton ne démontre rien...

- Il n'aborde pas la question de la convergence.
- Il ne se pose pas la question de savoir si les exposants rationnels qui apparaissent ont un dénominateur commun.

Exemple : $y = \sum_{k \geq 0} x^{2-2^{-k}}$ est une solution de $y^2 + x^2 y + x^2 = 0$ en caractéristique 2.

Le théorème de Puiseux 1850

$\mathbf{C}\{x\}$: anneau des séries *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}$: corps des séries de Laurent *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$: corps des séries de Puiseux *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}\{\{x\}\}$ *est* $\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$.

Le théorème de Puiseux 1850

$\mathbf{C}\{x\}$: anneau des séries *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}$: corps des séries de Laurent *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$: corps des séries de Puiseux *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}\{\{x\}\}$ *est* $\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$.

Le théorème de Puiseux 1850

$\mathbf{C}\{x\}$: anneau des séries *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}$: corps des séries de Laurent *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$: corps des séries de Puiseux *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}\{\{x\}\}$ *est* $\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$.

Le théorème de Puiseux 1850

$\mathbf{C}\{x\}$: anneau des séries *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq 0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}$: corps des séries de Laurent *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^i$.

$\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$: corps des séries de Puiseux *convergentes* en x, i.e. $\sum_{i\geq i_0} a_i x^{i/n}$.

Théorème : *La clôture algébrique de* $\mathbf{C}\{\{x\}\}$ *est* $\mathbf{C}\{\{x\}\}^\star$.

Victor Puiseux 1820-1883

Victor Puiseux 1820-1883

Formulation moderne

- Un (germe de) *courbe analytique* est défini par $F(x, y) = 0$ où F est une fonction holomorphe définie dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^2$.
- Un (germe de) *courbe paramétrée* est l'image d'une fonction holomorphe injective $f : (\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}^2, 0)$ telle que $f(0) = (0, 0)$.

Théorème : Toute courbe analytique est la réunion des images d'un nombre fini de courbes paramétrées (les « branches »).

Le *link* de la courbe $F = 0$ est :

$$\{(x, y)| \quad F(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \Re(y) = \epsilon \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$$