Le paradoxe de d'Alembert,

ou pourquoi les oiseaux ne peuvent pas voler ?

Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

(1713-1784)

(1717-1783)


... vous comprenez, sans le frottement de l'air, l'écoulement autour du profil serait tout à fait différent et ne donnerait pas de portance...
BELIN AIRLINES

COROLLAIRE III.

Si l'arc AC ne contient que peu de degrés, AC sera presque égale à AN; et l'on aura à peu près $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{g^2}$.

COROLLAIRE IV.

Si un pendule (fig. 6) descend du point B, sa vitesse en A, que je nomme h, sera égale, corol. II, propos. I, à celle qu'il aurait acquise en tombant dans le vide de la hauteur An $b - \frac{2fb \times BA}{g^2} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{g^2}$; et il remontera jusqu'à la hauteur Av (corollaire II, propos. II) $= An - \frac{2f \times An \times Ac}{g^2}$

Voilà, ce me semble, tout l'endroit de Newton sur les retardations du pendule causées par la résistance de l'air, assez bien défriché. D'où il paraît s'ensuivre que cet auteur suppose les retardations comme les arcs, au lieu que nous les trouvons, par les propositions précédentes, comme les carrés des arcs.

Vous m'objecterez, sans doute, que Newton a l'expérience pour lui ; et que c'est d'après cette hypothèse[1] qu'il a trouvé que l'action est toujours égale à la réaction ; et que si, par

Je vous répondrais que, quoiqu'on ne se soit jamais avisé de douter ni de l'exactitude, ni de la bonne foi de Newton, cela n'a pas empêché qu'on n'ait réitéré ses expériences sur les couleurs. Pourquoi n'en ferait-on pas autant dans cette occasion-ci, où cet auteur est parti d'une hypothèse que le calcul contredit évidemment, et où il était d'autant plus facile de se tromper, que les vitesses sont représentées par des quantités dont les différences sont très-petites; savoir, les cordes des arcs parcourus devant et après les retardations?

SOLUTION.

Si on suppose, avec tous les physiciens, que la résistance de l'air et des autres fluides est comme le carré de la vitesse, on aura la résistance au point $M = \frac{fv^2}{g^2}$; et cette résistance agissant

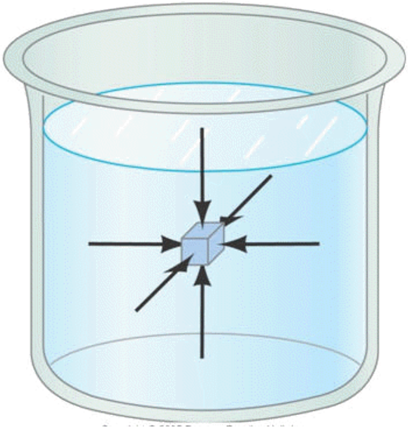
Pensées sur l'interprétation de la nature – 1753

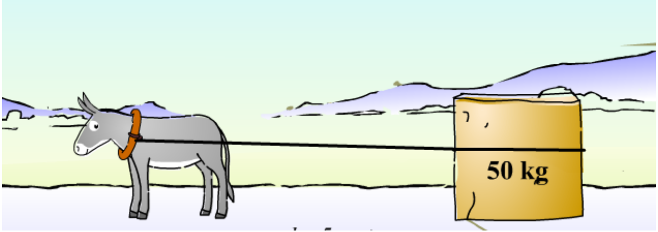
« Une des vérités qui aient été annoncées de nos jours avec le plus de courage et de force, qu'un bon physicien ne perdra point de vue, et qui aura certainement les suites les plus avantageuses, c'est que la région des mathématiciens est un monde intellectuel, où ce que l'on prend pour des vérités rigoureuses perd absolument cet avantage quand on l'apporte sur notre terre. On en a conclu que c'était à la philosophie expérimentale à rectifier les calculs de la géométrie, et cette conséquence a été avouée, même par les géomètres. Mais à quoi bon corriger le calcul géométrique par l'expérience ? N'est-il pas plus court de s'en tenir au résultat de celle-ci ? d'où l'on voit que les mathématiques, transcendantes surtout, ne conduisent à rien de précis sans l'expérience. »

Pensées sur l'interprétation de la nature – 1753

« Nous touchons au moment d'une grande révolution dans les sciences. Au penchant que les esprits me paraissent avoir à la morale, aux belles-lettres, à l'histoire de la nature, et à la physique expérimentale, j'oserais presque assurer qu'avant qu'il soit cent ans, on ne comptera pas trois grands géomètres en Europe. Cette science s'arrêtera tout court où l'auront laissée les Bernoulli, les Euler, les Maupertuis, les Clairaut, les Fontaine et les d'Alembert. Ils auront posé les colonnes d'Hercule. On n'ira point au-delà. Leurs ouvrages subsisteront dans les siècles à venir, comme ces pyramides d'Égypte dont les masses chargées d'hiéroglyphes réveillent en nous une idée effrayante de la puissance et des ressources des hommes qui les ont élevées. »

La pression dans un fluide

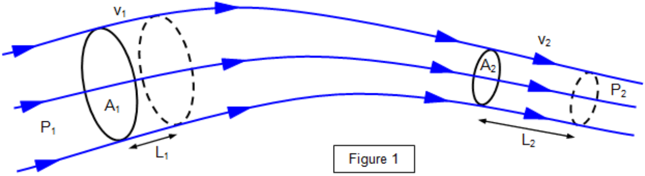




S'il n'y a pas de frottement, i.e. si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail de la force est intégralement converti en énergie cinétique.

S'il y a du frottement, une partie seulement du travail fourni est convertie en énergie cinétique.

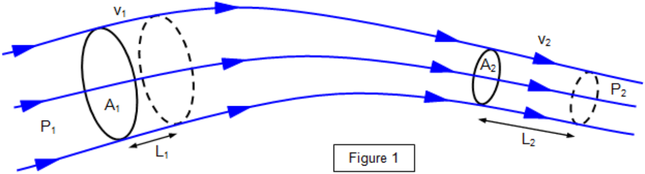
Le théorème de Bernoulli



$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$$

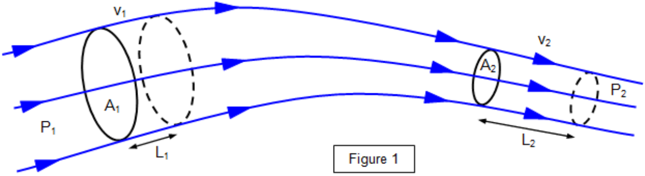
$$P_1 + \frac{1}{2}mV_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}mV_2^2$$

Le théorème de Bernoulli



$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$$

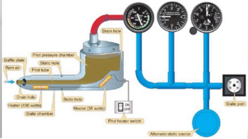
$$P_1 + \frac{1}{2}mV_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}mV_2^2$$



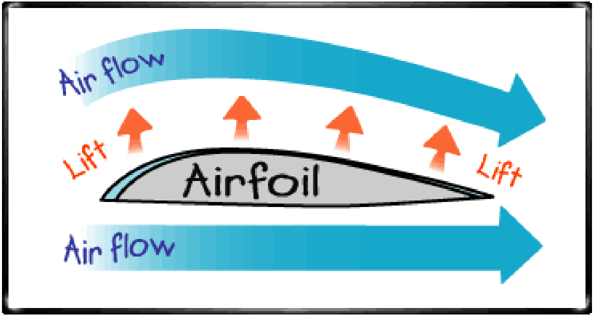
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}mV_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}mV_2^2$$

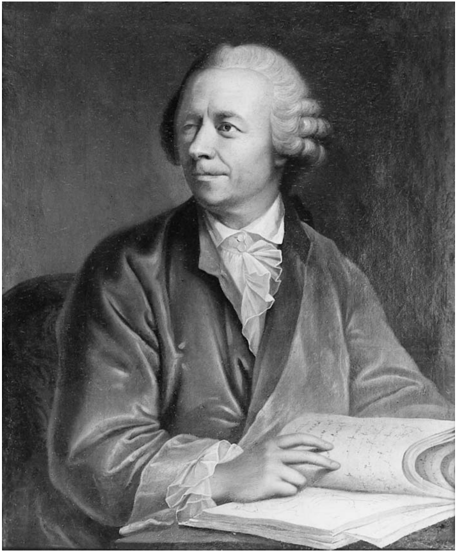
Les sondes Pitot sur Airbus (Henri Pitot 1695-1771)



Le théorème de Bernoulli ?



Euler 1707-1783



Euler et les nouveaux principes d'artillerie (1745)

NEUE GRUNDSÄTZE
DER ARTILLERIE

AUS DEM ENGLISCHEN DES HERRN BENJAMIN ROBINS

ÜBERSETZT UND MIT VIELEN ANMERKUNGEN VERSEHEN

MIT VIER BALLISTISCHEN ABHANDLUNGEN

Euler et les nouveaux principes d'artillerie (1745)

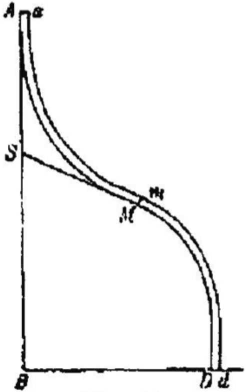


Fig. 15.

Euler et les nouveaux principes d'artillerie (1745)

« Aus dem andern Theil DM aber ensteht eine Kraft, welche jener entgegen ist, und von welcher des Körper nach der Direction BA zurück gezogen werden sollte. Da nun kein Körper anders, als durch einen würklichen Druck in Bewegung gesetzt werden kann, so kann auch die letztere Kraft nur in so ferne auf den Körper würken, als der Druck der flüßigen Materie von hinten stark genug ist, den Körper vorwärts zu stossen. »

« L'autre partie DM produit une force opposée à la première et ceci ferait revenir le corps en arrière, dans la direction BA. Mais comme seule une vraie pression (positive) peut mettre un corps en mouvement, cette dernière force ne peut agir sur le corps que si la pression est assez forte pour pousser le corps vers l'avant. »

Euler et les nouveaux principes d'artillerie (1745)

« Hier kömmt es also nur darauf an, wo das Ende des Canals angenommen werden soll. Geht man so weit, bißdie flüßige Materie um den Körper völlig vorbey geflossen, und ihren vorigen Lauf wiederum erlanget hat, so wird [...], und der Winkel mSB verschwindet, dahero der Cosinus desselben = 1 wird. In diesem Fall wüde also die auf den Körper nach der Direction AB würkende Kraft [...] und der Körper litte gar keinen Wiederstand. »

« Il reste à déterminer le dernier point du canal. Si nous allons aussi loin de le fluide peut aller au delà du corps, où il retrouve sa direction et sa vitesse, alors [...] le cosinus sera =1 et la force agissant dans la direction AB=0, et le corps ne subira aucune résistance. »

D'Alembert et le traité de la résistance des fluides (1749)

ESSAI

D'UNE

NOUVELLE THEORIE

DE LA

RÉSISTANCE DES FLUIDES.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.

A PARIS,

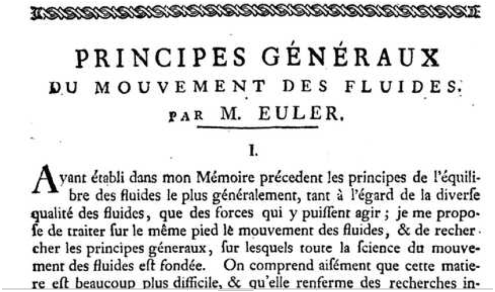
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or.

M D C C L I I.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

« Delà il s'ensuit que les arcs LD, DM ne sauroient être égaux ; car s'ils l'étoient, alors la quantité $-R^2\pi ydy(p^2+q^2)$ seroit égale à zéro de manière que le corps ne souffriroit aucune pression de la part du fluide : ce qui est contre l'expérience. »

L'équation d'Euler – 1755



PRINCIPES GÉNÉRAUX
DU MOUVEMENT DES FLUIDES.
PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précedent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverſe qualité des fluides, que des forces qui y puiſſent agir ; je me propoſe de traiter ſur le même pied lè mouvement des fluides, & de rechercher les principes géneraux, ſur lesquels toute la ſcience du mouvement des fluides eſt fondée. On comprend aiſément que cette matiere eſt beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches in-

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p$$

$$div(v) = 0$$

Euler et les “Dilucidationes” (1756)

Le retour à la théorie “vulgaire” de Newton.

DILVCIDATIONES
DE RESISTENTIA FLVIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Duplici modo quaestio de resistentia, quam corpora solida in fluidis mota patiuntur, tractari solet, altero negotium tantum vero proxime plerumque conficitur, dum quantitas resistentiae per regulam satis cōcinnam ad calculum reuocatur; altero vero resistentiae doctrinam ex ipsa fluidorum natura et pressione, quam in corpora exerunt, per profundissimas Hydrodynamicae inuestigationes constituere Geometrae sunt conati.

1777

NOUVELLES

EXPÉRIENCES

SUR LA RÉSISTANCE

DES FLUIDES;

Par MM. D'ALEMBERT, le Marquis DE CONDORCET, & l'Abbé BOSSUT, Membres de l'Académie Royale des Sciences, &c.

Le paradoxe de d'Alembert (1768 et 1780)

XXXIVME MÉMOIRE.

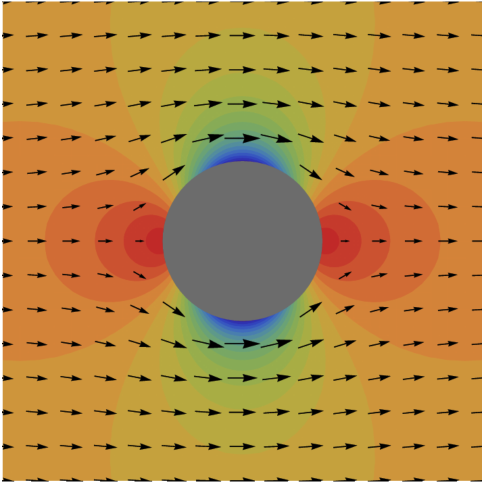
Suite des Recherches ſur le mouvement des Fluides.

§. I.

Paradoxe propoſé aux Géometres ſur la Réſiſtance des Fluides.

1. SUPPOSONS un corps compoſé de quatre parties égales & ſemblables, placé au milieu d'un fluide indéfini, lequel fluide ſoit renfermé dans un vaſe rectiligne. Imaginons que ce corps ſoit fixe & immobile, & que les parties du fluide reçoivent toutes une impulſion égale, parallèle aux côtés du vaſe & à l'axe du corps; d'abord il eſt évident que les particules du fluide à la partie antérieure, doivent ſe détourner & gliſſer le long du corps, & former des courbes d'autant plus approchantes de la ligne droite, qu'elles ſeront plus éloignées du corps, juſqu'à une certaine diſtance (qui ſera au moins celle des parois du vaſe) où elles ſe mouvront en ligne droite.

Le paradoxe de d'Alembert (1768 et 1780)



Le "principe" de Curie !

Le paradoxe de d'Alembert (1768 et 1780)

Paradoxe proposé aux géomètres sur la résistance des fluides.

> « *Je ne vois donc pas, je l'avoue, comment on peut expliquer par la théorie, d'une manière satisfaisante, la résistance des fluides. Il me paroît au contraire que cette théorie, traitée & approfondie avec toute la rigueur possible, donne, au moins en plusieurs cas, la résistance absolument nulle ; paradoxe singulier que je laisse à éclaircir aux Géomètres.* »

La lettre de M. Delalande, insérée dans le journal des savants, de juin 1782, discute les moyens de Lana, pour mettre l'*homme en équilibre* dans l'air; et ceux d'*un appareil volant;* il confirme l'opinion de Coulomb, qui indiquait des ailes de 12,000 pieds, et il ajoute. « Comme il y aurait du temps et des forces » perdues pour relever les ailes, il faudrait peut-être » en *doubler ou tripler l'étendue*; ainsi l'*impossibilité » de se soutenir en frappant l'air, est aussi certaine » que l'impossibilité de s'élever par la pesanteur spé- » cifique* des corps vidés d'air. » Il est remarquable qu'au même mois de l'année suivante, Montgolfier réalisait par la pesanteur spécifique ce que l'on déclarait être *impossible*.

Saint-Venant généralise le paradoxe à une forme quelconque (1846 et 1780)

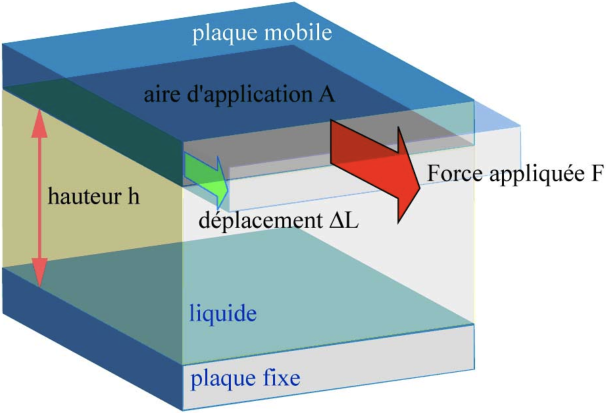
Saint-Venant généralise le paradoxe à une forme quelconque (1846 et 1780)

« Si le mouvement est arrivé, comme on le suppose toujours, à l'état de permanence, la force vive, acquise à chaque instant par le système, est nulle ; le travail des pressions extérieures est nul aussi, et il en est de même du travail des actions intérieures du fluide dont nous supposons que la densité ne change pas. Donc le travail de l'impulsion du fluide sur le corps, et, par conséquent, cette impulsion elle-même, est nécessairement zéro. »

Saint-Venant propose une solution (1846 et 1780)

« Mais on trouve un autre résultat si, au lieu du fluide idéal, objet des calculs des géomètres du siècle dernier, on remet un fluide réel, composé de molécules en nombre fini, et exerçant dans l'état du mouvement, des pressions inégales ou qui ont des composantes tangentielles aux faces à travers desquelles elles agissent ; composantes que nous désignons par le nom de frottement du fluide, qui leur a été donné depuis Descartes et Newton jusqu'à Venturi. »

Saint-Venant introduit le concept de viscosité



Navier (1785-1836) – Stokes (1819-1903)


Navier (1785-1836) – Stokes (1819-1903)

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 v$$

$$div(v) = 0$$

Navier 1830

L'application de la formule (37) conduirait à des résultats semblables à ceux qui ont été trouvés dans les articles précédents, c'est-à-dire qu'un homme serait également dans l'impossibilité, en faisant usage de l'appareil dont il s'agit, de se soutenir dans l'air contre l'action de la pesanteur. Il est absolument nécessaire, pour que l'homme puisse se transporter dans les airs, que son poids soit supporté par le moyen d'une capacité plus légère que l'air lui-même.

La formule (36) pourra s'appliquer au cas où l'homme, ainsi que l'appareil destiné à lui imprimer du mouvement, seraient supportés par un aérostat, en y supposant $P=0$. Cette formule donnera alors pour la quantité d'action dépensée dans l'unité de temps

$$(38) \qquad \frac{\Pi k \omega u^3}{2g}\left(\sin.\varphi + \sqrt{\frac{k\omega}{K\Omega \sin.\varphi}}\right),$$

dans laquelle la quantité $\frac{\Pi k \omega u^2}{2g}$ doit être considérée comme représentant la résistance que l'air opposerait à l'aérostat et à l'appareil qu'il supporte (non compris les roues à ailes obliques), en les supposant mus avec la vitesse u. Cette dernière formule est analogue à l'expression (33) qui a été employée dans l'article V : car si nous supposons $q=0$, la formule (33) se réduit à

$$\frac{\Pi k \omega u_0^3}{2g}\left(1 + \sqrt{(1+p)\frac{k\omega}{K\Omega}}\right).$$

La valeur de l'expression (38) dépend de celle de l'angle φ, qui est arbitraire. Si l'on détermine cet angle de manière à rendre cette expression la moindre possible, on trouve la condition $\sin.\varphi = \left(\frac{1}{4}\frac{k\omega}{K\Omega}\right)^{\frac{1}{3}}$, et l'expression de la quantité

Navier 1830

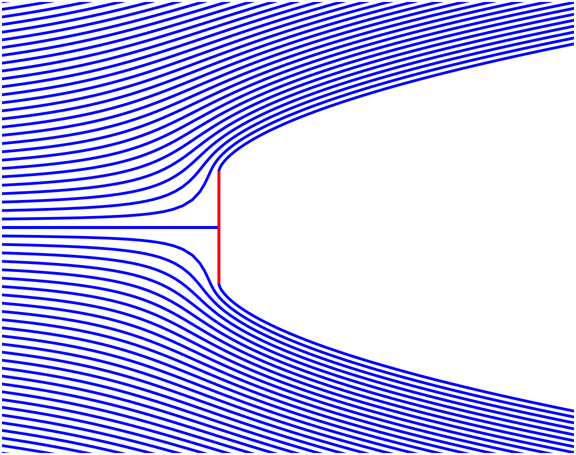
formule dans laquelle il faut mettre pour U la valeur donnée par l'expression (46).

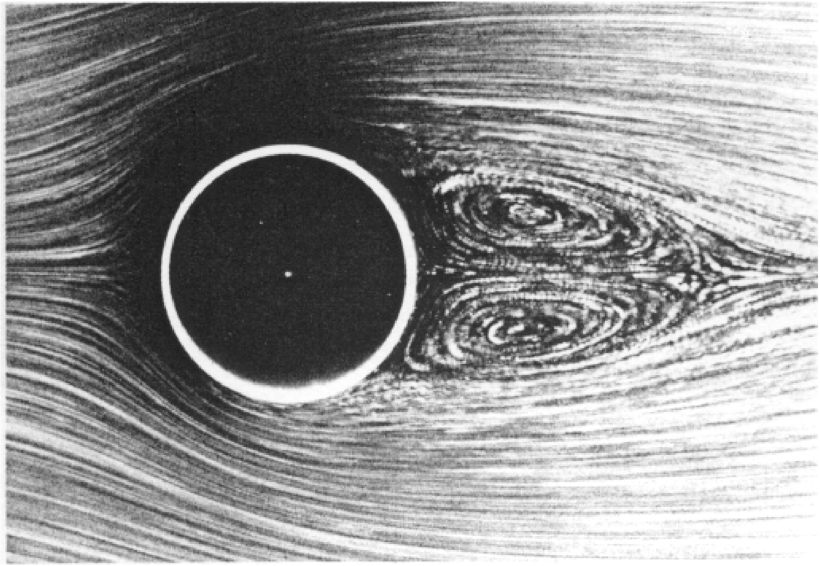
Les formules (46) et (47) sont analogues aux formules (32) et (33), art. V. L'application de ces formules prouvera d'ailleurs que, à poids égal de l'animal, la quantité d'action dépensée par les poissons pour opérer leurs mouvements est beaucoup plus grande que celle qui est dépensée par les oiseaux. La natation n'est pas interdite à l'homme comme l'est le vol, parce que l'eau supporte la plus grande partie du poids de son corps : mais il ne peut imprimer à son corps qu'une vitesse très-petite, et bien inférieure à celle que prennent facilement les animaux qui sont organisés pour vivre et se mouvoir dans ce fluide.

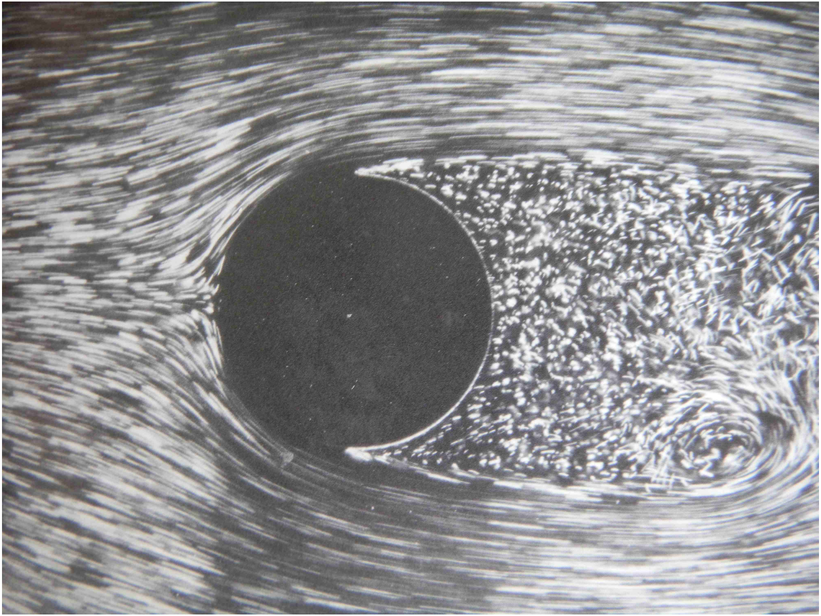
Paris, 6 septembre 1830.

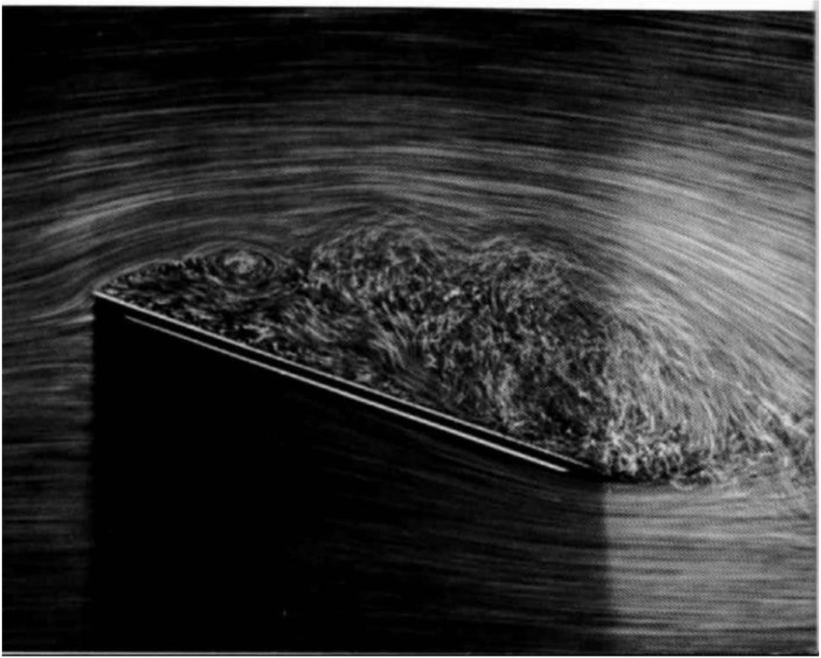
Signé NAVIER.

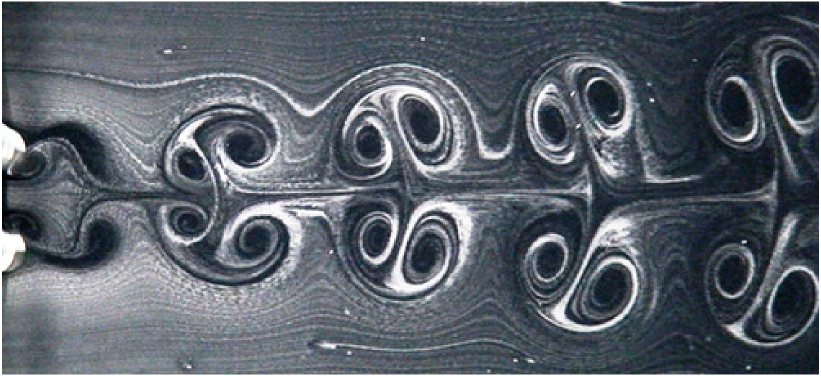
Navier (1785-1836) – Stokes (1819-1903)

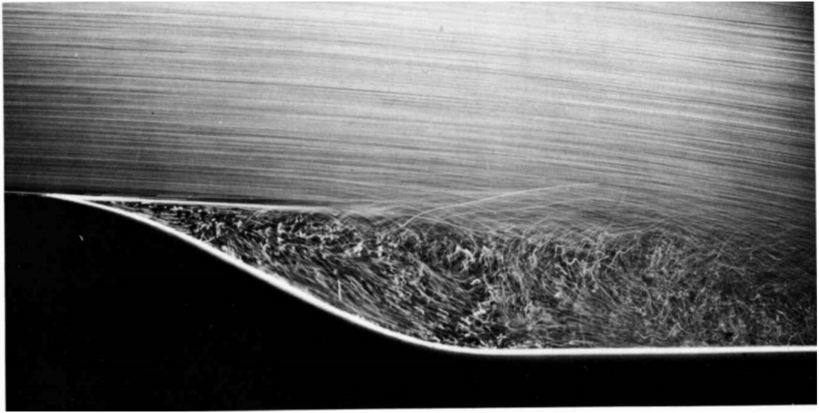


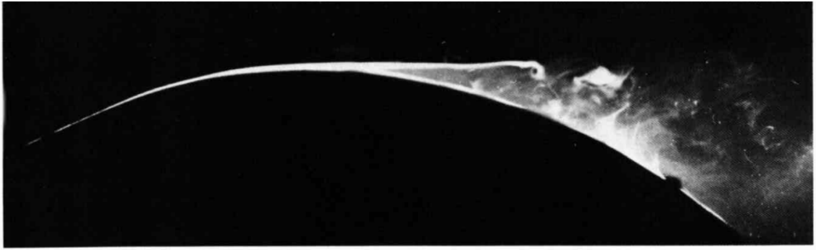


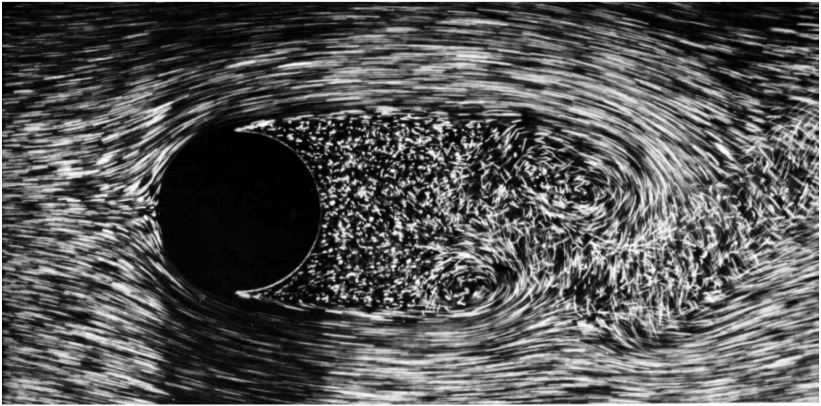


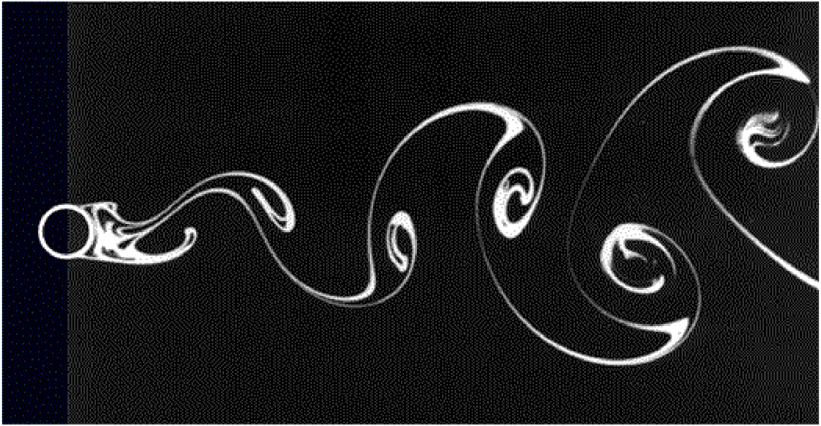


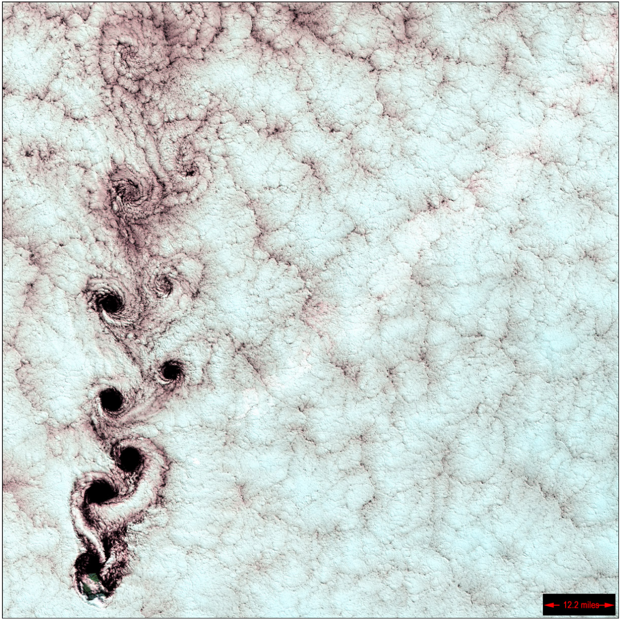











12.2 miles