

Christophe Champetier





*Toute l'âme résumée  
Quand lente nous l'expirons  
Dans plusieurs ronds de fumée  
Abolis en autres ronds*

*Atteste quelque cigare  
Brûlant savamment pour peu  
Que la cendre se sépare  
De son clair baiser de feu*

*Ainsi le chœur des romances  
À la lèvre vole-t-il  
Exclus-en si tu commences  
Le réel parce que vil*

*Le sens trop précis rature  
Ta vague littérature.*

Stéphane Mallarmé (1895)





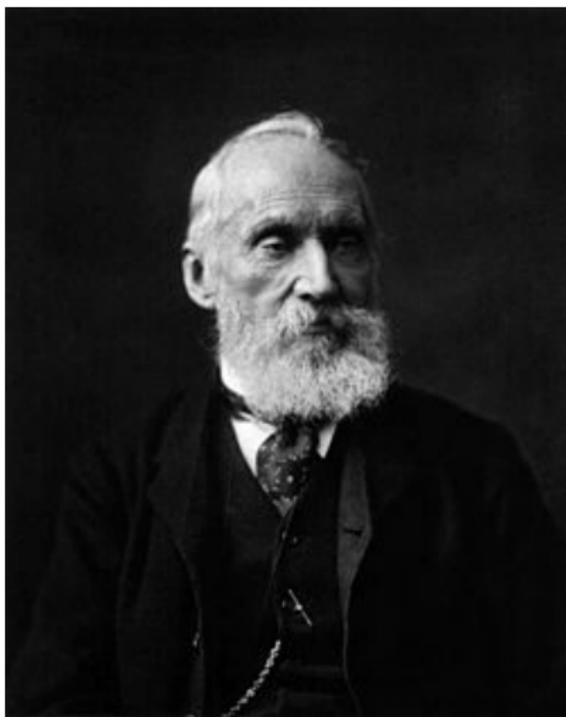




Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894)



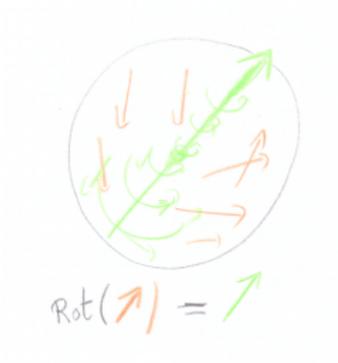
Peter Guthrie Tait (1831-1901)



William Thomson, Lord Kelvin, (1824-1907)

Vorticity (Ascher Shapiro, MIT, 1964)

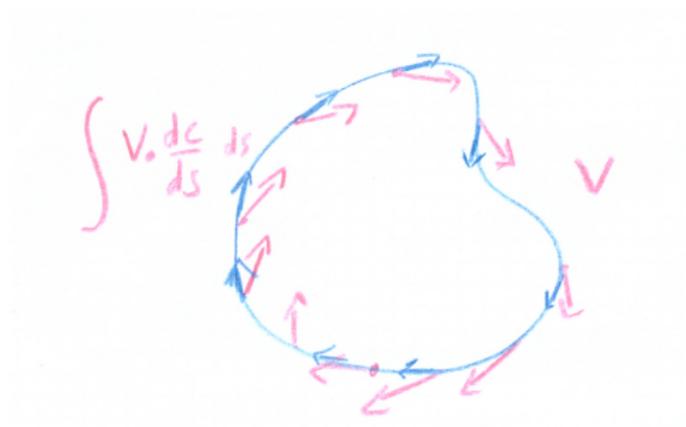
**Vorticité** d'un champ de vecteurs  $V$  : le rotationnel de  $V$ .



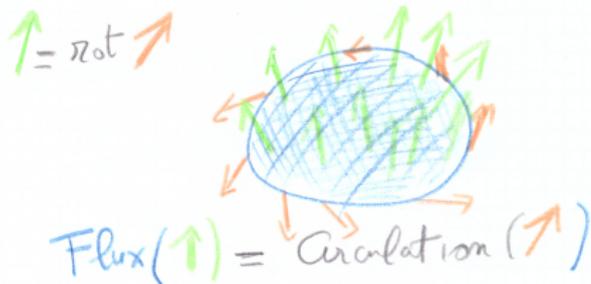
**Vorticité** d'un champ de vecteurs  $V$  : le rotationnel de  $V$ .

**Circulation** de  $V$  sur une courbe fermée  $c(s)(s \in [0, L])$  : intégrale

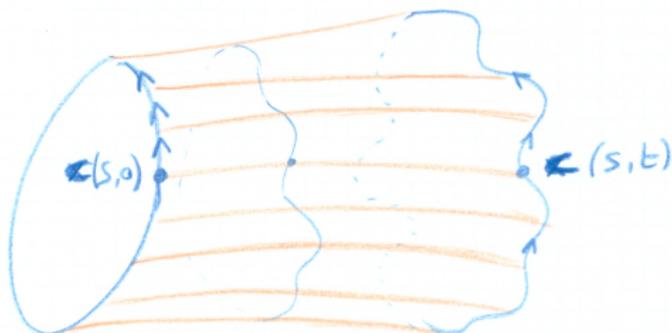
$$\oint_c V \cdot \frac{dc}{ds} ds.$$



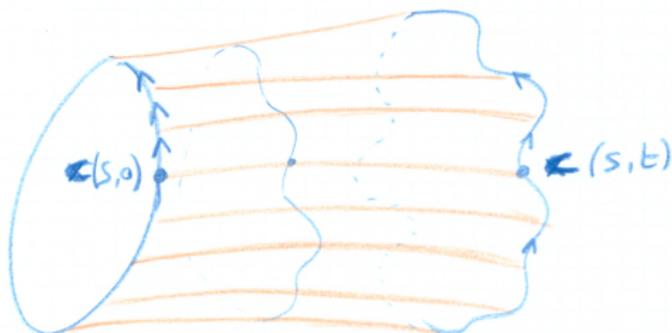
La **circulation** d'un champ de vecteur  $V$  le long du bord d'une surface est égale au **flux** de son rotationnel à travers la surface.



**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*



**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*



**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Circ} &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} V_t \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{d^2 c(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{d^2 c(s,t)}{ds dt} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} F(s,t) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} \text{grad}(U - p) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Circ} &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} V_t \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{d^2 c(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{d^2 c(s,t)}{ds dt} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} F(s,t) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} \text{grad}(U - p) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Circ} &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} V_t \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{d^2 c(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{d^2 c(s,t)}{ds dt} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} F(s,t) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc}{dt}(s,t) \right\|^2 ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} \text{grad}(U - p) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Circ} &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} V_t \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{d^2 c(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{d^2 c(s,t)}{ds dt} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} F(s,t) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc}{dt}(s,t) \right\|^2 ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} \text{grad}(U - p) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Circ} &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} V_t \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{d^2 c(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{d^2 c(s,t)}{ds dt} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} F(s,t) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc}{dt}(s,t) \right\|^2 ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} \text{grad}(U - p) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Circ} &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} V_t \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{d^2 c(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{d^2 c(s,t)}{ds dt} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} F(s,t) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc}{dt}(s,t) \right\|^2 ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} \text{grad}(U - p) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

**Théorème (Kelvin 1867) :** *Dans un fluide parfait la circulation de la vitesse sur une courbe fermée reste constante.*

*Démonstration :*

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Circ} &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} V_t \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{d^2 c(s,t)}{dt} \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \oint_{c(s,t)} \frac{dc(s,t)}{dt} \cdot \frac{d^2 c(s,t)}{ds dt} ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} F(s,t) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc}{dt}(s,t) \right\|^2 ds \\
 &= \oint_{c(s,t)} \frac{1}{\rho} \text{grad}(U - p) \cdot \frac{dc(s,t)}{ds} ds + \frac{1}{2} \oint_{c(s,t)} \frac{d}{ds} \left\| \frac{dc(s,t)}{dt} \right\|^2 ds \\
 &= 0 + 0
 \end{aligned}$$

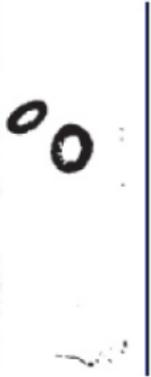
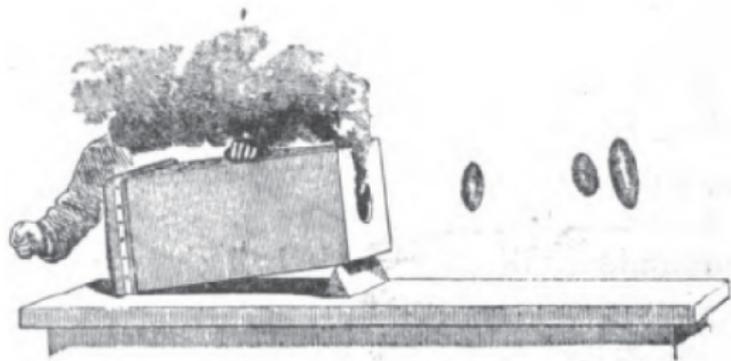
Vorticity (Ascher Shapiro, MIT, 1964)

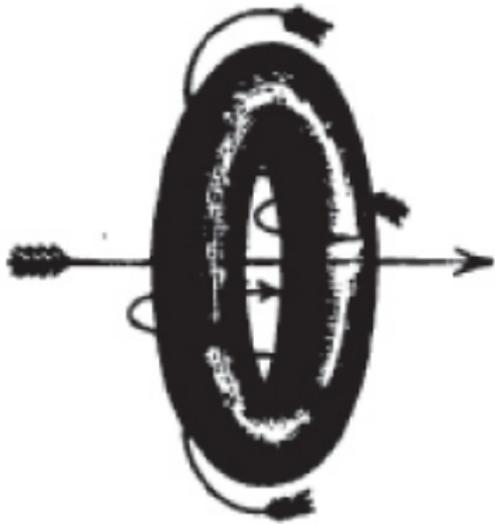
**Théorème (Helmholtz 1857) :** *Soit  $\phi^t$  le flot d'un fluide parfait.*

*Alors*

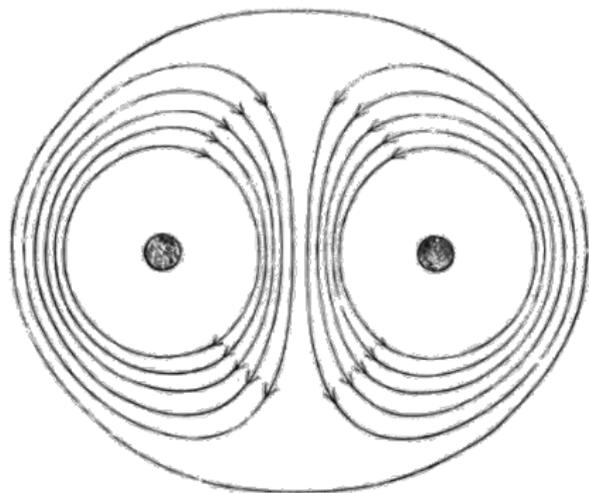
$$\text{rot } V_t = \phi_{\star}^t(\text{rot } V_0).$$

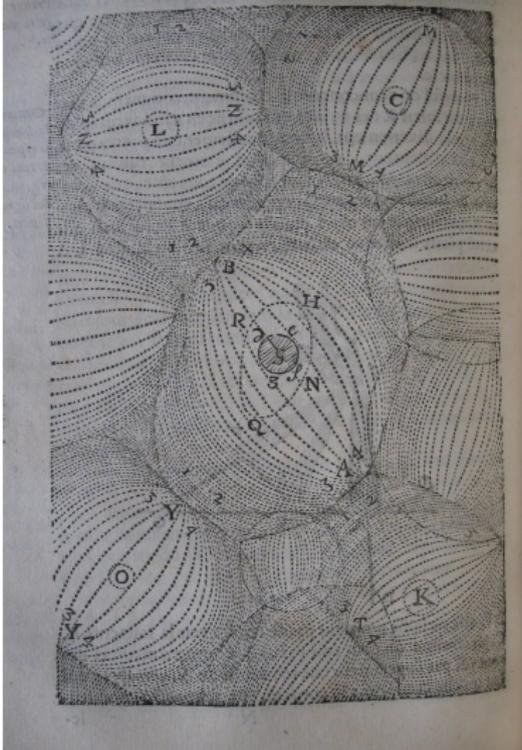
*Le flot "transporte" sa vorticité.*





---





Les tourbillons de Descartes











THE  
UNSEEN UNIVERSE

OR

PHYSICAL SPECULATIONS

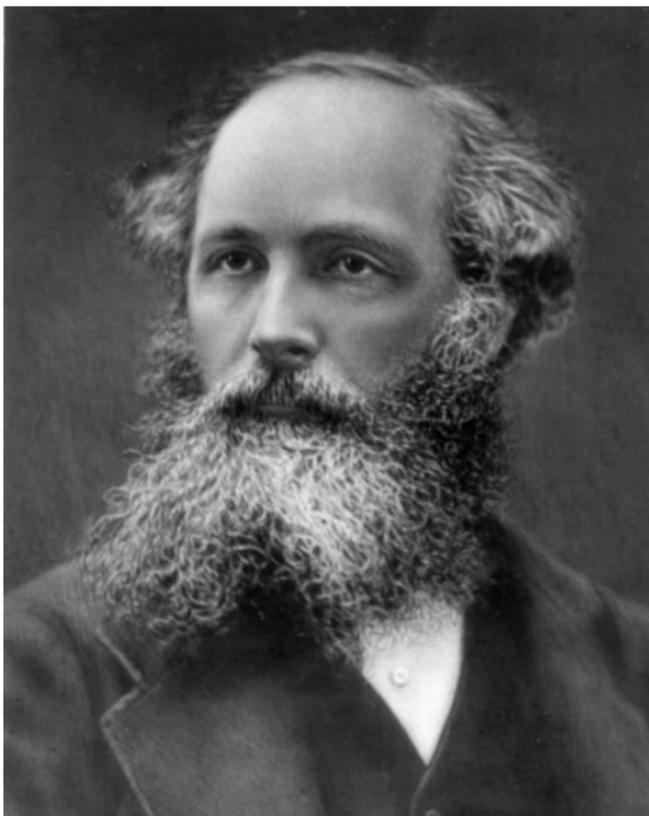
ON A

FUTURE STATE

BY

B. STEWART AND P. G. TAIT

— the things which are seen are temporal, but the things which are  
not seen are eternal



James Clerk Maxwell (1831-1879)



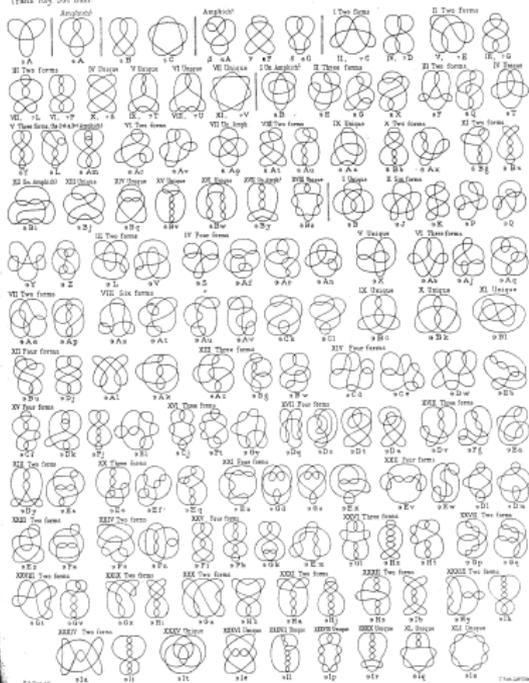
To Hermann Stoffkraft, Ph.D.  
A Paradoxical Ode.  
[After Shelley]

My soul's an amphicheiral knot  
Upon a liquid vortex wrought  
By Intellect in the Unseen residing,  
While thou dost like a convict sit  
With marlinspike untwisting it  
Only to find my knottiness abiding,  
Since all the tools for my untying  
In four-dimensional space are lying,  
Where playful fancy intersperces,  
Whole avenues of universes ;  
Where Klein and Clifford fill the void  
With one unbounded, finite homaloid,  
Whereby the Infinite is hopelessly destroyed.

James Clerk Maxwell

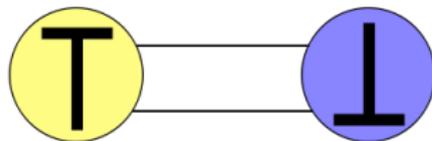
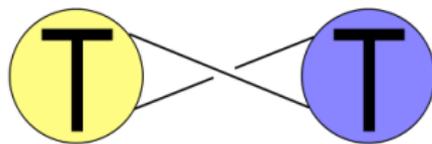
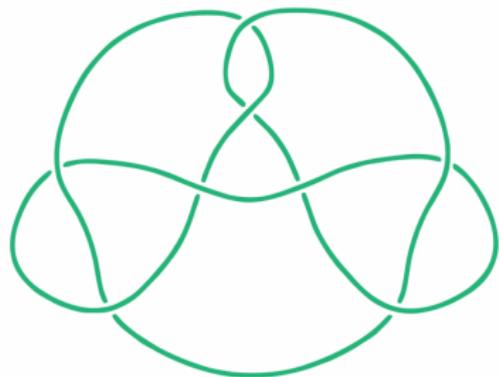
Mon âme est un nœud amphicéral  
Taillé dans un tourbillon liquide  
Par l'Esprit, résidant dans l'Invisible.  
Pendant que, comme un forçat,  
Tu la détords avec un épissoir  
Pour découvrir que mon enlacement perdure,  
Car tous les outils pour la dénouer  
Se trouvent dans la quatrième dimension  
Parsemée de fantasmes joyeux  
Et de longues suites d'univers ;  
Là où Klein et Clifford emplissent le vide  
Avec un homaloïde fini et non borné  
Où l'Infini est irrémédiablement détruit.







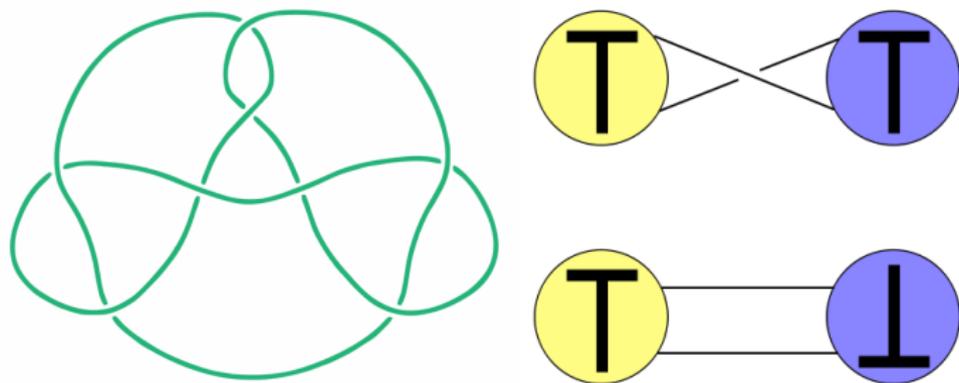
# La conjecture de Tait pour les nœuds alternés



Un diagramme réduit a un nombre minimal de croisements.

Démontré par Kauffman, Murasugi, Thistlethwaite (1987, 1988).

# La conjecture de Tait pour les nœuds alternés



Un diagramme réduit a un nombre minimal de croisements.

Démonstré par Kauffman, Murasugi, Thistlethwaite (1987, 1988).

## EXISTENCE OF KNOTTED VORTEX TUBES IN STEADY EULER FLOWS

ALBERTO ENCISO AND DANIEL PERALTA-SALAS

ABSTRACT. We prove the existence of knotted and linked thin vortex tubes for steady solutions to the incompressible Euler equation in  $\mathbb{R}^3$ . More precisely, given a finite collection of (possibly linked and knotted) disjoint thin tubes in  $\mathbb{R}^3$ , we show that they can be transformed with a  $C^m$ -small diffeomorphism into a set of vortex tubes of a Beltrami field that tends to zero at infinity. The structure of the vortex lines in the tubes is extremely rich, presenting a positive-measure set of invariant tori and infinitely many periodic vortex lines. The problem of the existence of steady knotted thin vortex tubes can be traced back to Lord Kelvin.

KEYWORDS: Euler equation, invariant tori, KAM theory, knots, Beltrami fields, Runge-type approximation.

MSC 2010: 35Q31, 37N10, 37J40, 35J25, 37C55, 57M25.

## ARTICLE PREVIEW

[view full access options](#) ▸

NATURE PHYSICS | ARTICLE



# Creation and dynamics of knotted vortices

**Dustin Kleckner & William T. M. Irvine**[Affiliations](#) | [Contributions](#) | [Corresponding authors](#)*Nature Physics* **9**, 253–258 (2013) | doi:10.1038/nphys2560

Received 05 September 2012 | Accepted 18 January 2013 | Published online 03 March 2013



Citation



Reprints



Rights &amp; permissions



Article metrics

## Abstract

[Abstract](#) • [References](#) • [Author information](#) • [Supplementary information](#)

Knots and links have been conjectured to play a fundamental role in a wide range of physical fields, including plasmas and fluids, both quantum and classical. In fluids, the fundamental knottedness-carrying excitations occur in the form of linked and knotted vortex loops, which have been conjectured to exist for over a century. Although they have been the subject of considerable theoretical study, their creation in the laboratory has remained an outstanding experimental goal.



