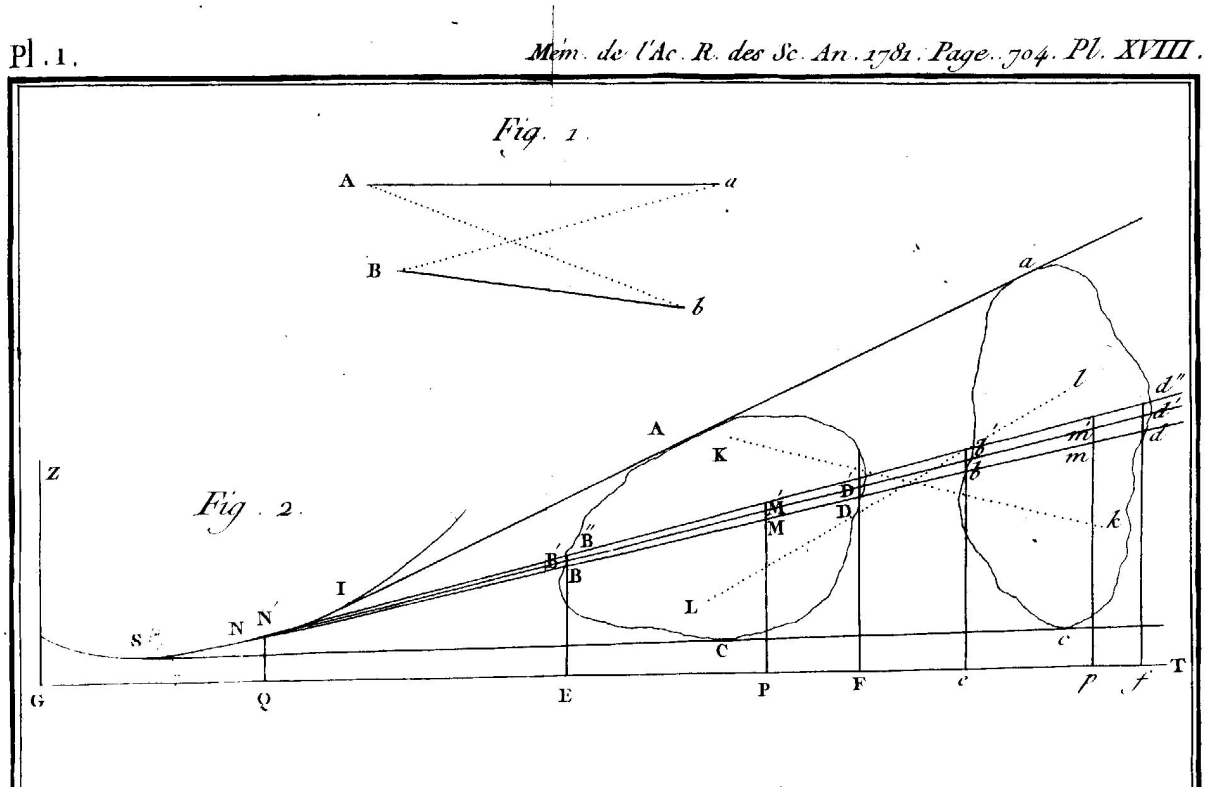
Monge and optimal transport

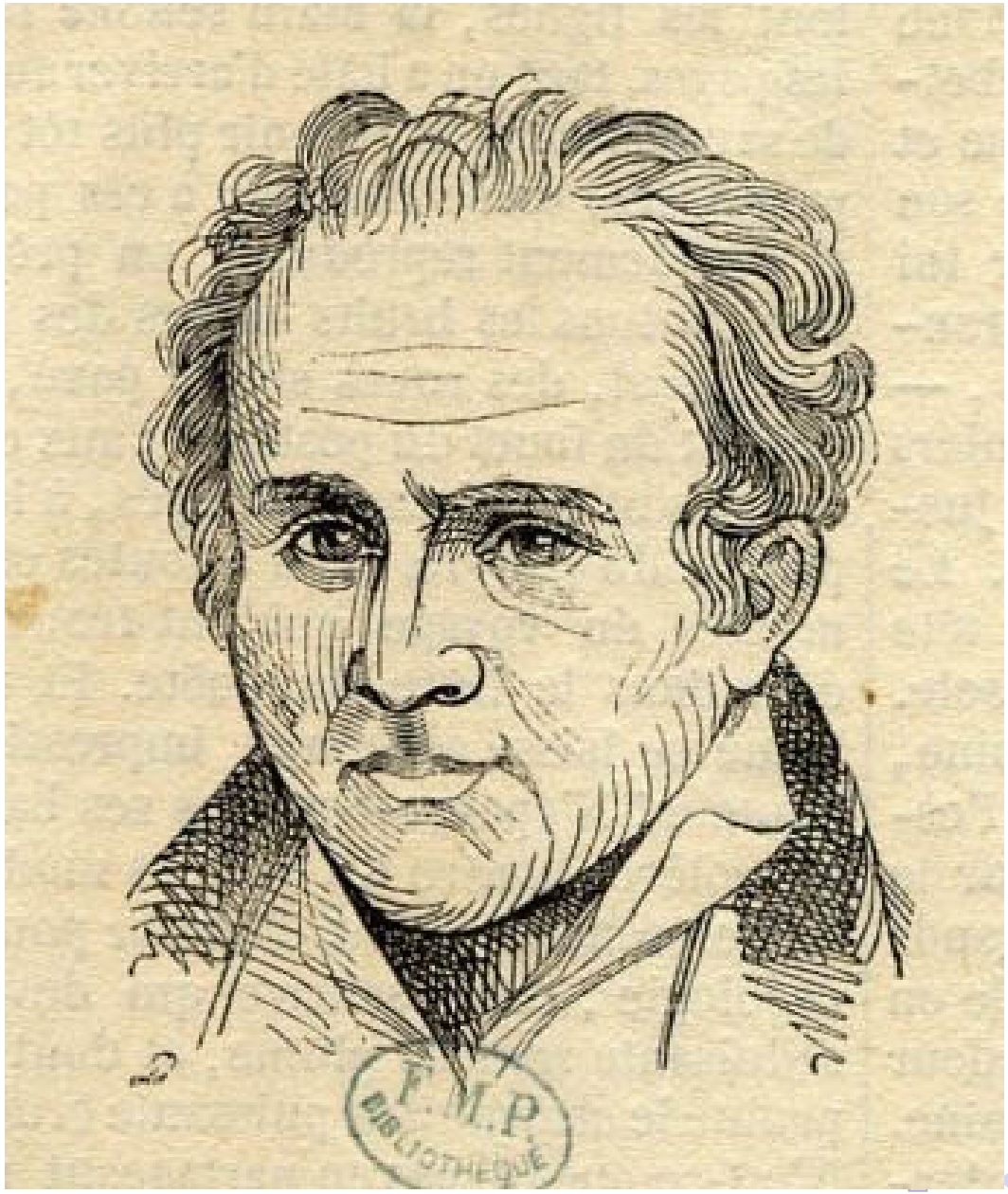


Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

Gaspard Monge (1746-1818)

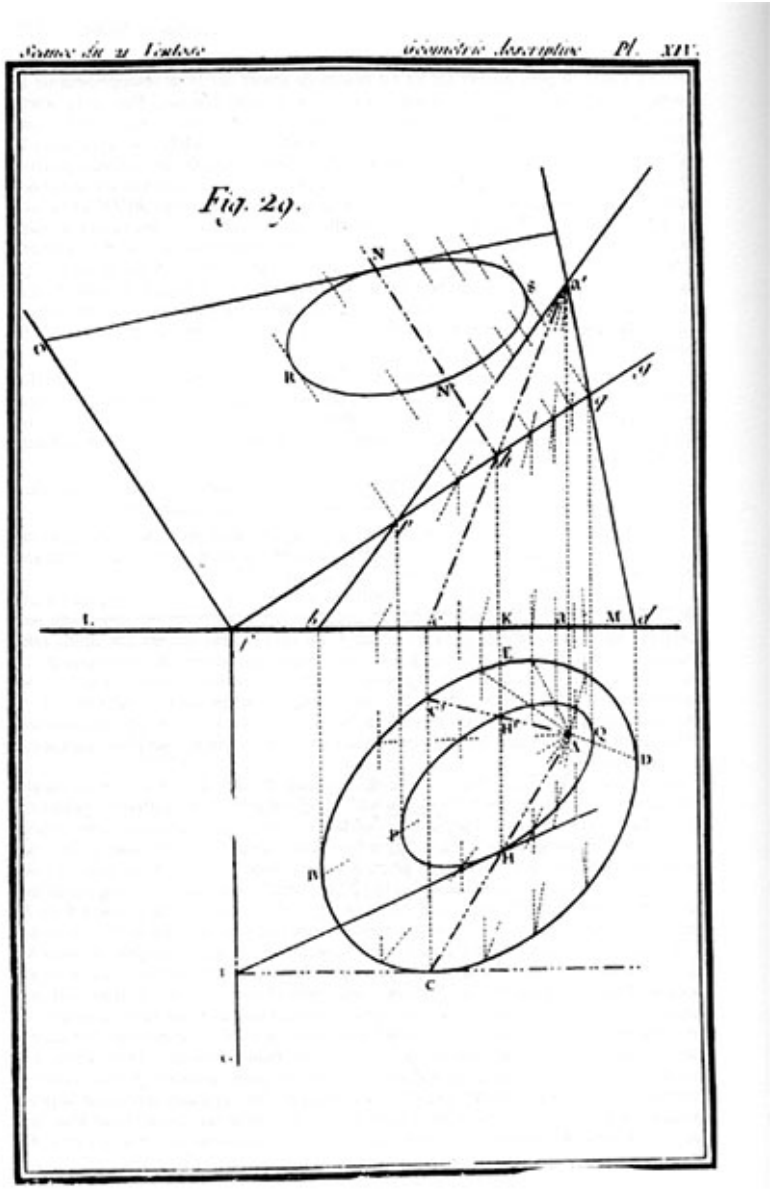


MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DES DÉBLAIS
ET DES REMBLAIS.

Par M. MONGE.

LORSQU'ON doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de *Remblai* à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.

Geometry



MÉMOIRE*

SUR LE CALCUL INTÉGRAL

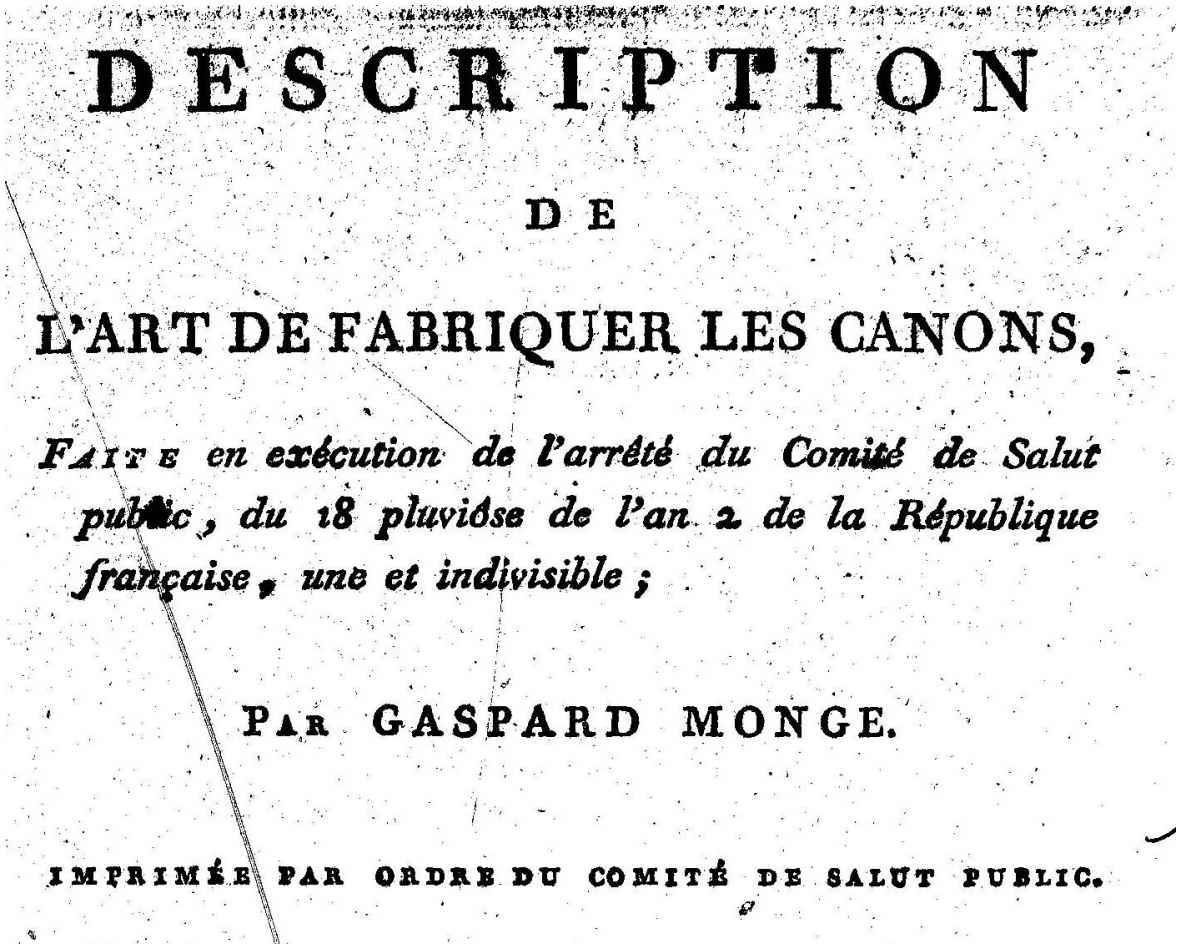
DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. MONGE.

TOUT ce que je me propoſe de dire ſur cet objet, étant fondé ſur le procédé que j'ai expoſé dans le Mémoire précédent, pour faire diſparoître, au moyen de la différenciation, les fonctions arbitraires qui ſont compriſes dans une équation intégrale, je vais reprendre ici ce procédé, pour le développer avec plus de clarté, & l'appliquer enſuite à l'intégration des équations aux différences partielles.

Je commencerai d'abord par les équations linéaires du premier ordre; je paſſerai enſuite & par degrés à celles des ordres ſupérieurs, & je terminerai ce Mémoire par quelques conſidérations ſur les équations élevées.

Applications



DESCRIPTION

DE

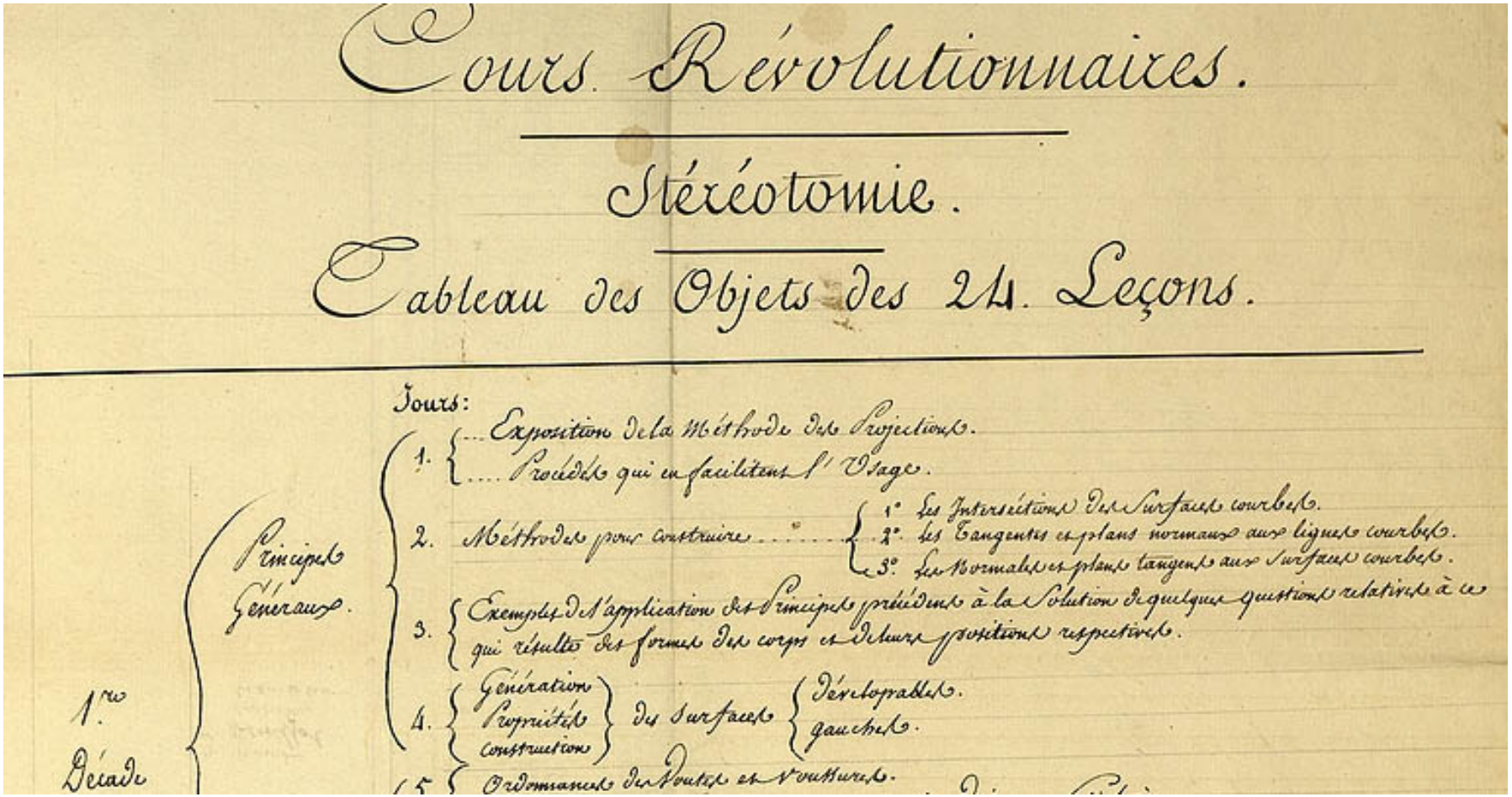
L'ART DE FABRIQUER LES CANONS,

Faite en exécution de l'arrêté du Comité de Salut public, du 18 pluviôse de l'an 2 de la République française, une et indivisible ;

PAR GASPARD MONGE.

IMPRIMÉE PAR ORDRE DU COMITÉ DE SALUT PUBLIC.

A teacher



Cours Révolutionnaires.

Stéréotomie.

Tableau des Objets des 24. Leçons.

Jours:

1re Décade

Principes Généraux.

1. Exposition de la Méthode des Projections.
   Procédés qui en facilitent l'Usage.
2. Méthodes pour construire ..... 1° les Intersections des Surfaces courbes. 2° les Tangentes et plans normaux aux lignes courbes. 3° les Normales et plans tangents aux Surfaces courbes.
3. Exemples de l'application des Principes précédents à la Solution de quelques questions relatives à ce qui résulte des formes des corps et de leurs positions respectives.
4. Génération, Propriétés, Constructions des Surfaces développables. gauches.
5. Ordonnances des Voutes et Voussures.

Some dates

- Euler : 1707-1783
- Lagrange : 1736-1813
- Condorcet : 1743-1794
- Monge : 1746-1818
- Laplace : 1749-1827
- Legendre : 1752-1833
- Lazare Carnot : 1753-1823
- Fourier : 1768-1830
- Gauss : 1777-1865

Some dates

- Louis 15 : 1710-1774
- Louis 16 : 1754-1793
- Robespierre : 1758-1794
- Danton : 1759-1794
- Napoléon : 1769-1821

Biography

- Until $\simeq$ 1789 : Science.
- 1789-1796 : French Revolution.
- 1796-1815 : Bonaparte : Italy, Egypt, honours.
- 1815-1818 : Restauration.

Biography

- Until $\simeq$ 1789 : Science.
- 1789-1796 : French Revolution.
- 1796-1815 : Bonaparte : Italy, Egypt, honours.
- 1815-1818 : Restauration.

Biography

- Until $\simeq$ 1789 : Science.
- 1789-1796 : French Revolution.
- 1796-1815 : Bonaparte : Italy, Egypt, honours.
- 1815-1818 : Restauration.

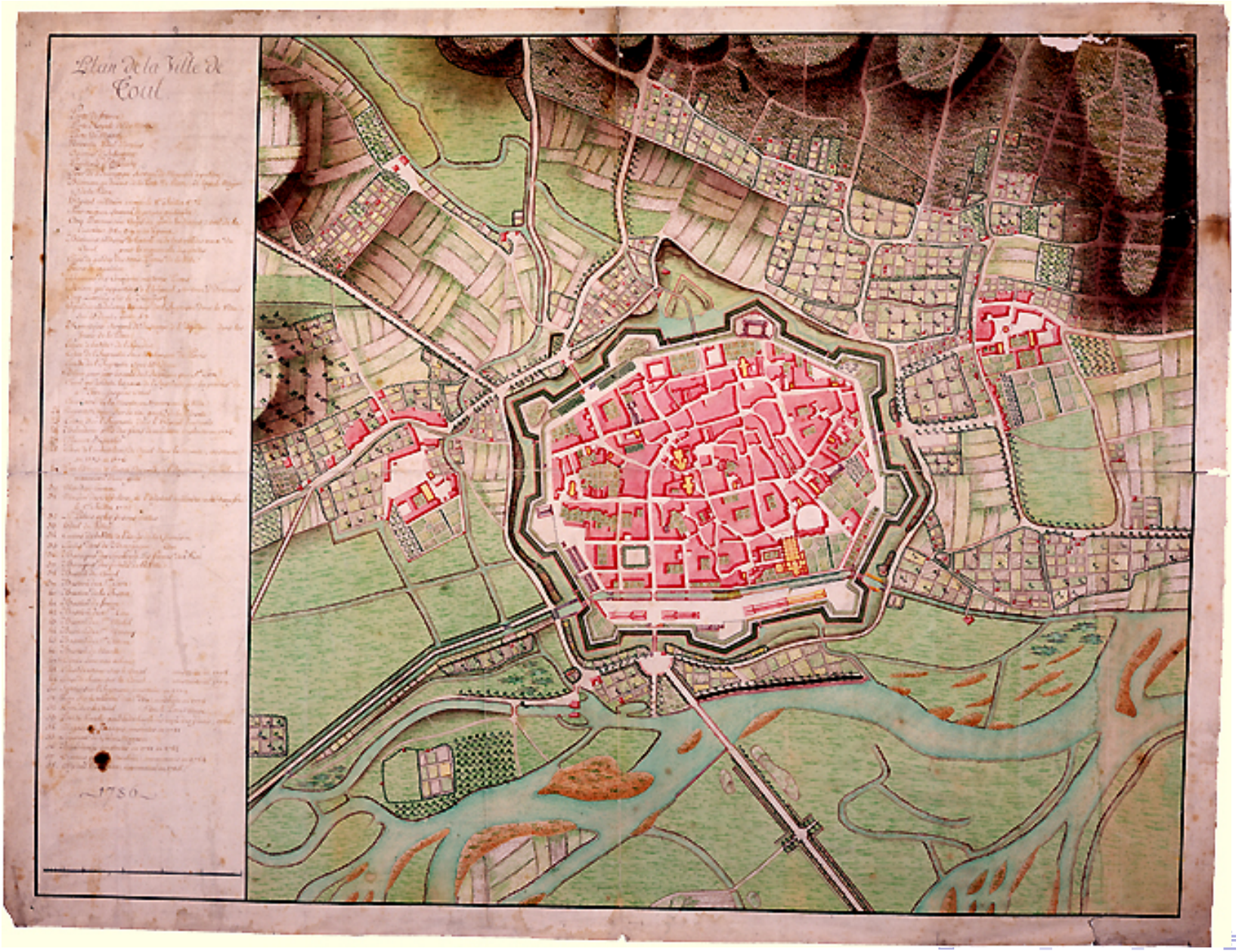
Biography

- Until $\simeq$ 1789 : Science.
- 1789-1796 : French Revolution.
- 1796-1815 : Bonaparte : Italy, Egypt, honours.
- 1815-1818 : Restauration.

Military school in Mézières

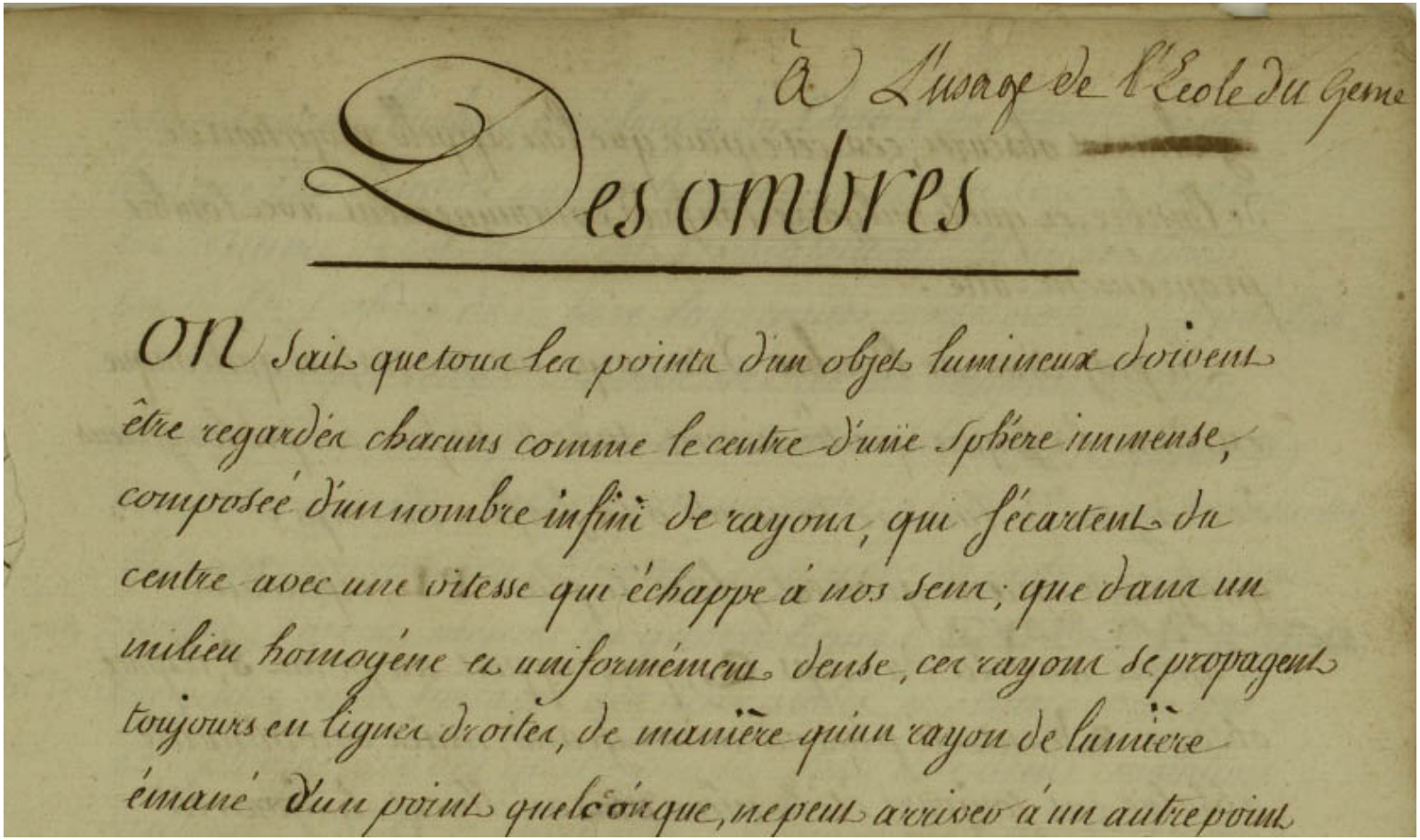


I : “défilement”



II : Cutting stones



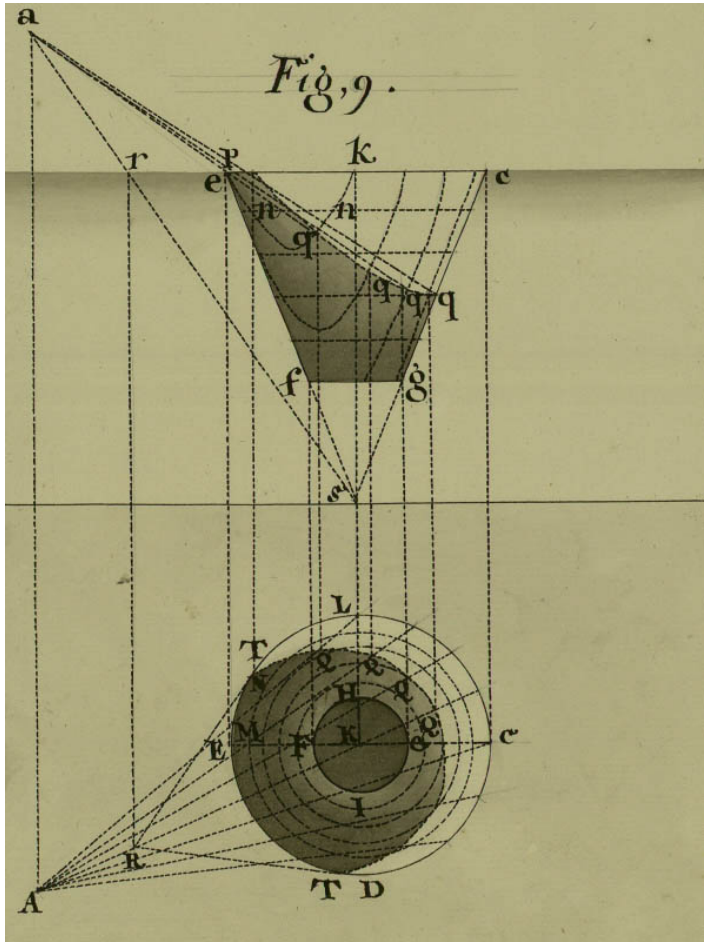


À l'usage de l'École du Genie

Des ombres

On sait que tous les points d'un objet lumineux doivent être regardés chacuns comme le centre d'une Sphère immense, composée d'un nombre infini de rayons, qui s'écartent du centre avec une vitesse qui échappe à nos sens; que dans un milieu homogène et uniformément dense, ces rayons se propagent toujours en lignes droites, de manière qu'un rayon de lumière émané d'un point quelconque, ne peut arriver à un autre point

III : Shadows



IV : “Déblais et remblais”



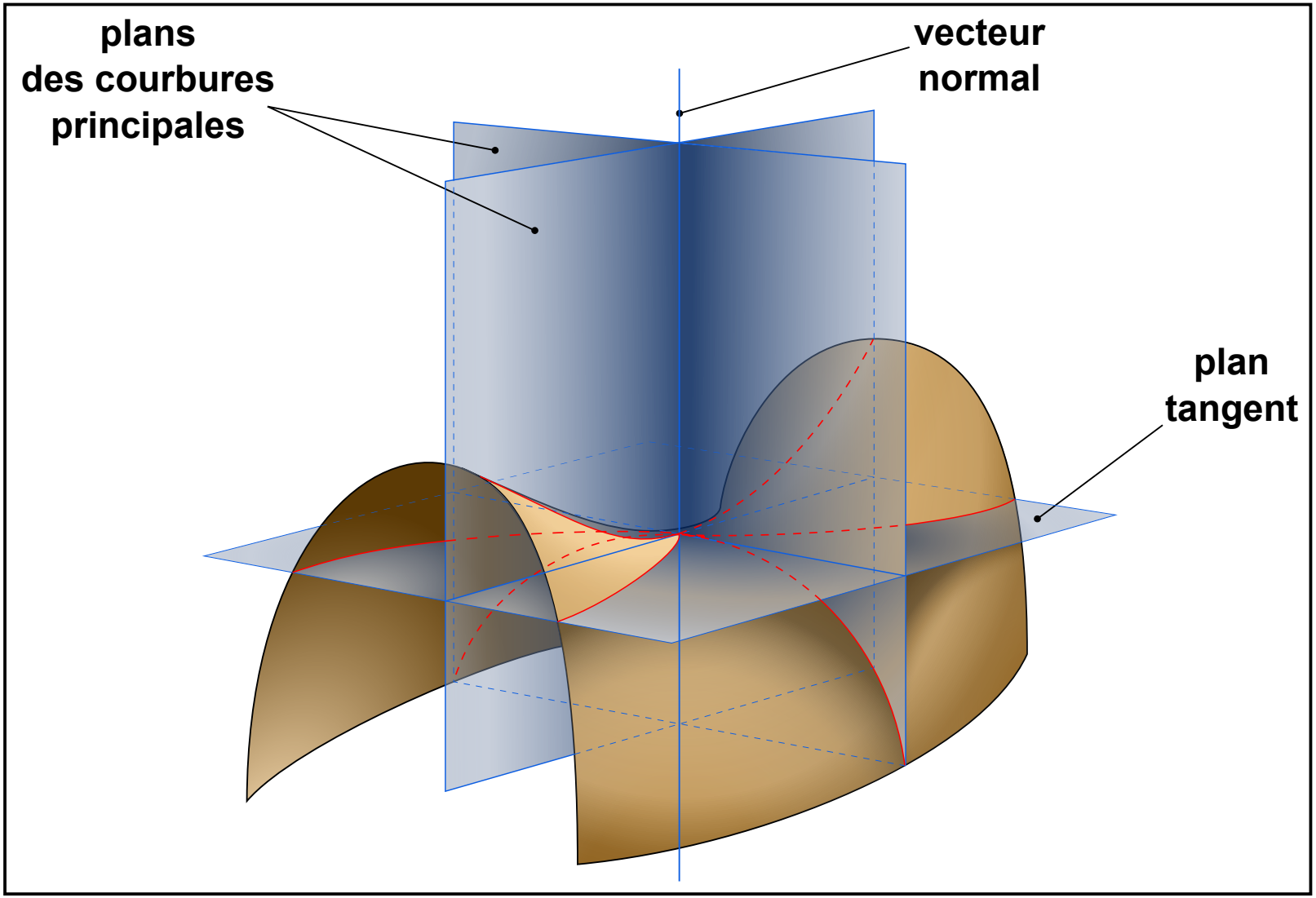
Euler and curvature of surfaces : 1763

RECHERCHES
SUR
LA COURBURE DES SURFACES.
PAR M. EULER.

Pour connoitre la courbure des lignes courbes, la détermination du rayon oſculateur en fournit la plus juſte meſure, en nous préſentant pour chaque point de la courbe un cercle, dont la courbure eſt préciſément la même. Mais, quand on demande la courbure d'une ſurface, la queſtion eſt fort équivoque, & point du tout ſuſceptible d'une reponſe abſolue, comme dans le cas précédent. Il n'y a que les ſurfaces ſphériques dont on puiſſe meſurer la courbure, attendu que la courbure d'une ſphere eſt la même que celle de ſes grands cercles, & que ſon rayon en peut être regardé comme la juſte meſure. Mais pour les autres ſurfaces on n'en ſauroit même comparer la courbure avec celle d'une ſphere, comme on peut toujours comparer la courbure d'une ligne courbe avec celle d'un cercle; la raiſon en eſt évidente puisque, dans chaque point d'une ſurface, il peut y avoir une infinité de courbures différentes. On n'a qu'à conſidérer la ſurface d'un cylindre, où ſelon les directions paralleles à l'axe il n'y a aucune courbure, pendant que dans les ſections perpendiculaires à l'axe, qui ſont des cercles, la courbure eſt la même, & que toute autre ſection faite obliquement à l'axe donne une courbure particuliere. Il en eſt de même de toutes les autres ſurfaces, où il peut même arriver que dans un ſens la courbure ſoit convexe, & dans un autre concave, comme dans celles qui reſſemblent à une ſelle.

Donc la queſtion ſur la courbure des ſurfaces n'eſt pas ſuſceptible d'une réponſe ſimple, mais elle exige à la fois une infinité de déter-mi-

Euler and curvature of surfaces : 1763



Euler and developable surfaces : 1770

DE

SOLIDIS QVORVM

SVPERFICIEM IN PLANVM

EXPLICARE LICET.

Auctore

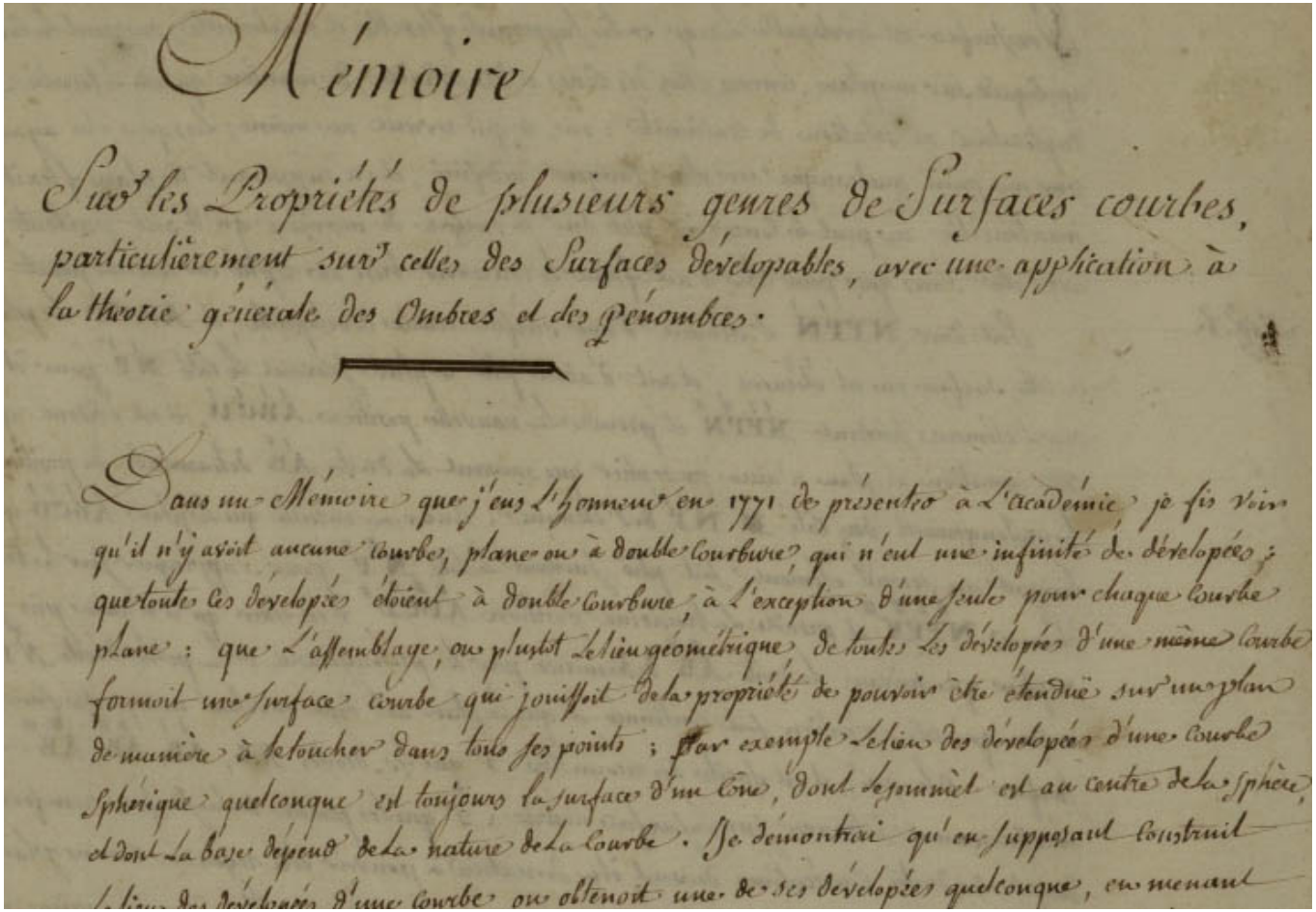
L. EVLERO.

§. 1.

Notiſſima eſt proprietas cylindri et coni, qua eorum ſuperficiem in planum explicare licet atque adeo haec proprietas ad omnia corpora cylindrica et conica extenditur, quorum baſes figuram habeant quamcunque; contra vero ſphaera hac proprietate deſtituitur, quum eius ſuperficies nullo modo in planum explicari neque ſuperficie plana obduci queat; ex quo naſcitur quaeſtio aeque curioſa ac notatu digna, vtrum praeter conos et cylindros alia quoque corporum genera exiſtant, quorum ſuperficiem itidem in planum explicare liceat nec ne? quam ob rem in hac diſſertatione ſequens conſiderare conſtitui Problema:

Inuenire aequationem generalem pro omnibus ſolidis, quorum ſuperficiem in planum explicare licet, cuius ſolutionem variis modis ſum agreſſurus.

Monge and developable surfaces : 1770



Mémoire

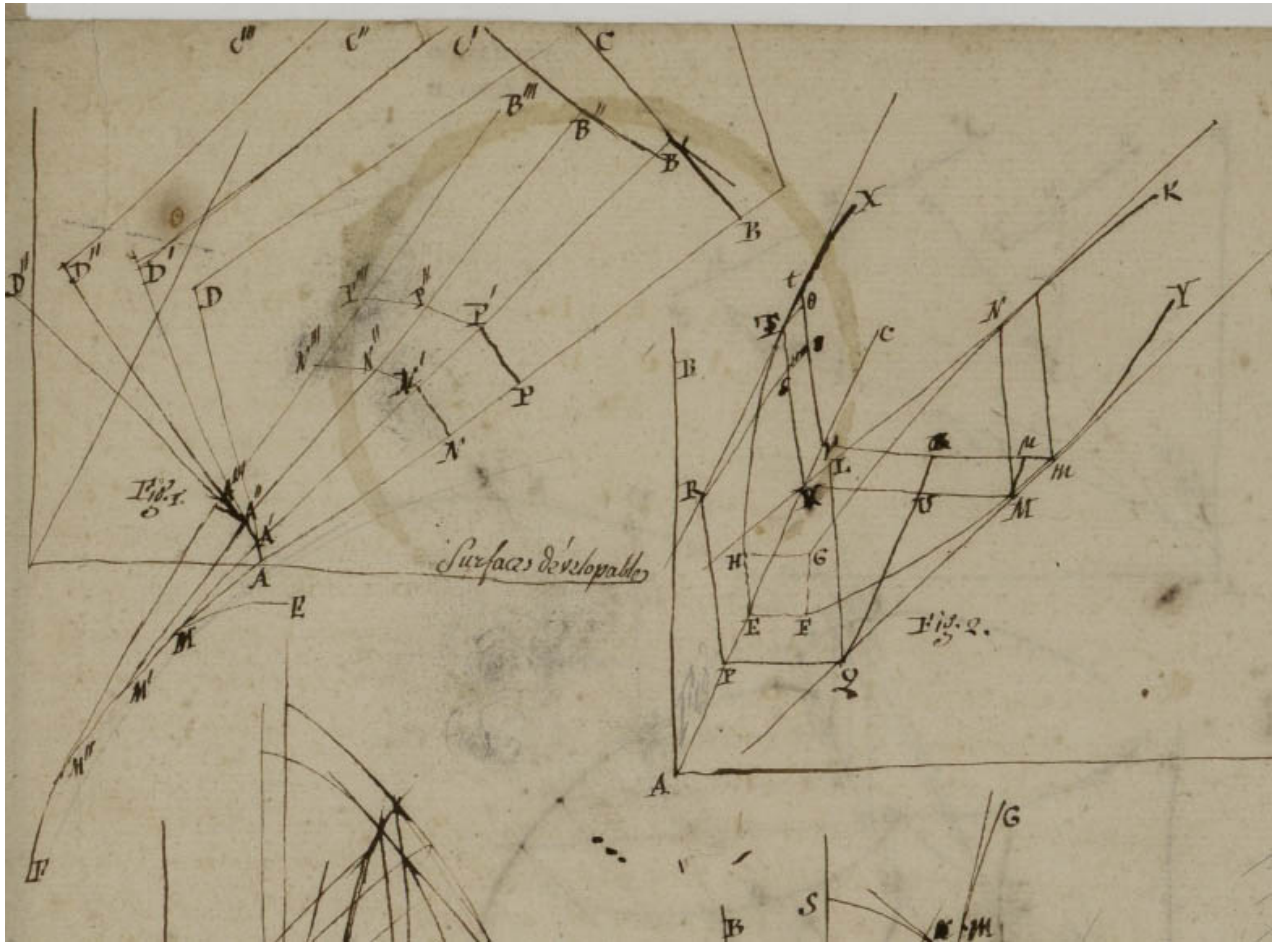
Sur les Propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles des Surfaces développables, avec une application à la théorie générale des Ombres et des Pénombres.

Dans un Mémoire que j'eus l'honneur en 1771 de présenter à l'Académie, je fis voir qu'il n'y avoit aucune courbe, plane ou à double courbure, qui n'eut une infinité de développées ; que toutes ces développées étoient à double courbure, à l'exception d'une seule pour chaque courbe plane : que l'assemblage, ou plutôt le lieu géométrique de toutes les développées d'une même courbe formoit une surface courbe qui jouissoit de la propriété de pouvoir être étendue sur un plan de manière à le toucher dans tous ses points ; par exemple le lieu des développées d'une courbe sphérique quelconque est toujours la surface d'un Cône, dont le sommet est au centre de la sphère, et dont la base dépend de la nature de la courbe. Je démontrai qu'en supposant construit le lieu des développées d'une courbe on obtenoit une de ses développées quelconque, en menant

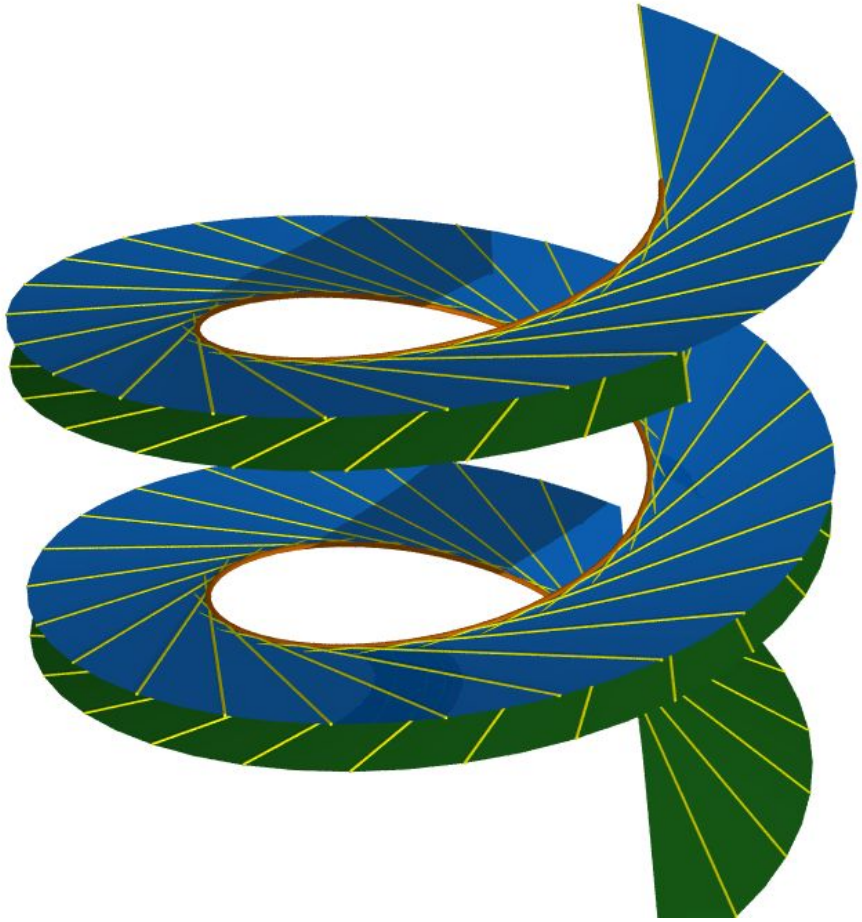
Developable surfaces

- Envelope of a one parameter family of planes.
- The surface swept by all tangent lines to a space curve.
- A ruled surface whose tangent plane is constant along the generating lines.
- A surface “applicable” on a plane.

Developable surfaces : Monge



Developable surfaces : Monge



Developable surfaces : Monge



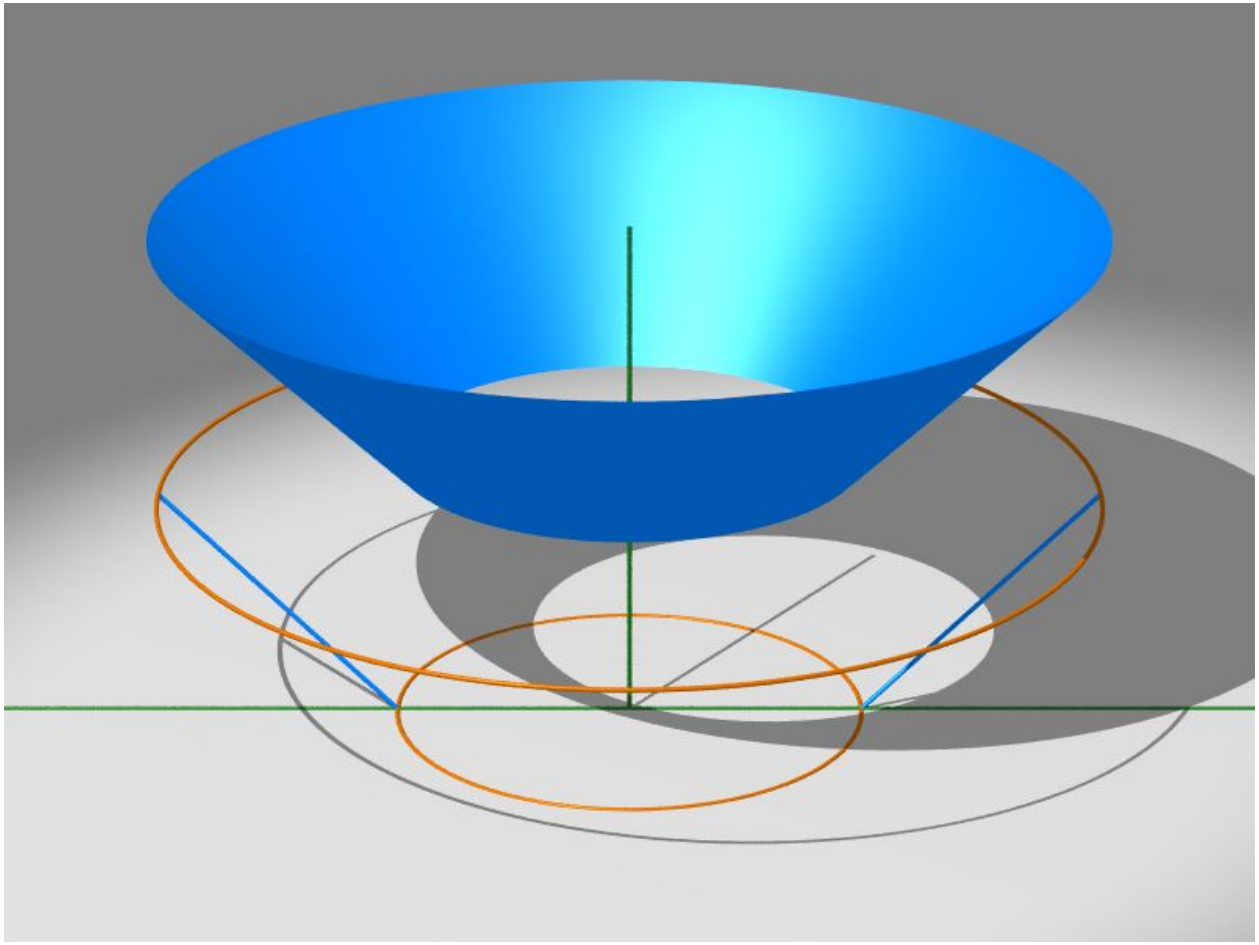
Developable surfaces : Monge



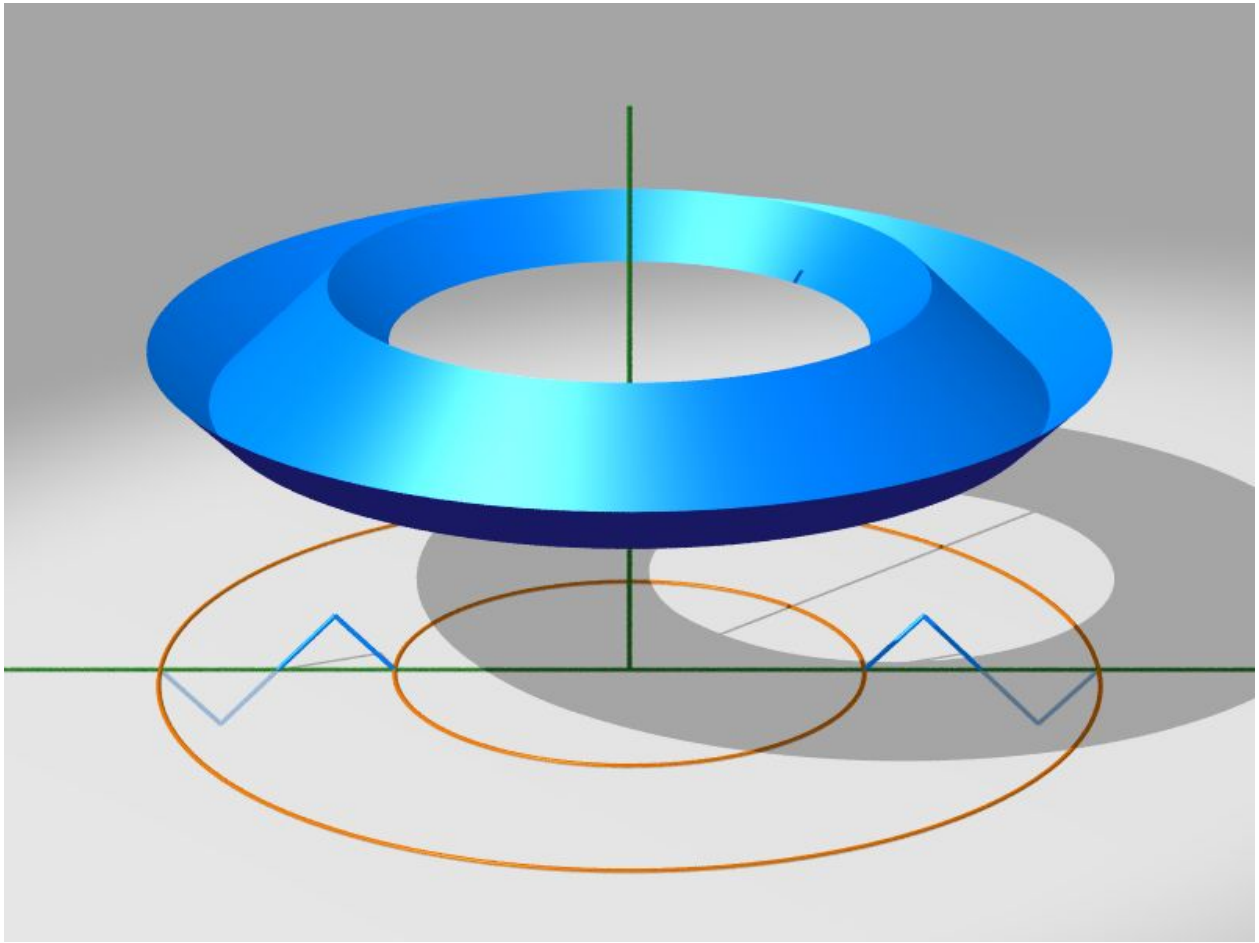
Developable surfaces : Monge



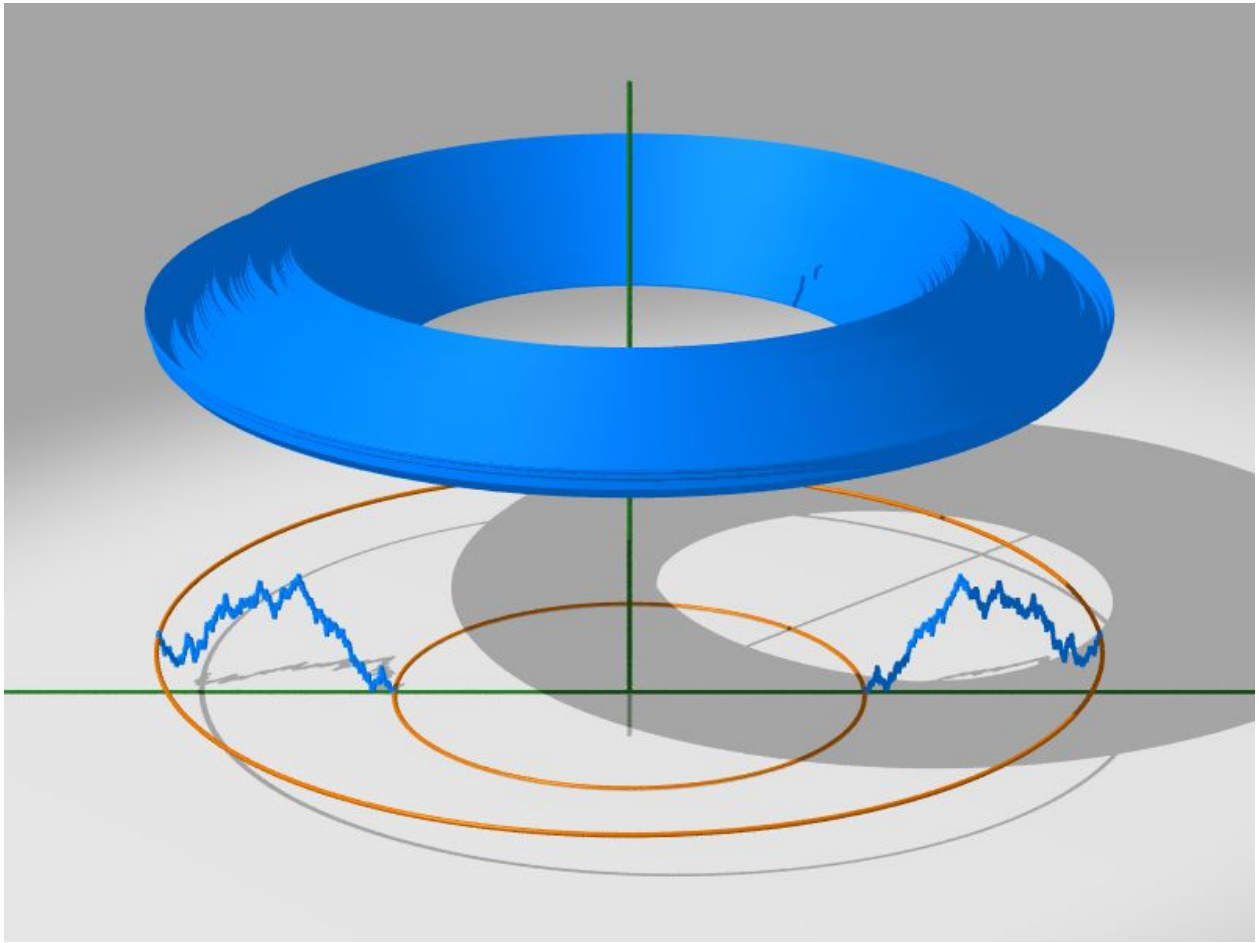
Developable surfaces, à la Lebesgue : 1899



Developable surfaces, à la Lebesgue : 1899



Developable surfaces, à la Lebesgue : 1899



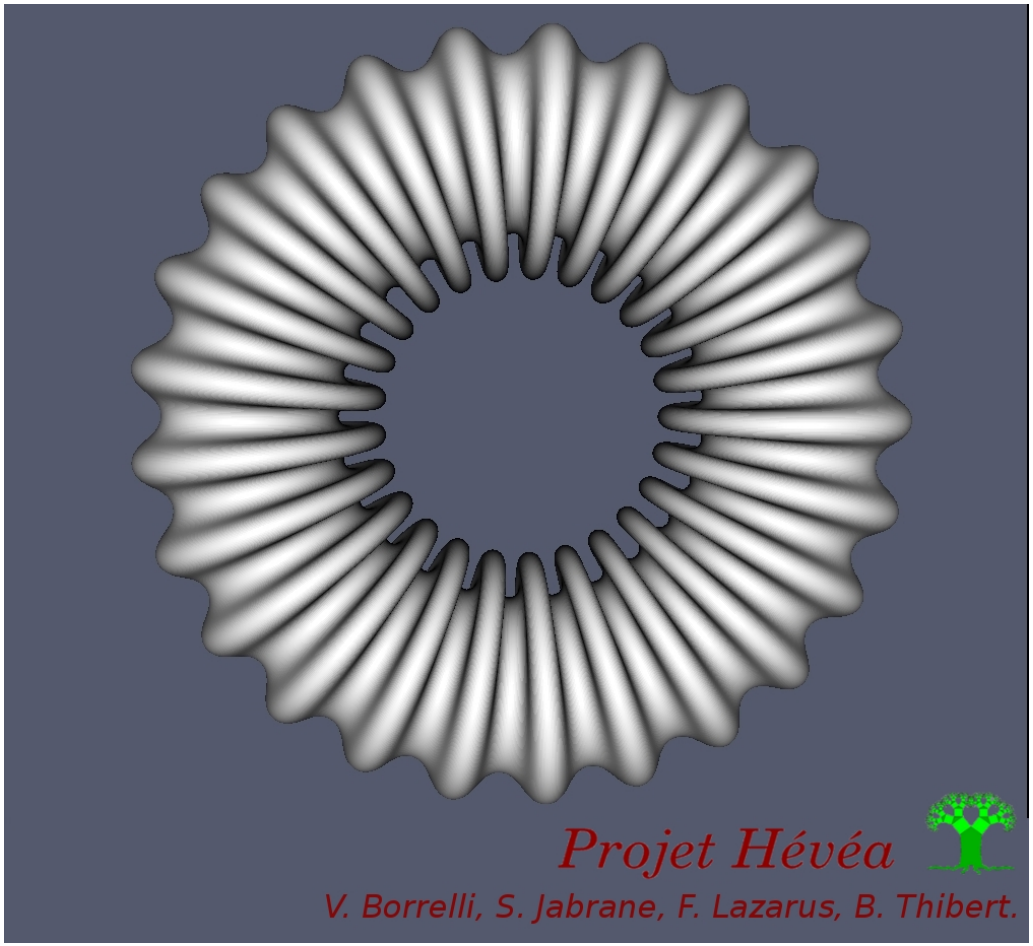
J. Leys

C^1 flat surfaces

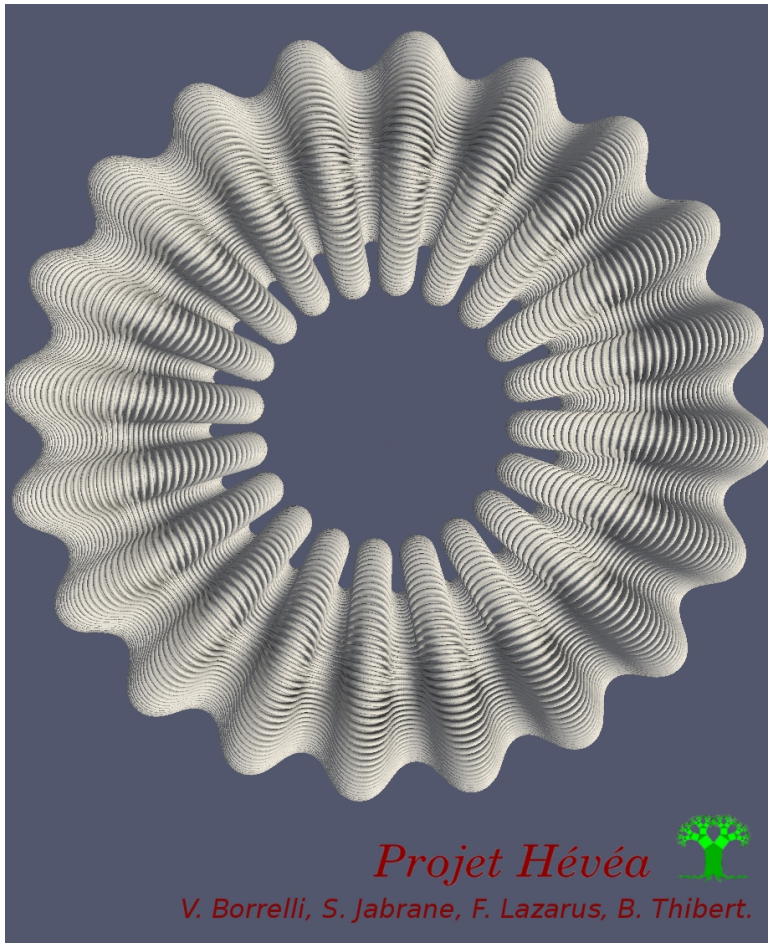
Every riemannian compact orientable surface, for example a flat torus, can be C^1 embedded isometrically in $\mathbf{R^3}$.

Nash (1954), Kuiper (1955), Gromov...

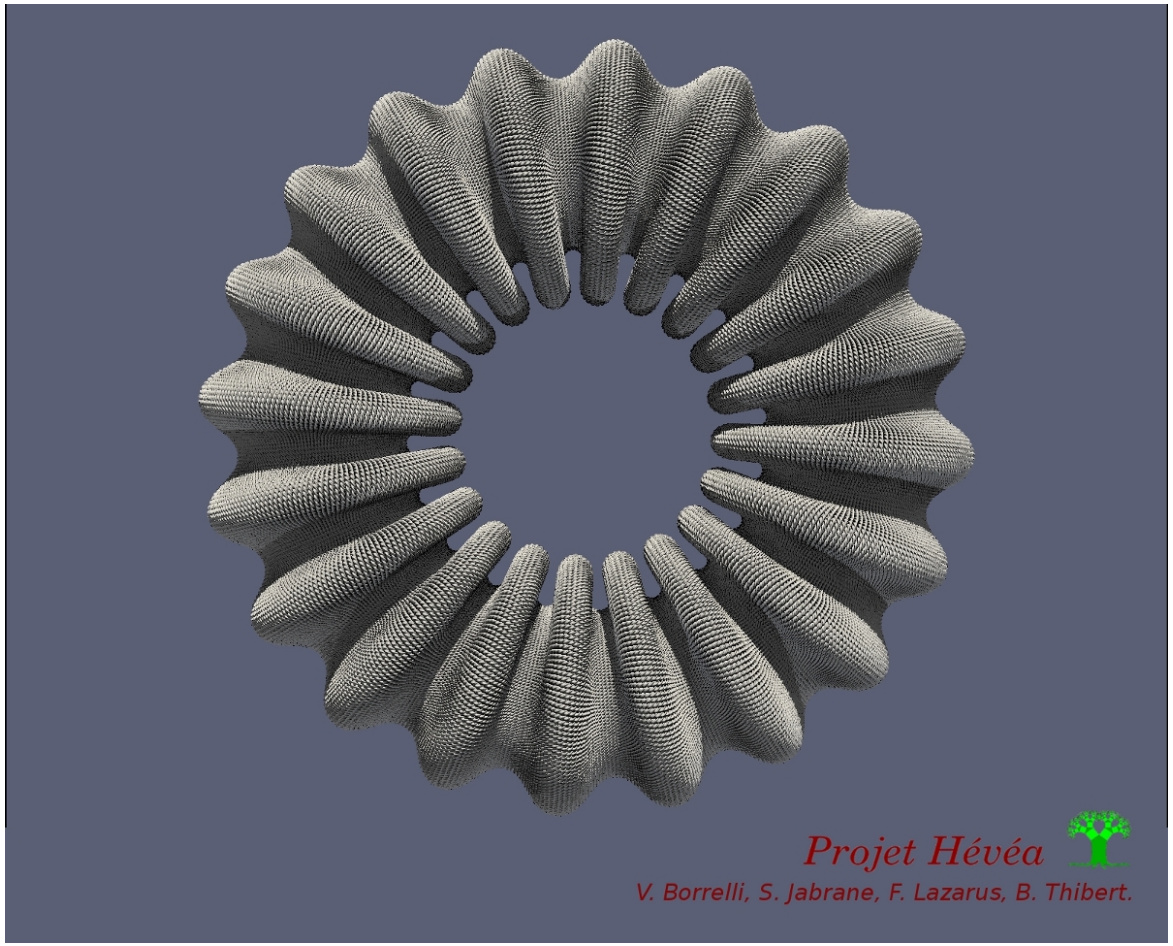
Developable surfaces 2011 : Borrelli, Jabrane, Lazarus, Thibert



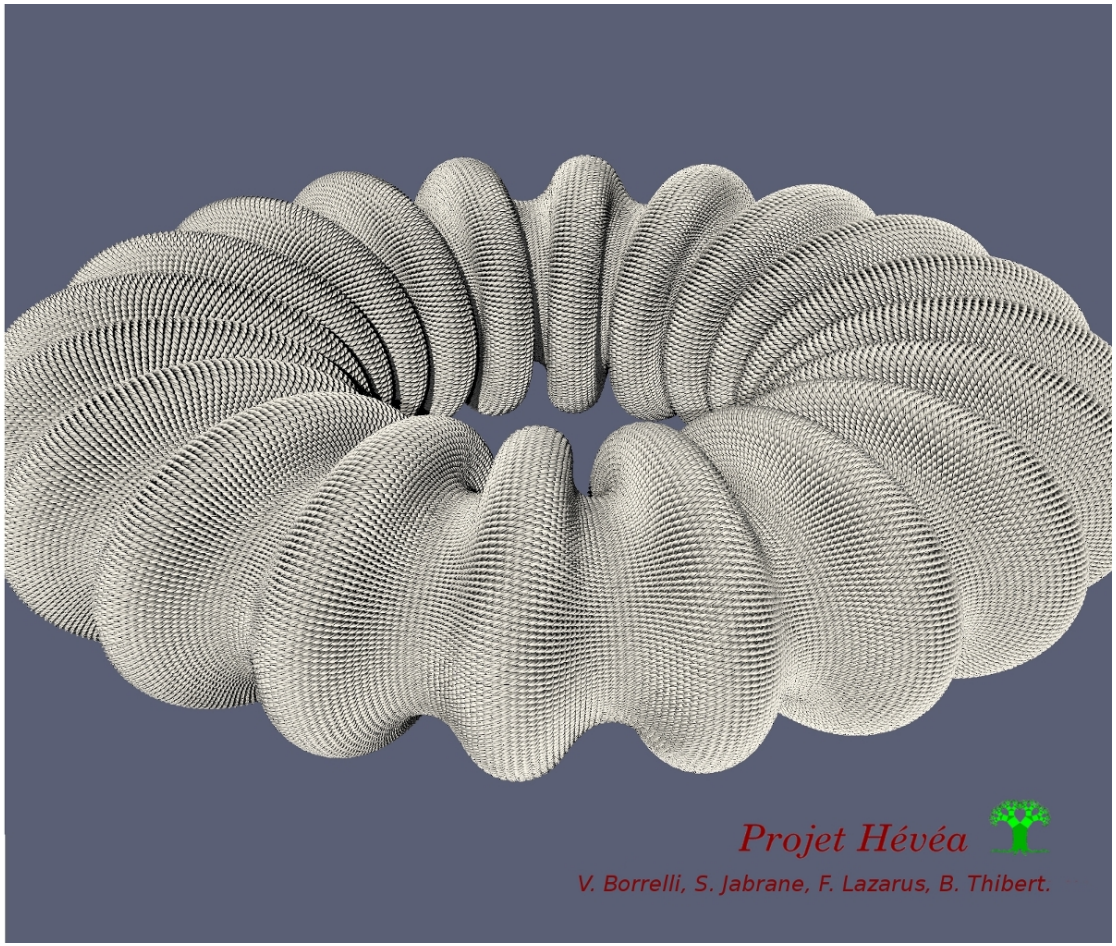
Developable surfaces 2011 : Borrelli, Jabrane, Lazarus, Thibert



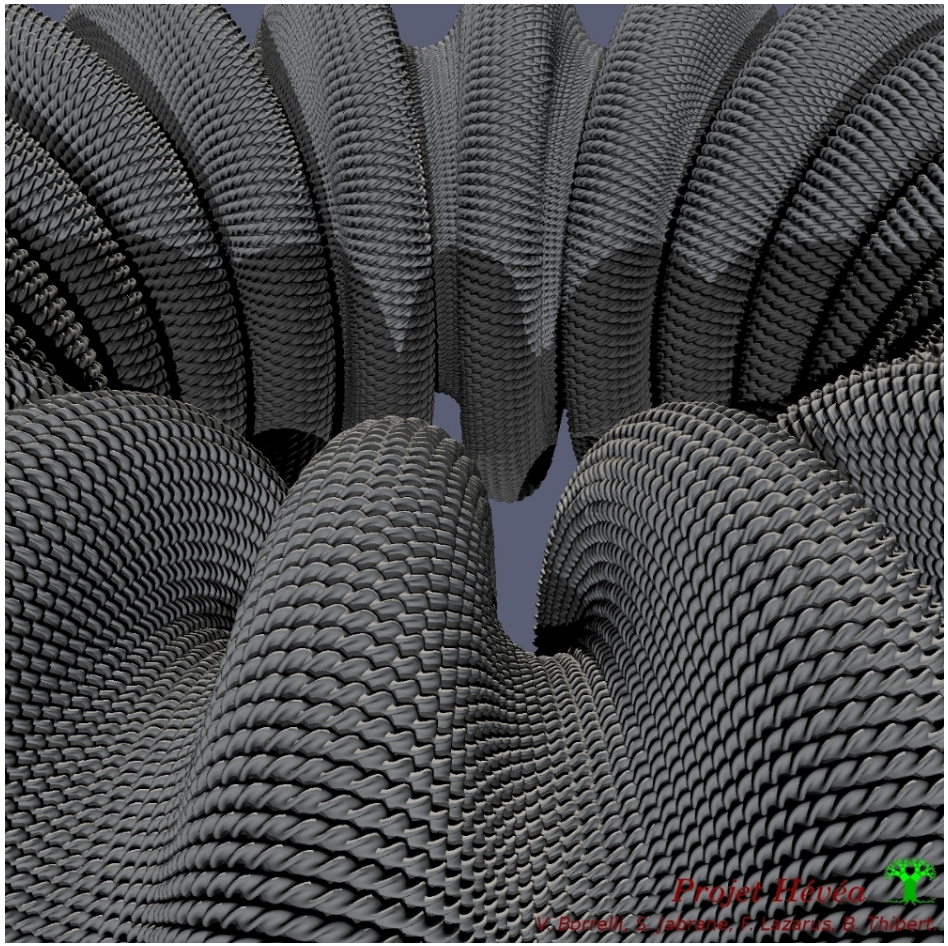
Developable surfaces 2011 : Borrelli, Jabrane, Lazarus, Thibert



Developable surfaces 2011 : Borrelli, Jabrane, Lazarus, Thibert



Developable surfaces 2011 : Borrelli, Jabrane, Lazarus, Thibert



MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DES DÉBLAIS
ET DES REMBLAIS.

Par M. MONGE.

LORSQU'ON doit transporter des terres d'un lieu dans un autre, on a coutume de donner le nom de *Déblai* au volume des terres que l'on doit transporter, & le nom de *Remblai* à l'espace qu'elles doivent occuper après le transport.

Le prix du transport d'une molécule étant, toutes choses d'ailleurs égales, proportionnel à son poids & à l'espace qu'on lui fait parcourir, & par conséquent le prix du transport total devant être proportionnel à la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru, il s'ensuit que le déblai & le remblai étant donnés de figure & de position, il n'est pas indifférent que telle molécule du déblai soit transportée dans tel ou tel autre endroit du remblai, mais qu'il y a une certaine distribution à faire des molécules du premier dans le second, d'après laquelle la somme de ces produits sera la moindre possible, & le prix du transport total sera un *minimum*.

Déblais et remblais : 1781

XXXVI.

La ſolution de ce problème, qu'il eût été très-difficile de trouver par les méthodes ordinaires des *maximum* & *minimum*, eſt très-éloignée d'être applicable à la pratique, tant à cauſe des difficultés que l'analyſe peut préſenter, que parce que nous ne ſommes pas dans l'hypothèſe de la nature: en effet, dans le tranſport des terres, chaque molécule ne peut pas toujours ſuivre la droite menée du point du départ au point d'arrivée; on ne peut que la traîner ſur la ſurface du terrein dont, à cauſe de ſa peſanteur, elle doit ſuivre les ſinuoſités, ſur-tout dans le ſens vertical. Ces conſidérations nous auroient empêché de traiter ce dernier cas, s'il ne nous eût fourni l'occaſion de publier quelques propriétés nouvelles & remarquables des ſurfaces courbes conſidérées en général.

« The solution of this problem is far from being usable in practice... »
« This gives us some opportunity to publish some new and remarkable properties of curved surfaces. »

Déblais et remblais : 1781

The two-dimensional problem.

PREMIERE PARTIE.

Du tranſport des aires planes ſur des aires compriſes dans un même plan.

Déblais et remblais : 1781

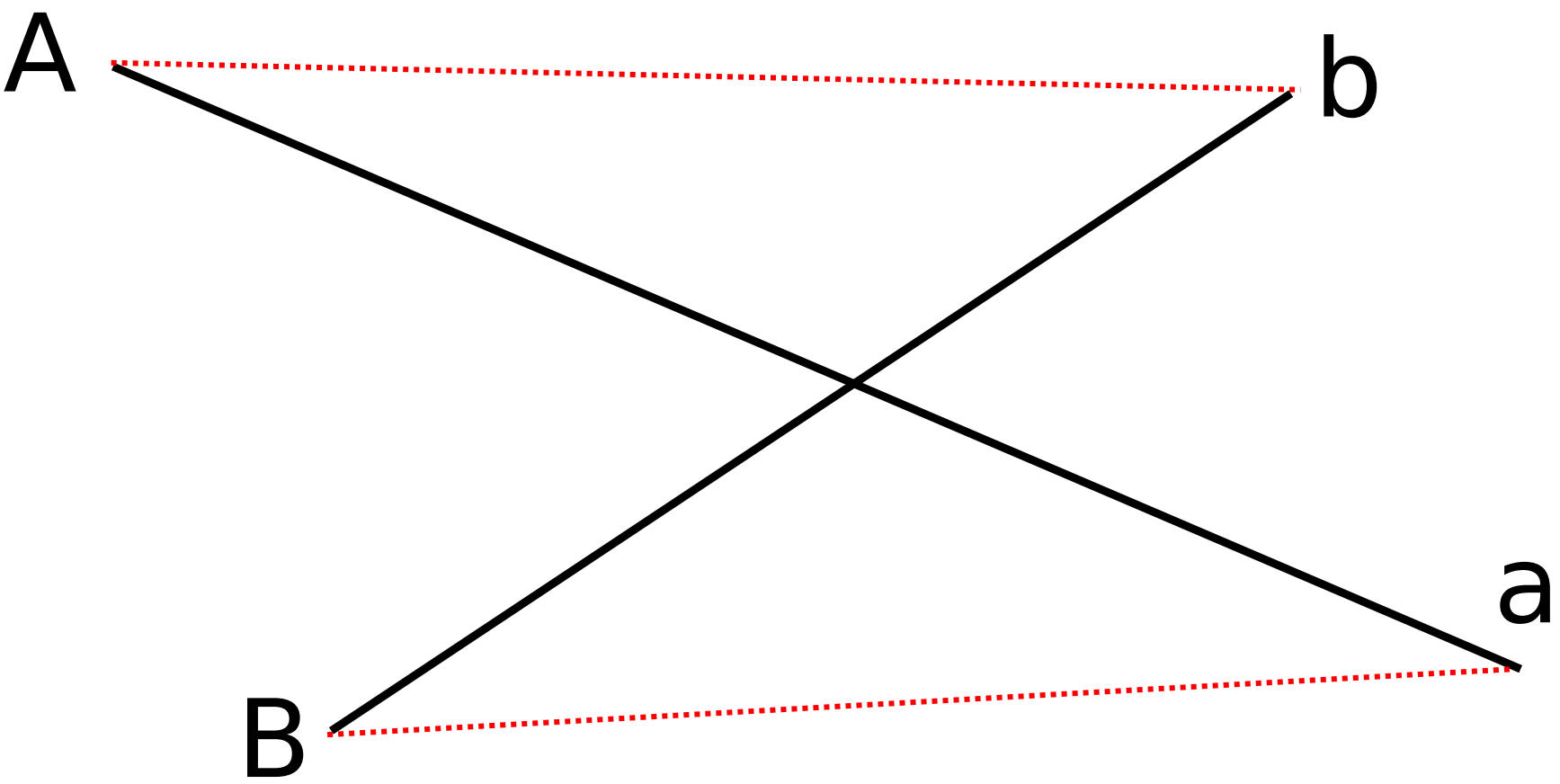
« Routes can only intersect at endpoints. »

I I.

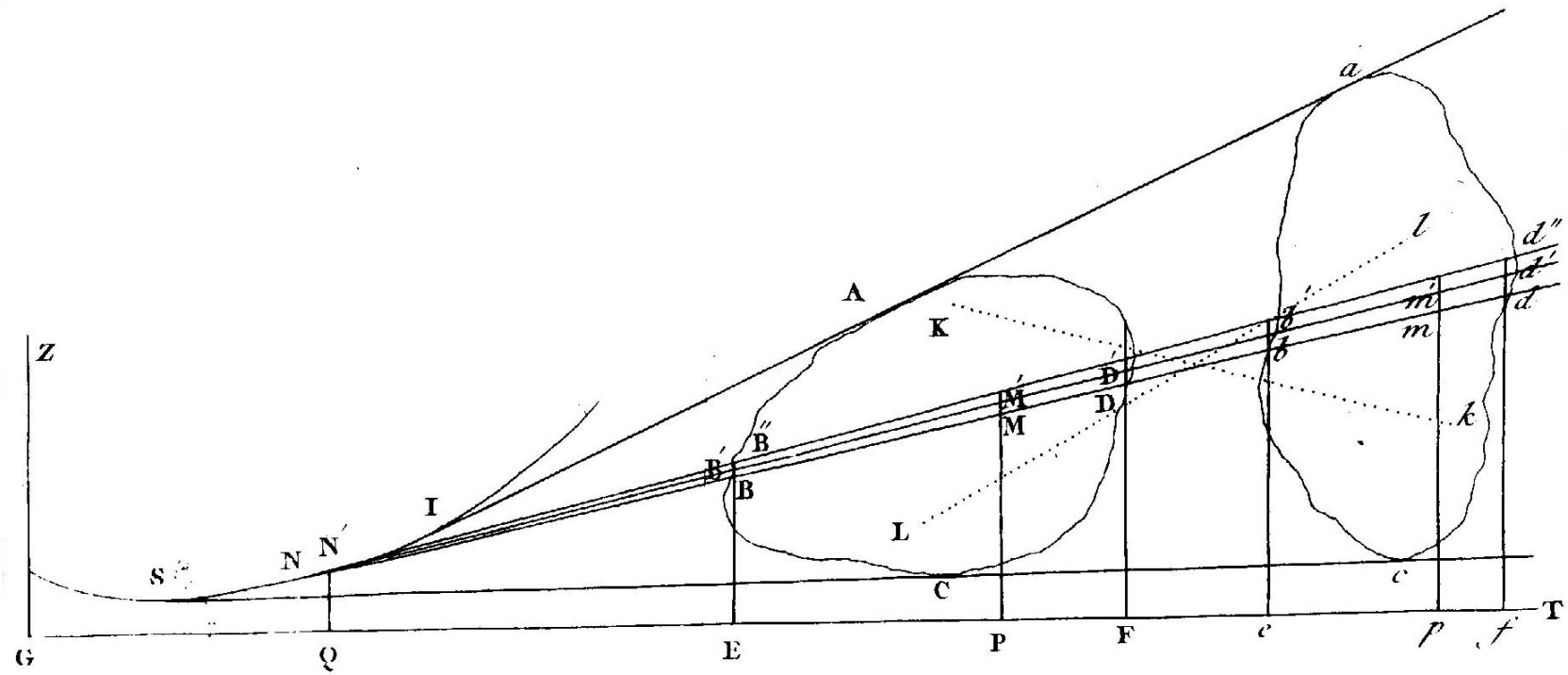
Lorſque le tranſport du déblai ſe fait de manière que la ſomme des produits des molécules par l'eſpace parcouru eſt un *minimum*, les routes de deux points quelconques A & B, ne doivent pas ſe couper entre leurs extrémités, car la ſomme $A\,b + B\,a$, des routes qui ſe coupent, eſt toujours plus grande que la ſomme $A\,a + B\,b$, de celles qui ne ſe coupent pas. Fig. 1.

Je ſuppoſerai dans la ſuite que le déblai ſoit d'une denſité uniforme, & qu'il ſoit diviſé en molécules égales entre elles, afin que la queſtion ſoit ſimplifiée & réduite à faire en ſorte que la ſomme des routes ſoit un *minimum*.

Déblais et remblais : 1781



Déblais et remblais : 1781



Déblais et remblais : 1781

« This being said, all the previous discussion can only be true if .... »

« Otherwise, the previous solution is illusory. »

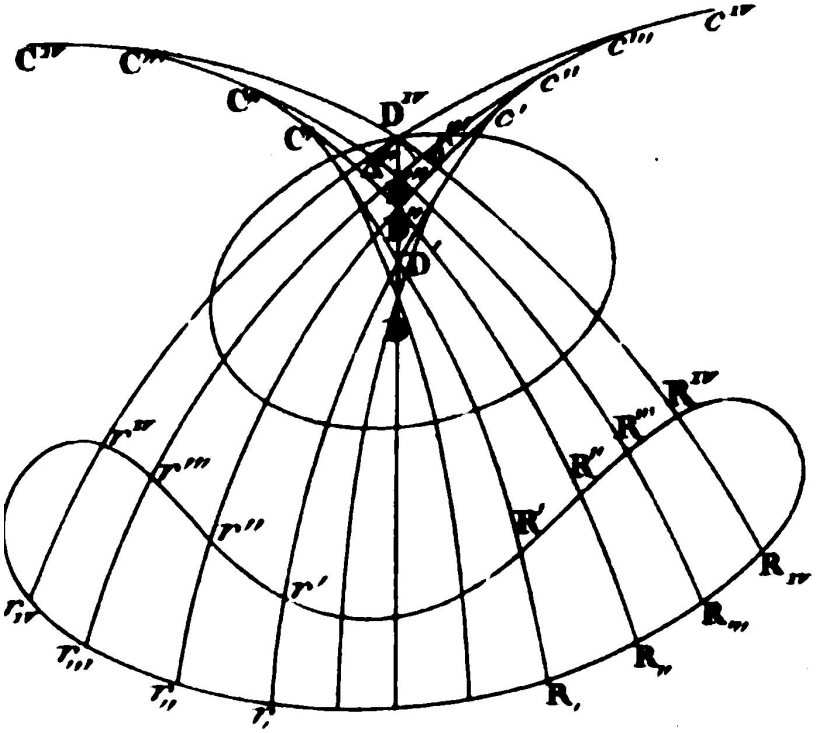
; cela poſé, tout ce qui précède n'eſt exact que lorſque la partie $S\ N\ I$ de cette cauſtique ſe trouve toute entière au-delà des déblais par rapport aux remblais, ou au-delà des remblais par rapport aux déblais; lorſque l'arc $S\ N\ I$ ſe trouve, même en partie, dans le déblai, ou dans le remblai, ou entre les deux; la ſolution précédente eſt illuſoire.

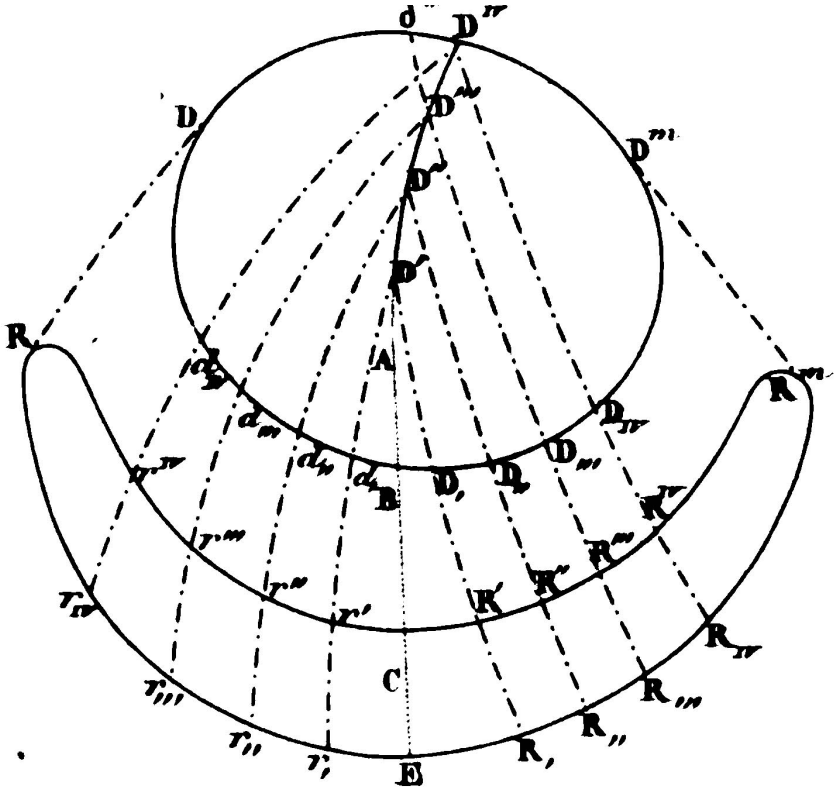
Déblais et remblais : 1781

« In this case, one should subdivide the déblai and the remblai in two parts and apply the previous technique to each part. »

Dans ce cas, pour résoudre la queſtion, il faut diviſer le déblai en deux parties par une courbe, & le remblai en deux parties par une autre courbe, & chercher quelles doivent être ces deux courbes, pour que les deux parties du déblai étant tranſportées ſéparément par la méthode précédente ſur les deux parties correſpondantes du remblai, la ſomme des produits des molécules par les eſpaces parcourus, ſoient un *minimum*, queſtion qui eſt de nature à être traitée par la méthode des *maxima* & *minima* des formules indéfinies.

Déblais et remblais : 1781

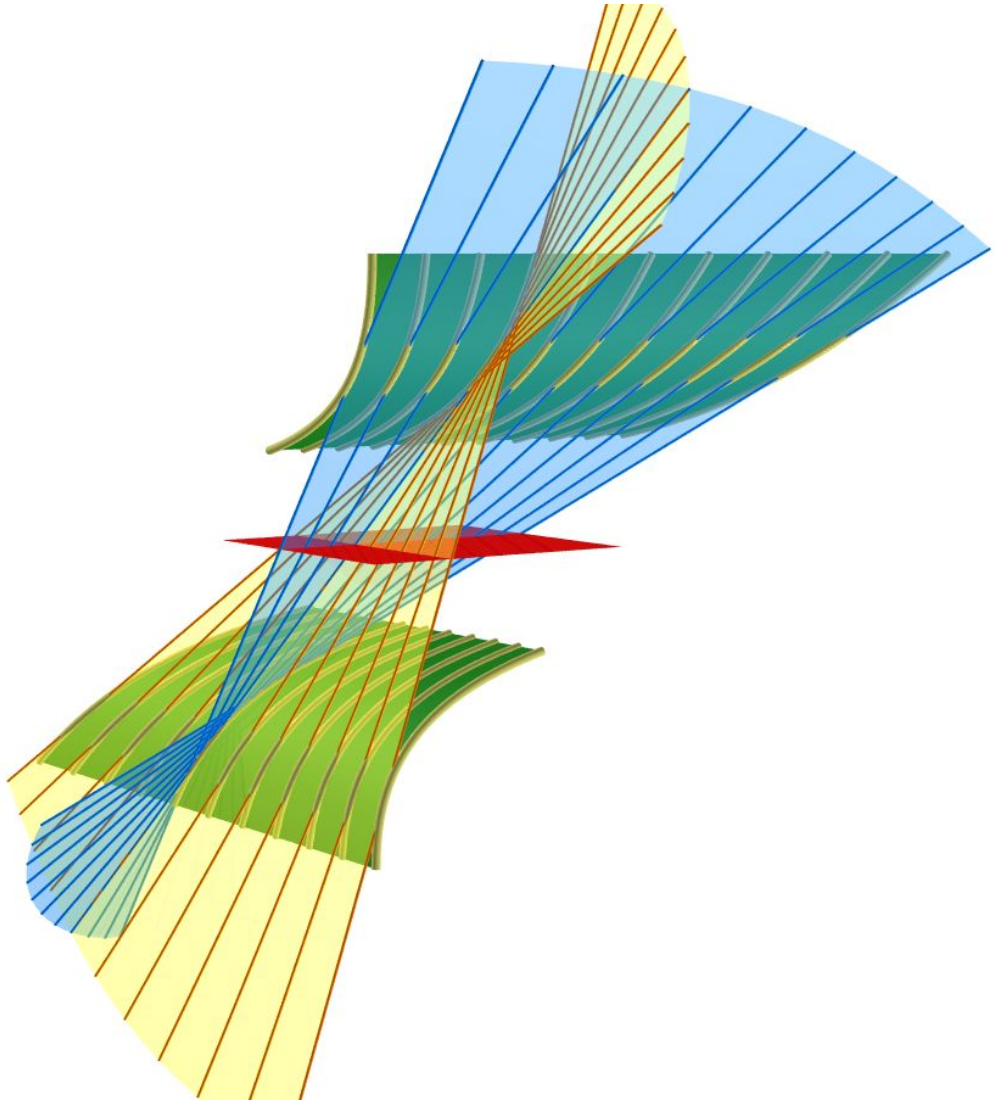




Congruences

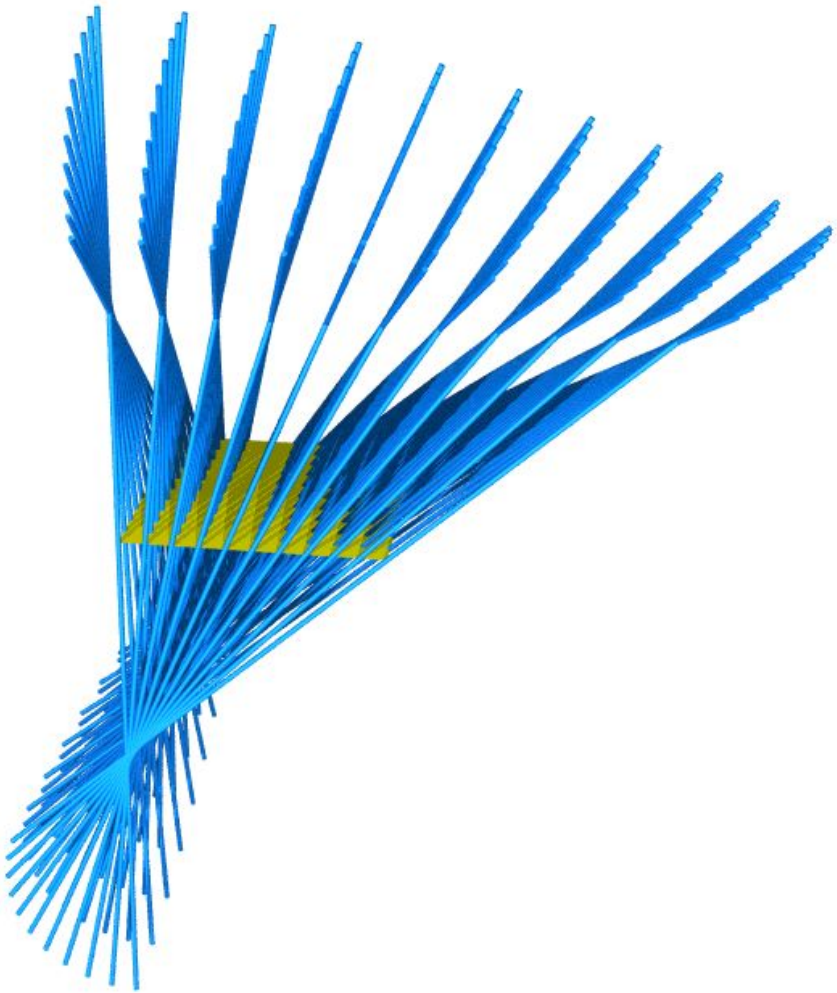


Congruences



J. Leys

Congruences



J. Leys

Déblais et remblais : 1781

Part 2

Déblai and remblai in dimension 3

If, through every point in a plane, one draws a straight line, according to any rule, and if one considers one of these lines, I say that among those lines which are infinitesimally close to it, only two of them intersect it and are therefore in the same plane. »

SECONDE PARTIE.

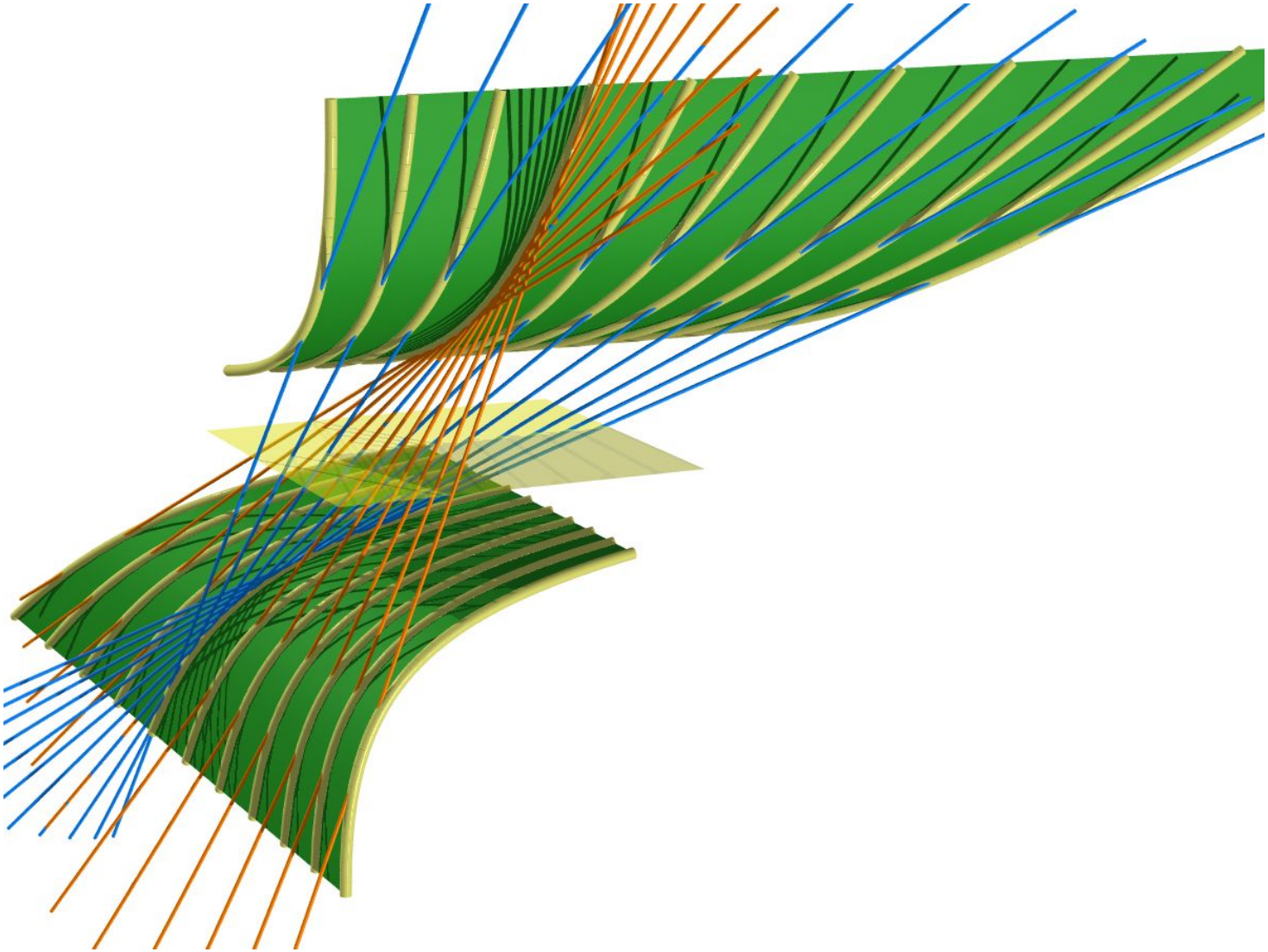
Des Déblais & Remblais dans le cas des trois dimenſions.

AVANT que d'entrer en matière, je vais établir quelques propoſitions de Géométrie, ſur leſquelles ſont fondées les recherches ſuivantes.

XIX.

Si par tous les points d'un plan, l'on conçoit des droites menées dans l'eſpace, ſuivant une loi quelconque, & qu'on conſidère une de ces droites, je dis que de toutes celles qui l'environnent & qui en ſont infiniment proches, il n'y en a généralement que deux qui la coupent, & qui ſoient par conſéquent dans un même plan avec elle.

Déblais et remblais : 1781



J. Leys

Proof

- For each point $(x, y, 0)$, one considers the line generated by $(A(x, y), B(x, y), 1)$.
- At $(x + dx, y + dy, 0)$, the line is generated by $(A + dA, B + dB, 1)$.
- Coplanar if

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ A & B & 1 \\ A + \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy & B + \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Second degree equation in $\frac{dy}{dx}$.

Proof

- For each point $(x, y, 0)$, one considers the line generated by $(A(x, y), B(x, y), 1)$.
- At $(x + dx, y + dy, 0)$, the line is generated by $(A + dA, B + dB, 1)$.
- Coplanar if

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ A & B & 1 \\ A + \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy & B + \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Second degree equation in $\frac{dy}{dx}$.

Proof

- For each point $(x, y, 0)$, one considers the line generated by $(A(x, y), B(x, y), 1)$.
- At $(x + dx, y + dy, 0)$, the line is generated by $(A + dA, B + dB, 1)$.
- Coplanar if

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ A & B & 1 \\ A + \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy & B + \frac{\partial B}{\partial x}dx + \frac{\partial B}{\partial y}dy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Second degree equation in $\frac{dy}{dx}$.

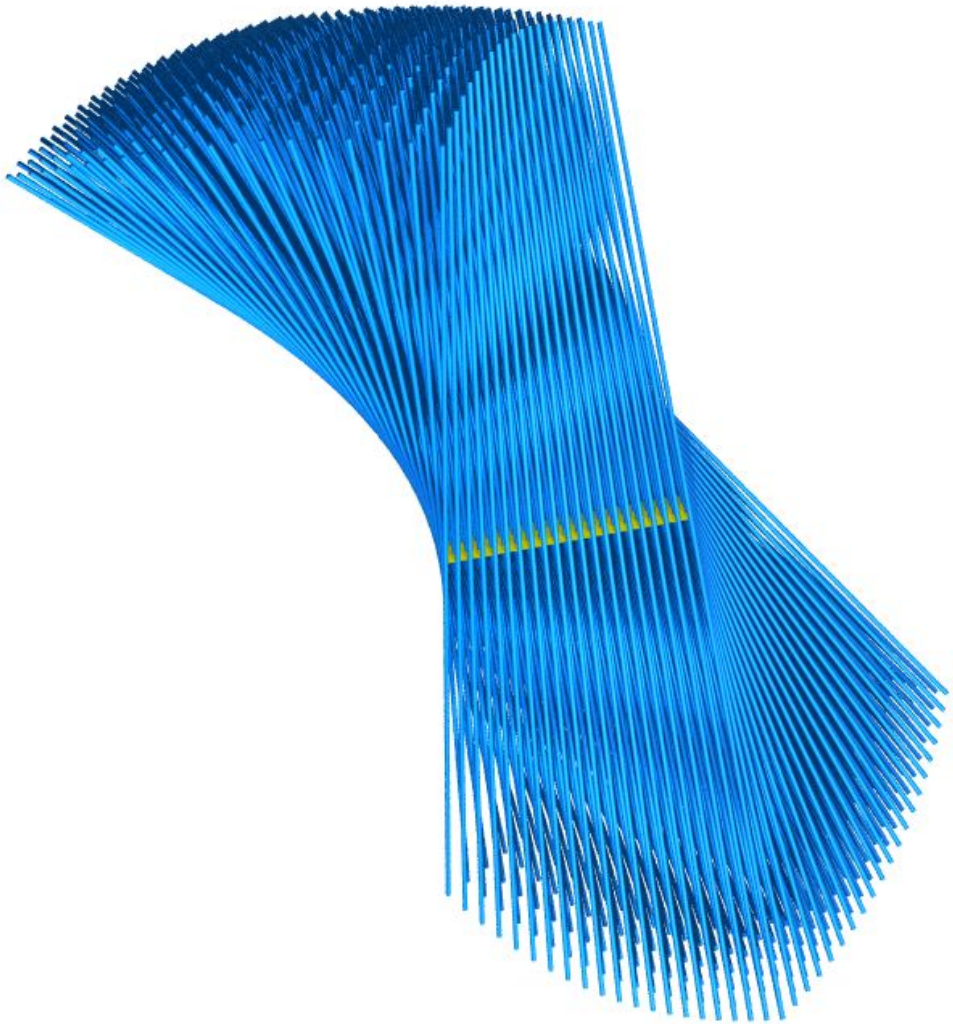
Proof

- For each point $(x, y, 0)$, one considers the line generated by $(A(x, y), B(x, y), 1)$.
- At $(x + dx, y + dy, 0)$, the line is generated by $(A + dA, B + dB, 1)$.
- Coplanar if

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ A & B & 1 \\ A + \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy & B + \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Second degree equation in $\frac{dy}{dx}$.

A counter-example



J. Leys

Déblais et remblais : 1781

« It follows that the lines are nothing but the intersections of two families of developable surfaces such that any surface of the first family intersects each one of the second family along a line. »

il s'enſuit que
toutes ces droites ne ſont autre choſe que les interſections de deux ſuites de ſurfaces développables, telles que chaque ſurface de la première ſuite coupe toutes celles de la ſeconde en lignes droites, & réciproquement.

Déblais et remblais : 1781

J. Leys

XXII.

Quoique cette propoſition ne ſemble avoir qu'un rapport éloigné avec la belle théorie des rayons de courbure des ſurfaces courbes qu'a donnée M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, *année 1760;* cependant, ſi j'oſe parler ainſi, elle complète le travail de cet illuſtre Géomètre ſur cette matière : car les deux points où chaque normale eſt coupée par les deux normales voiſines, ſont préciſément les extrémités des deux rayons de plus grande & de moindre courbure, en ſorte que les interſections de la ſurface courbe avec les ſurfaces développables qui compoſent la première ſuite, ſont les lignes de moindre courbure de la ſurface, & que ſes interſections avec les ſurfaces développables qui compoſent l'autre ſuite ſont ſes lignes de plus grande courbure.

Déblais et remblais : 1781

« Even though this seems to be unrelated to the theory of curved surfaces, as given by Euler, this completes the work of this illustrious geometer. ... »

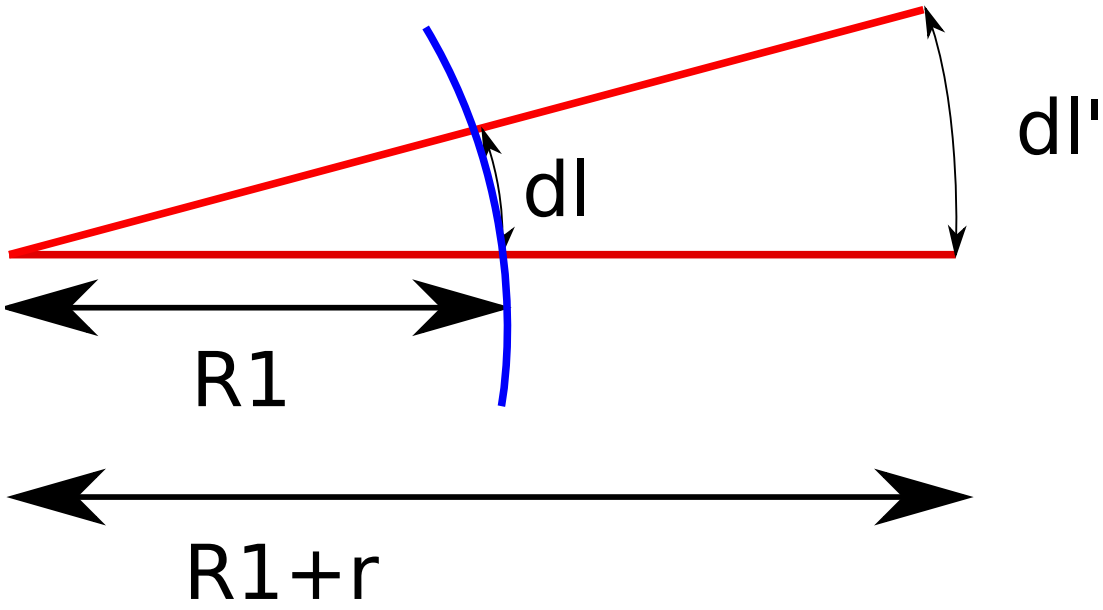
Déblais et remblais : 1781

J. Leys

Déblais et remblais : 1781

Back to the optimal transport in dimension 3.
The routes will define a congruence.
Monge claims that « it is obvious » that the two families of developing surfaces have to be orthogonal ?
Monge « proves » that this implies that the congruence of lines is the congruence of normals to some surface.
Given the déblai and the remblai, we have to determine this surface...

Déblais et remblais : 1781



$$dl'/dl=(R1+r)/R1= (1+k1.r)$$

Déblais et remblais : 1781

l'équation de la ſurface à laquelle toutes les routes doivent être normales, ſera

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}\left[(Z-z')^3-(Z'-z')^3-(Z''-z')^3+(Z'''-z')^3\right]\left[\frac{dd\zeta'}{dx'^2}\,\frac{dd\zeta'}{dy'^2}-\left(\frac{dd\zeta'}{dx'\,dy'}\right)^2\right]\\
&-\tfrac{1}{2}\left[(Z-z')^2-(Z'-z')^2-(Z''-z')^2+(Z'''-z')^2\right]\left\{\left[1+\left(\frac{d\zeta'}{dy'}\right)^2\right]\frac{dd\zeta'}{dx'^2}\right.\\
&\left.-2\,\frac{d\zeta'}{dx'}\,\frac{d\zeta'}{dy'}\,\frac{dd\zeta'}{dx'\,dy'}+\left[1+\left(\frac{d\zeta'}{dx'}\right)^2\right]\frac{dd\zeta'}{dy'^2}\right\}\\
&+(Z-Z'-Z''+Z''')\left[1+\left(\frac{d\zeta'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{d\zeta'}{dy'}\right)^2\right]
\end{aligned}\right\}=0.$$

Cette équation étant aux différences ſecondes partielles, s'intègrera de deux manières aux différences premières, ce qui donnera deux équations en $\frac{dz'}{dx'}$ & $\frac{dz'}{dy'}$, ou en p' & q', & déterminera ces deux quantités, dont les valeurs en x', y' & z', ſubſtituées dans les équations (A) & (B) donneront les équations demandées de la route du point dont les coordonnées ſont x, y & z. Quant aux deux fonctions arbitraires introduites par ces deux intégrations, on en déterminera la forme par cette conſidération que dans tous les ſens les routes extrêmes tangentes au volume du déblai, doivent auſſi être tangentes au volume du remblai.

The Revolution

- 1792 : Minister.
- 1793 : expert in the “comité de salut public”..
- 1794 : founder ot the “école centrale des travaux publics”, “école polytechnique”.
- 1795 : l’école normale de l’an III.

The Revolution

- 1792 : Minister.
- 1793 : expert in the “comité de salut public”..
- 1794 : founder ot the “école centrale des travaux publics”, “école polytechnique”.
- 1795 : l’école normale de l’an III.

The Revolution

- 1792 : Minister.
- 1793 : expert in the “comité de salut public”..
- 1794 : founder ot the “école centrale des travaux publics”, “école polytechnique”.
- 1795 : l’école normale de l’an III.

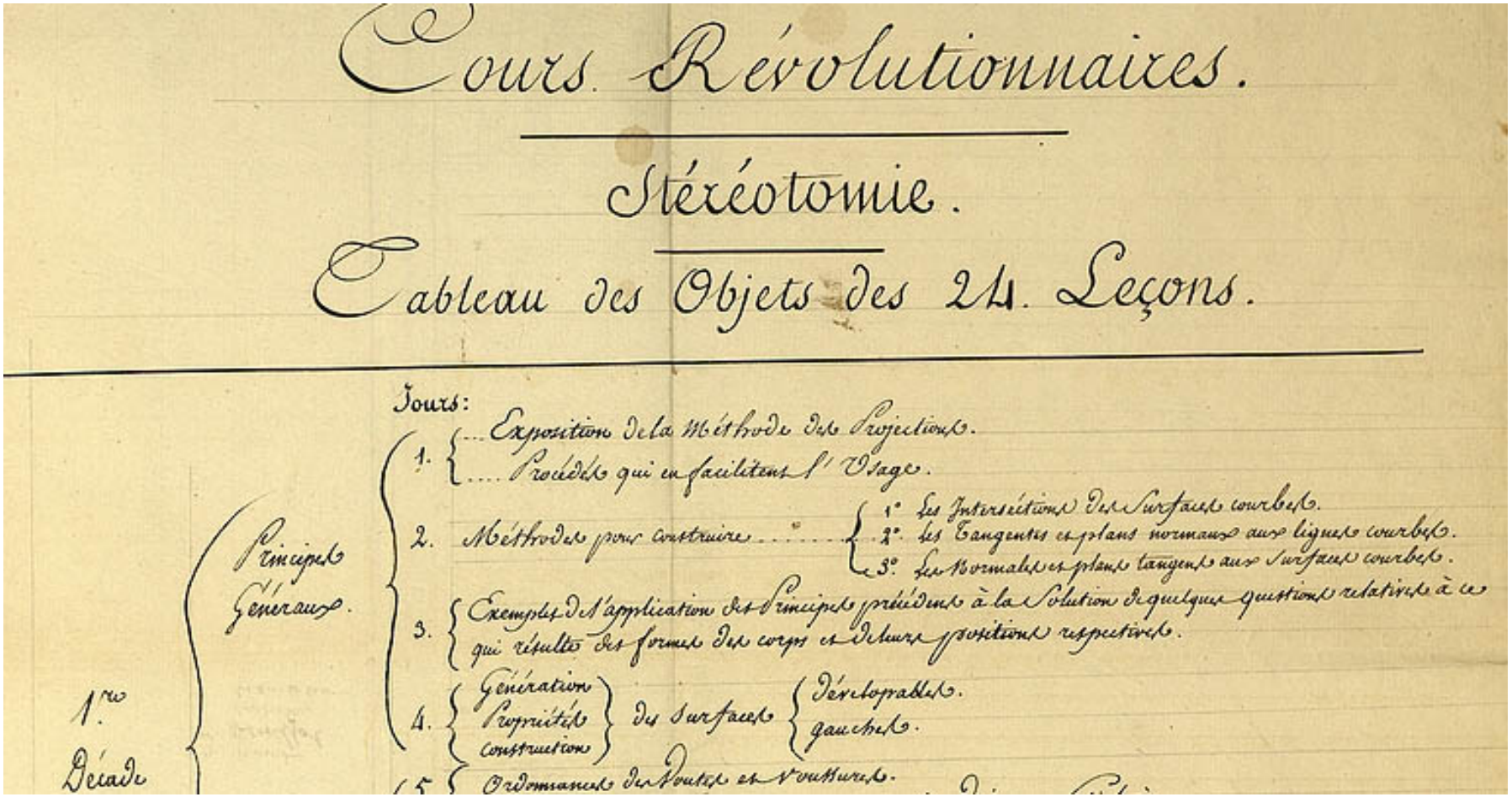
The Revolution

- 1792 : Minister.
- 1793 : expert in the “comité de salut public”..
- 1794 : founder ot the “école centrale des travaux publics”, “école polytechnique”.
- 1795 : l’école normale de l’an III.

L'école normale de l'an III : l'enseignement révolutionnaire



L'école normale de l'an III : l'enseignement révolutionnaire



Cours Révolutionnaires.

Stéréotomie.

Tableau des Objets des 24. Leçons.

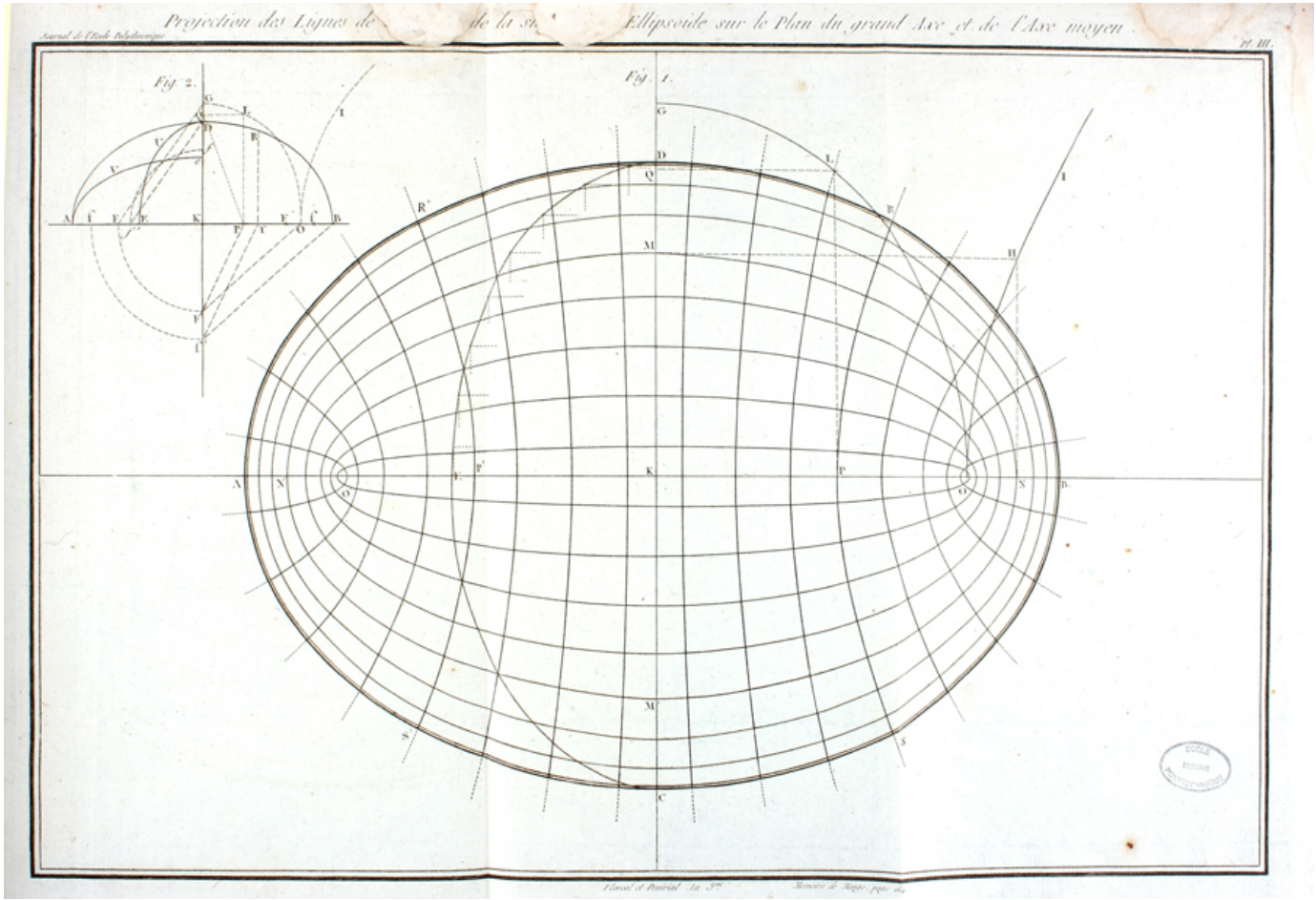
Jours:

1re Décade

Principes Généraux.

1. Exposition de la Méthode des Projections.
1. Procédés qui en facilitent l'Usage.
2. Méthodes pour construire ..... 1° les Intersections des Surfaces courbes. 2° les Tangentes et plans normaux aux lignes courbes. 3° les Normales et plans tangents aux Surfaces courbes.
3. Exemples de l'application des Principes précédents à la Solution de quelques questions relatives à ce qui résulte des formes des corps et de leurs positions respectives.
4. Génération, Propriétés, constructions des Surfaces: Développables. gauches.
5. Ordonnances des Voutes et Voussures.

Lines of curvature

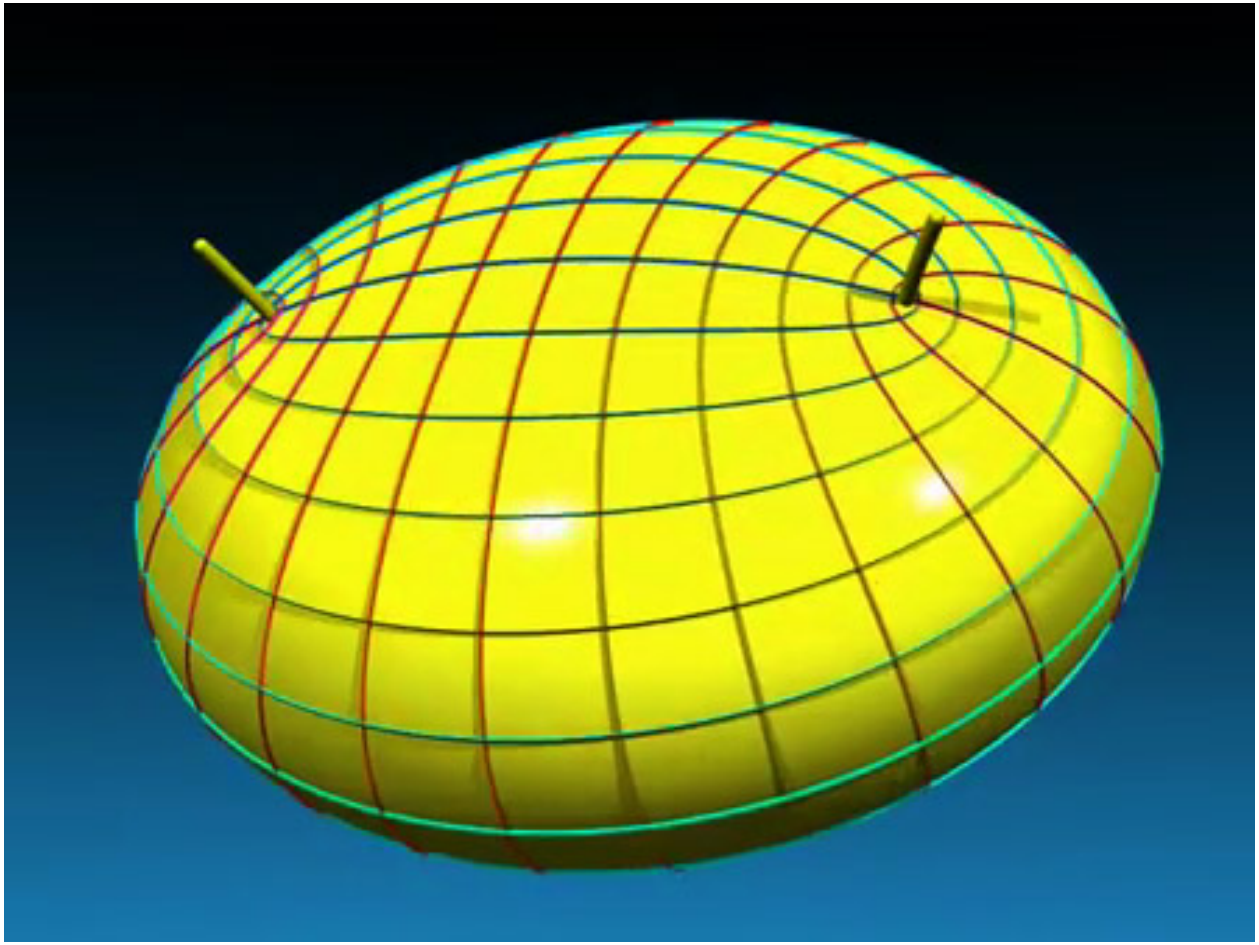


Triple orthogonal system

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$$

$$0<a<b<c$$

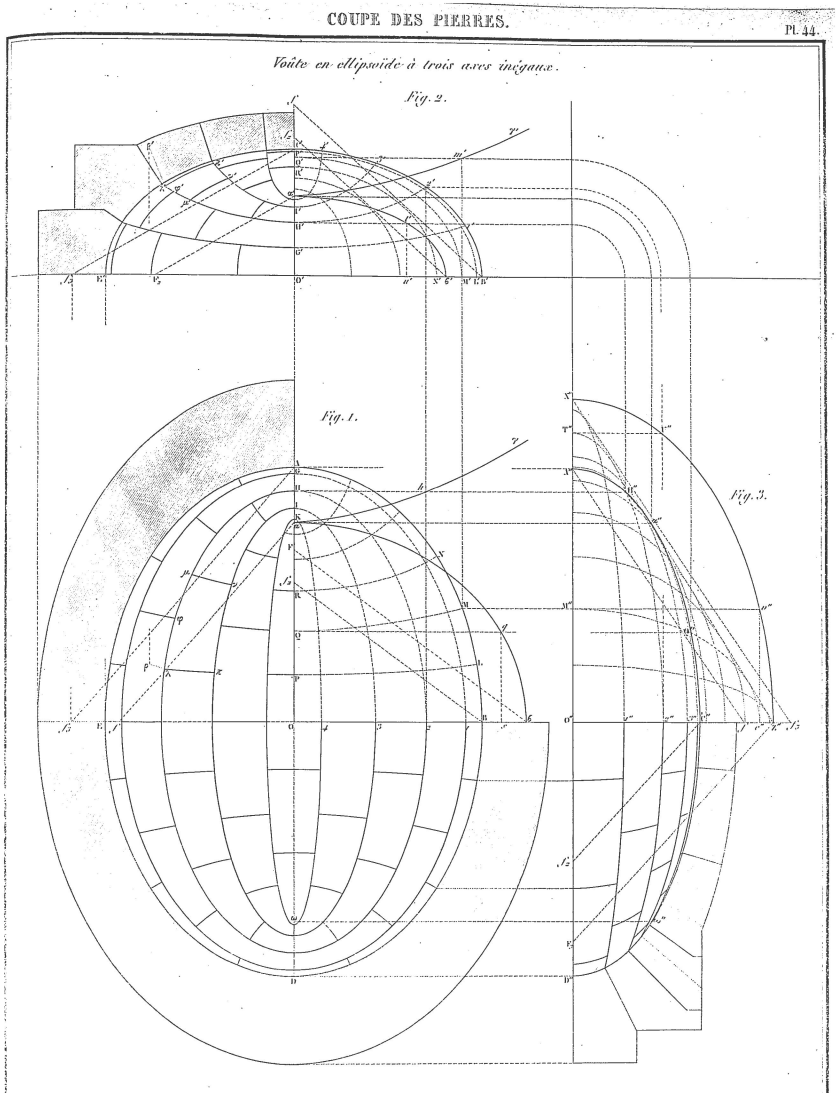
Curvature lines on ellipsoids



Cutting stones, ellipsoïdal vaults

J. Leys

Cutting stones, ellipsoïdal vaults



ÉCONOMIE DOMESTIQUE.

FABRICATION DES FROMAGES DE LODÉZAN.

Lorsque Monge était en Italie, il eut l'occasion de voir fabriquer ces énormes masses de fromage connu sous le nom de parmésan, et renommés pour le grand usage qu'en font les Italiens dans l'assaisonnement de leurs pâtes et d'une foule de leurs mets. Cette fabrication lui parut offrir beaucoup d'intérêt pour notre économie domestique. Comme il ne négligeait aucune occasion, aucun moyen de se rendre utile à son pays, il suivit attentivement toutes les manipulations de cette fabrication. Le mémoire où elles sont décrites est inséré dans le trente-deuxième volume des Annales de chimie, page 287. Cette description est complète, claire et précise, comme toutes celles données par Monge.

Le comte de Péluse



Gaspard Monge (1746-1818)

