

Lycée  
Jacquard

Animath



# La théorie des Catastrophes



L'Atelier de Mathématiques  
«Laurent SCHWARTZ»,  
les Professeurs de la discipline,  
et le Proviseur Christophe HESPEL.

Ont le plaisir de vous inviter à une promenade  
mathématique avec

**Etienne Ghys**

Directeur de recherche au CNRS.

Judi 14 Décembre 2006 à 15h  
Au Gymnase du Lycée

Lycée Jacquard

2, rue Bouret  
75019 PARIS

La théorie des  
**Catastrophes**

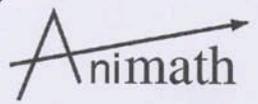
14 décembre  
2006  
15h00



Promenade  
mathématique

avec

**Etienne GHYS**  
Directeur de recherche au CNRS



L'atelier de mathématiques  
"Laurent SCHWARTZ"  
& les professeurs de la discipline  
Les équipes du Lycée Jacquard  
& Mr HESPEL, le proviseur.

AFFICHE RÉALISÉE PAR LES ÉLÈVES DE 1ère STCA

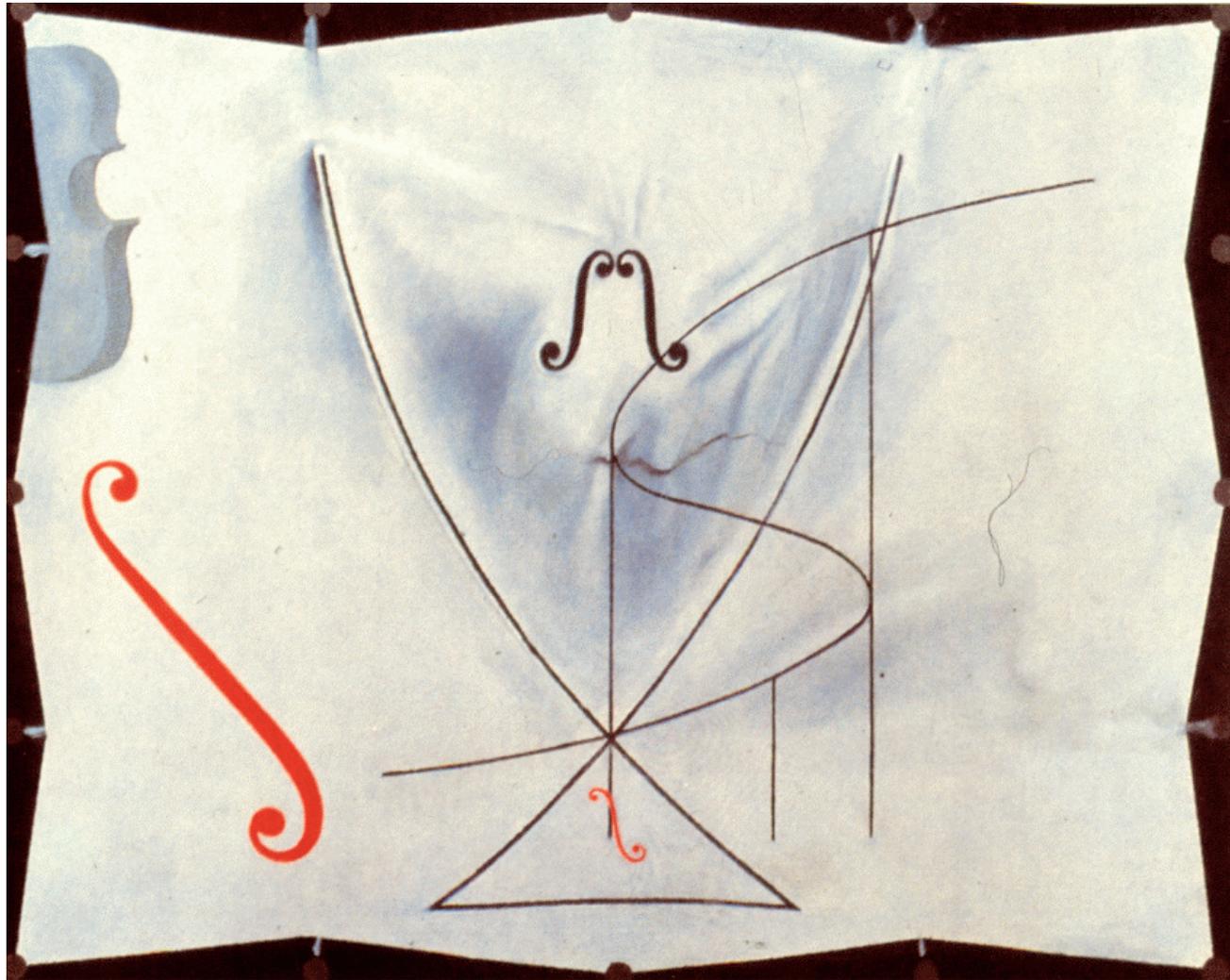
**La théorie des catastrophes,  
En hommage à René Thom (1923-2002)**



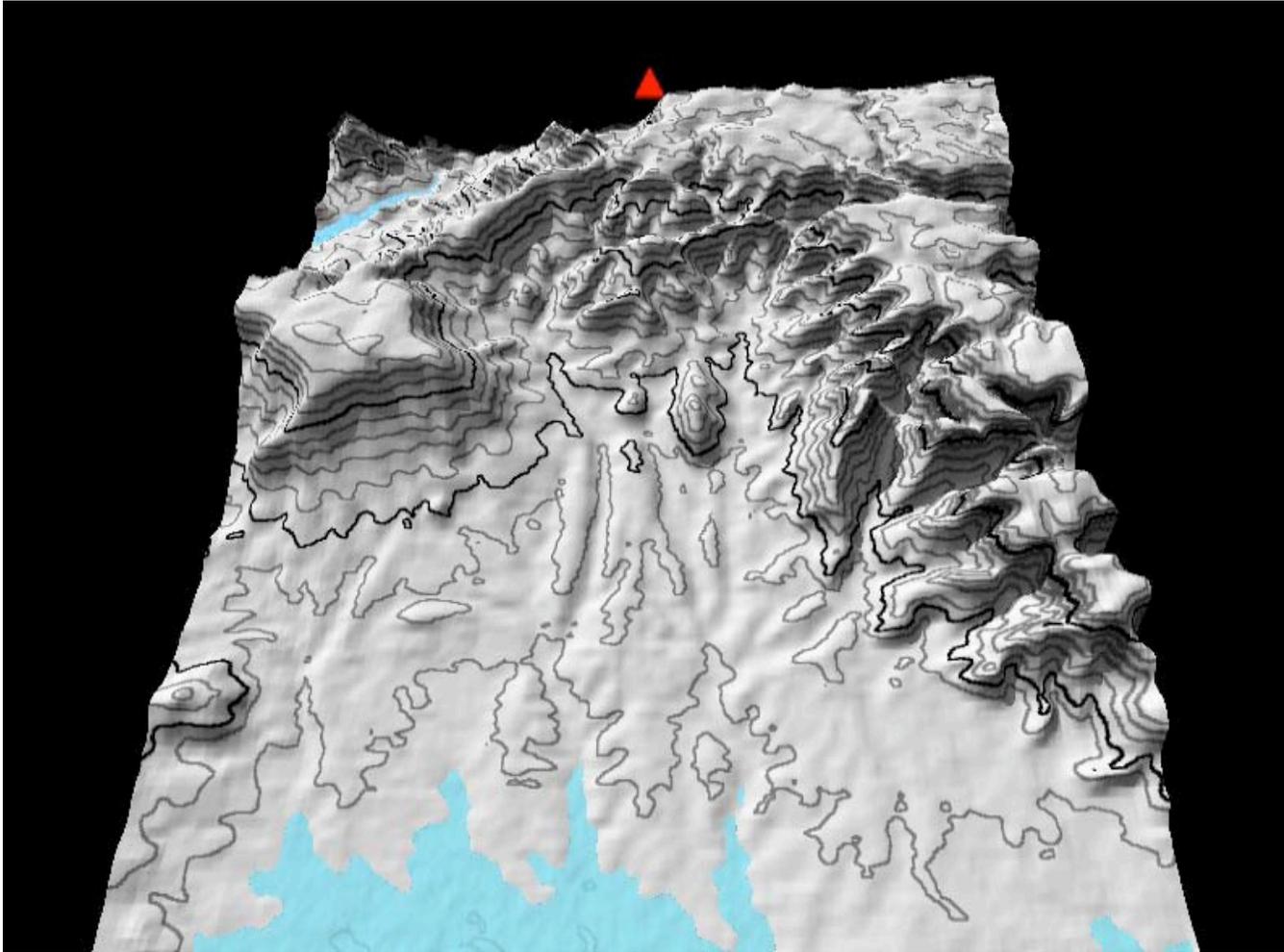
# Quelques repères

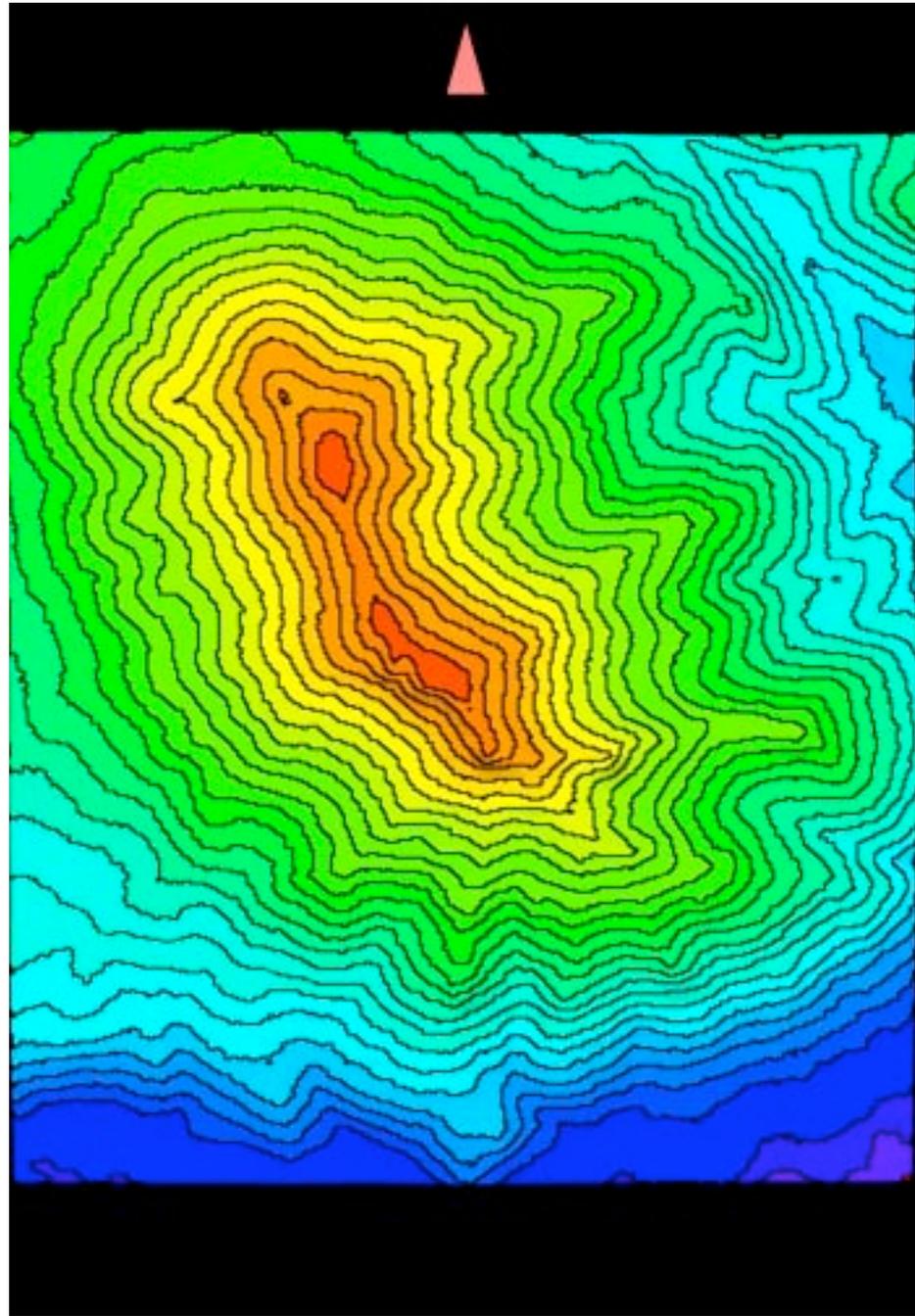
- 1923: Naissance à Montbéliard
- 1951: thèse en topologie
- 1958: Médaille Fields
- 1963-1988: Professeur à l'IHES (Bures sur Yvette)
- 1960-80: la théorie des catastrophes
- 1980: se tourne vers la philosophie

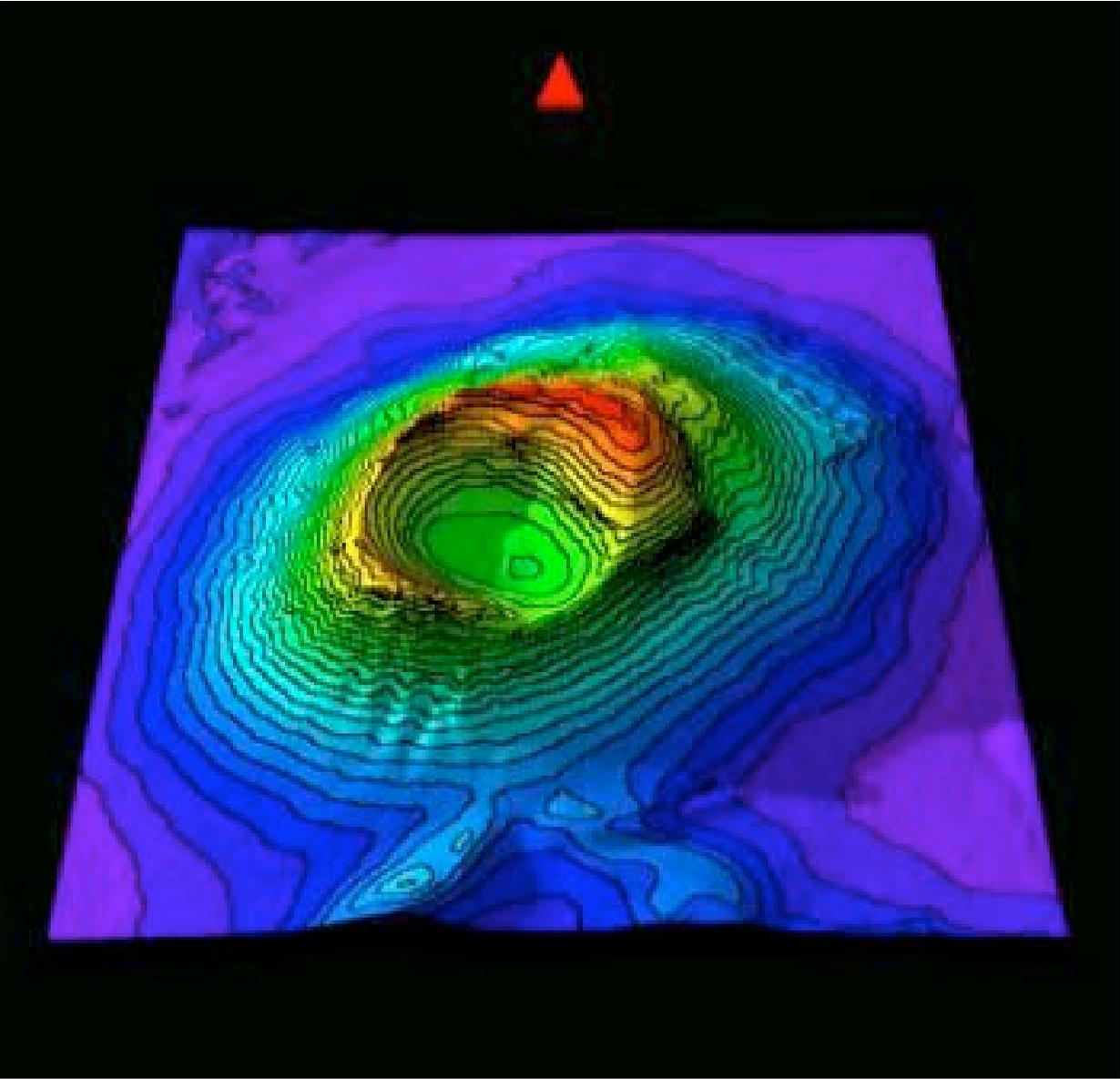
## La queue d'aronde (Dali 1983)

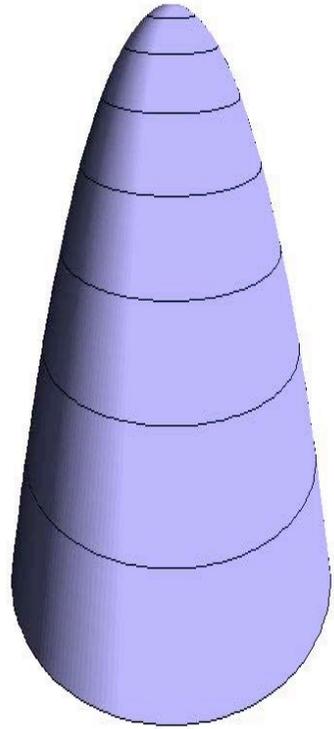




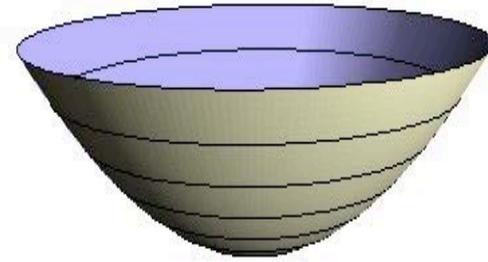




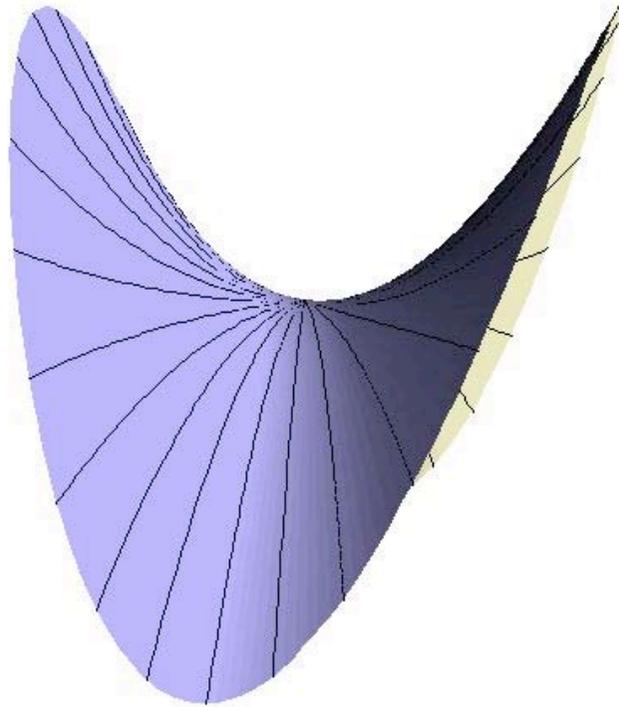




Sommet



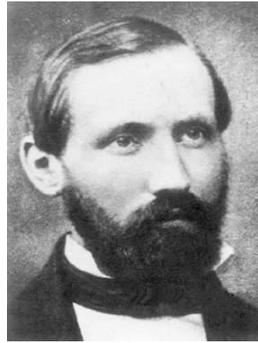
vallée



**Col**



**L. Euler**



**B. Riemann**



**H. Poincaré**



**M. Morse**

**Théorème :** *En général, à l'intérieur d'une courbe de niveau :*

*Le nombre de sommets*

+

*Le nombre de vallées*

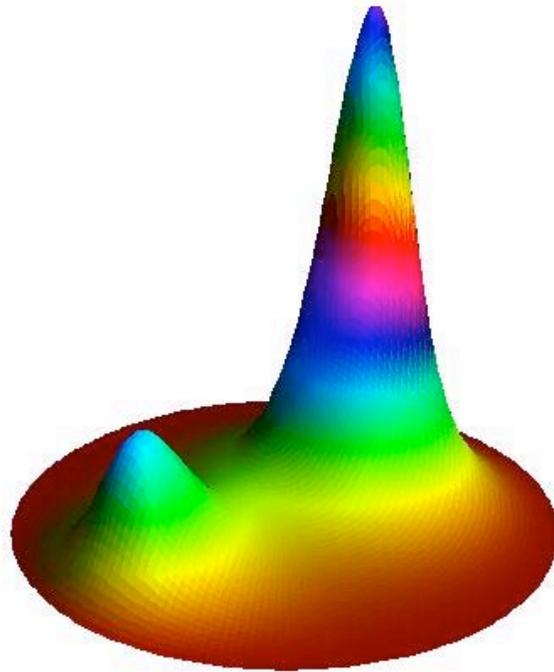
-

*Le nombre de cols*

*= 1*

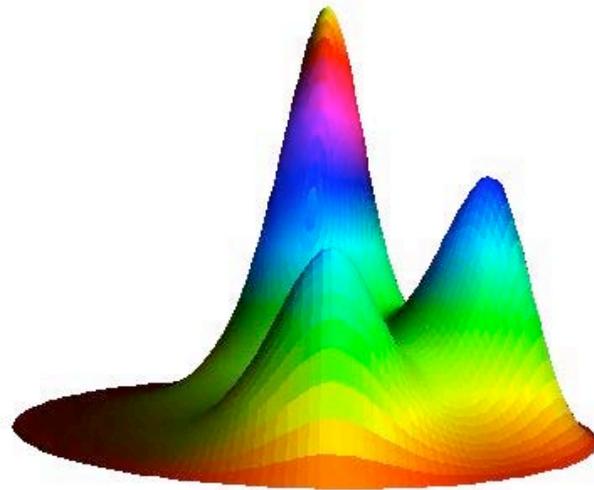
**2 sommets, 0 vallée, 1 col**

$$2 + 0 - 1 = 1$$



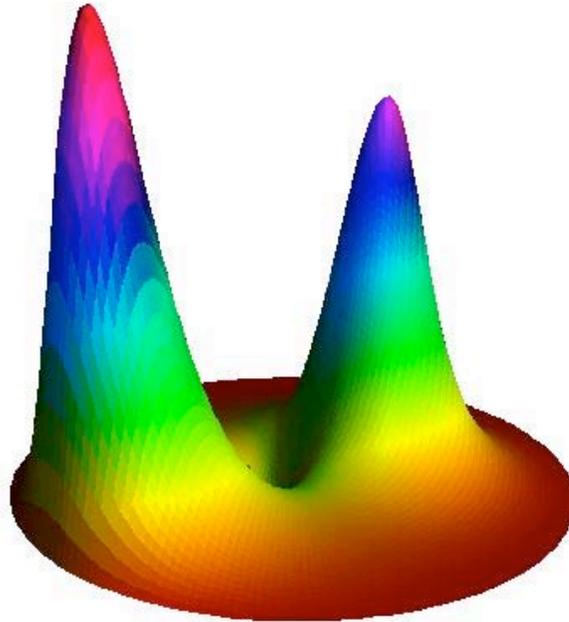
**3 sommets, 0 vallée, 2 cols**

$$3 + 0 - 2 = 1$$



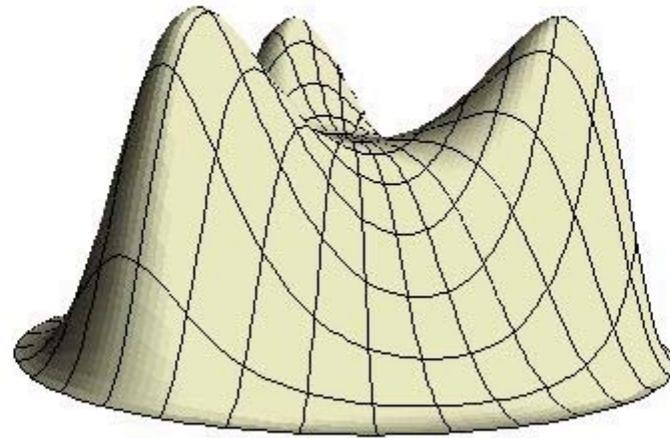
**2 sommets, 1 vallée, 2 cols**

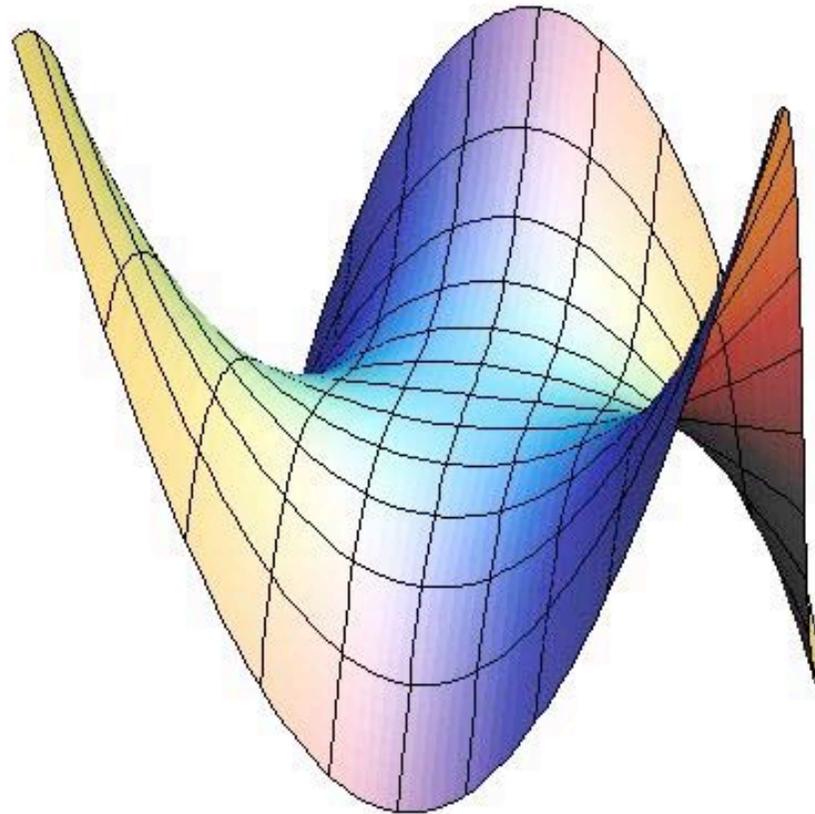
$$2 + 1 - 2 = 1$$



**3 sommets, 0 vallée, 1 col**

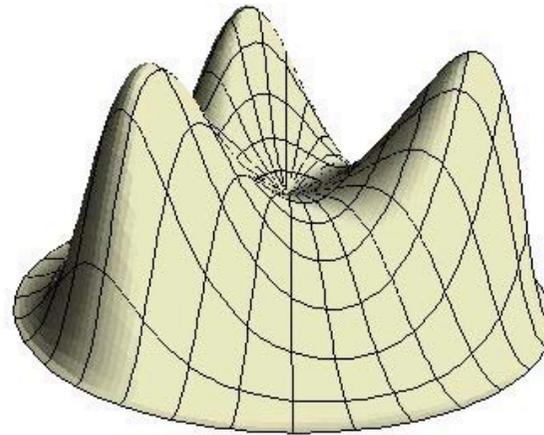
**$3+0-1 = 1$  ????**





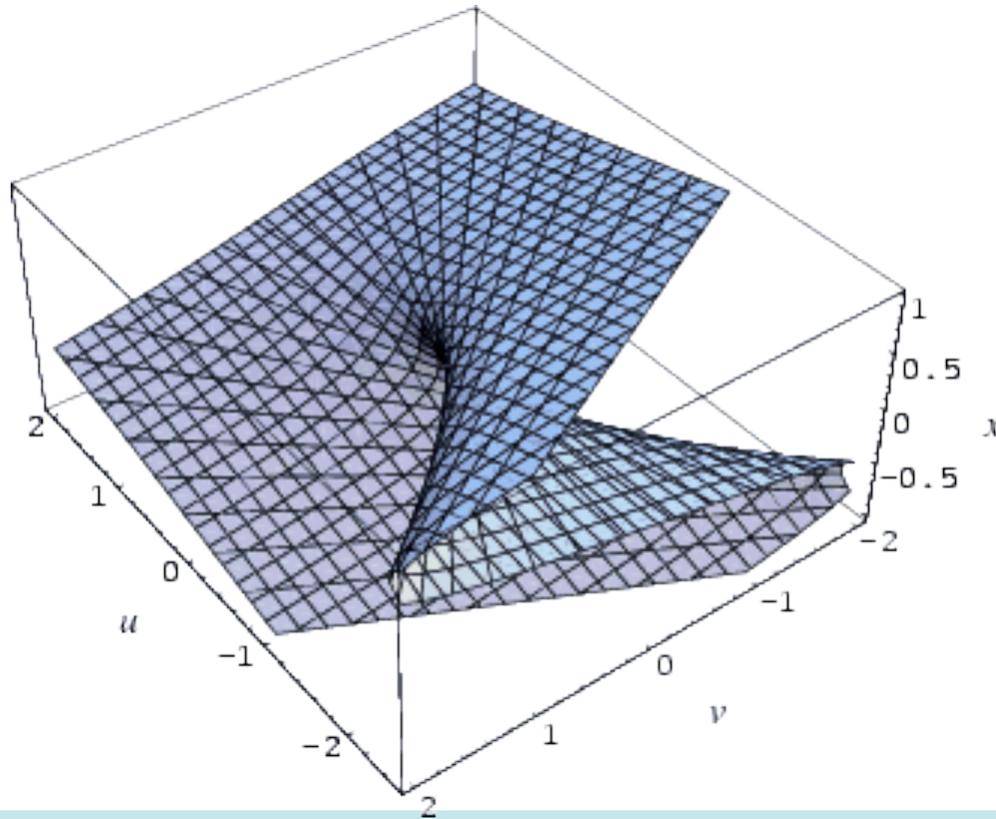
**La selle de singe**

**3 sommets, 1 vallée, 3 cols:  $3 + 1 - 3 = 1$**

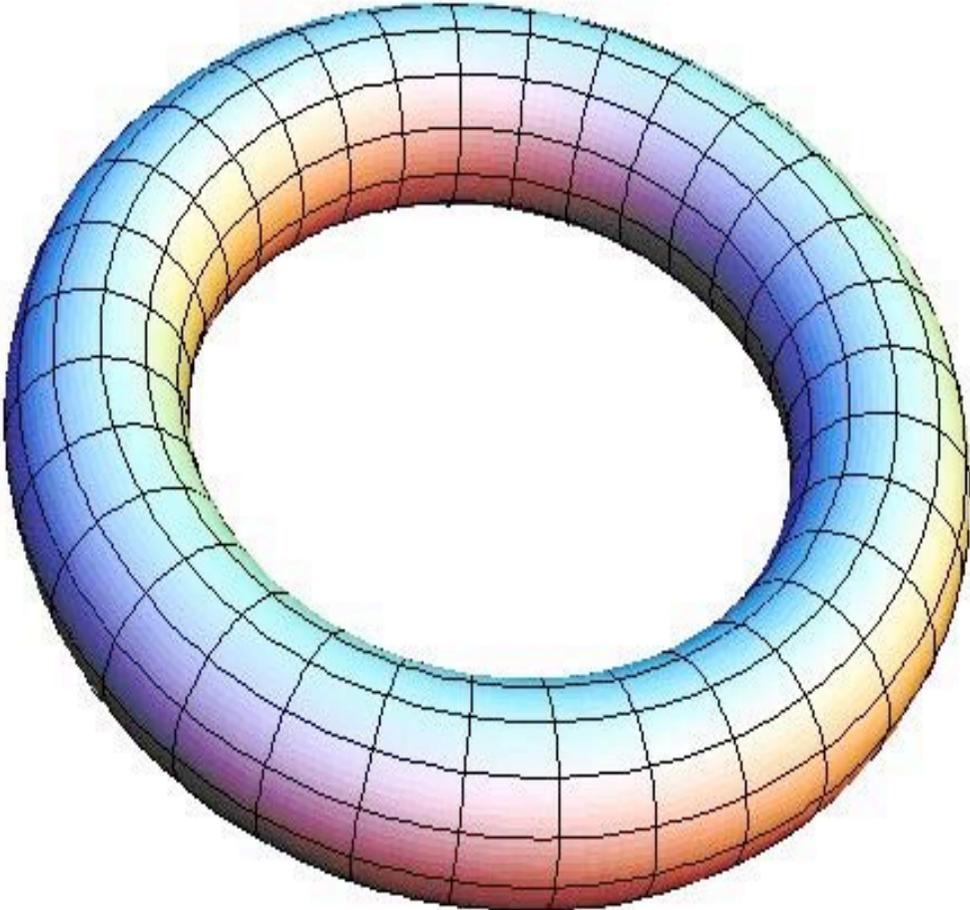


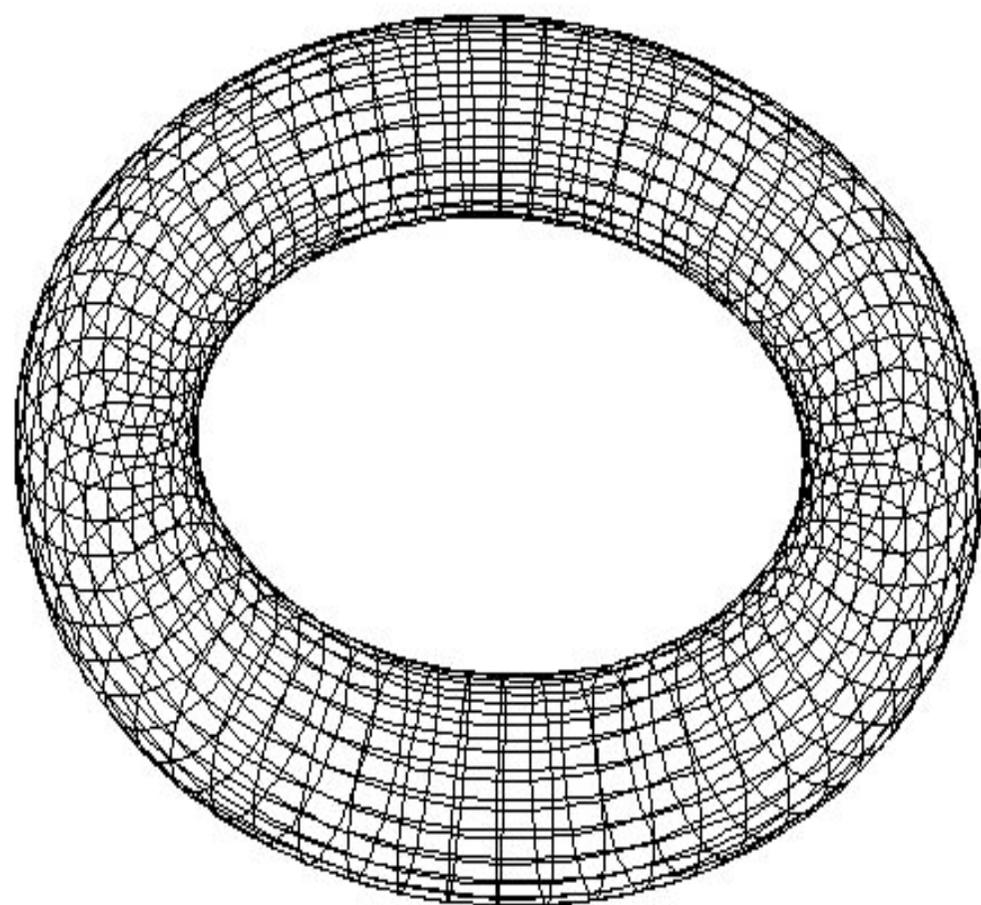


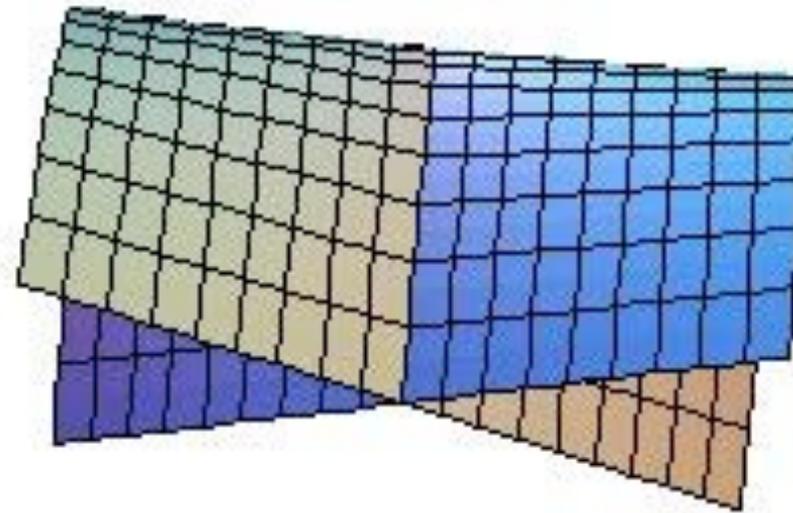
H. Whitney  
(1907-1989)



**En général, quand on observe une surface,  
on ne voit que des plis et des fronces**

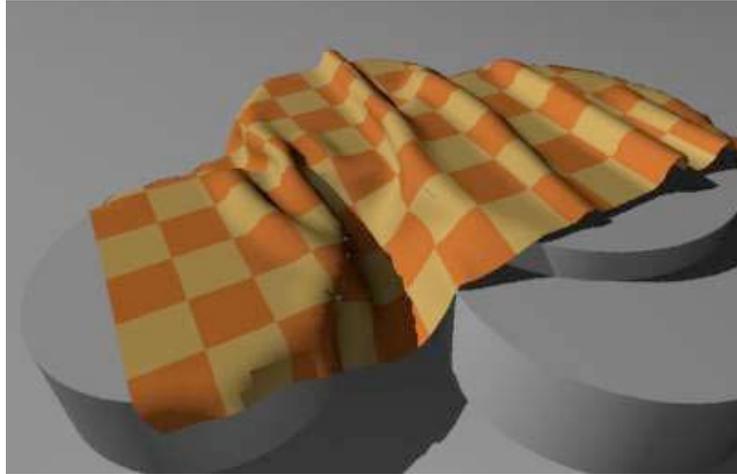


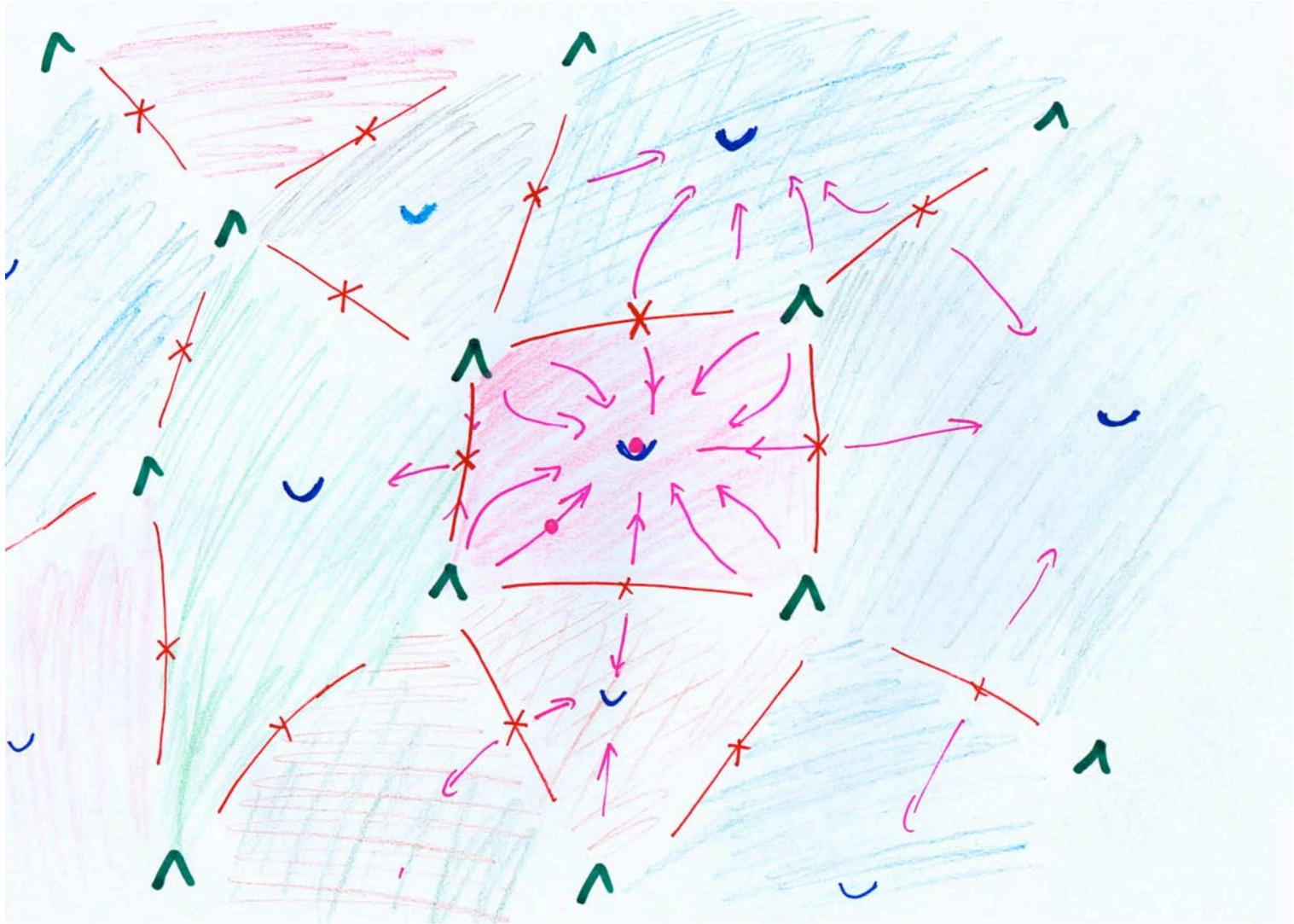




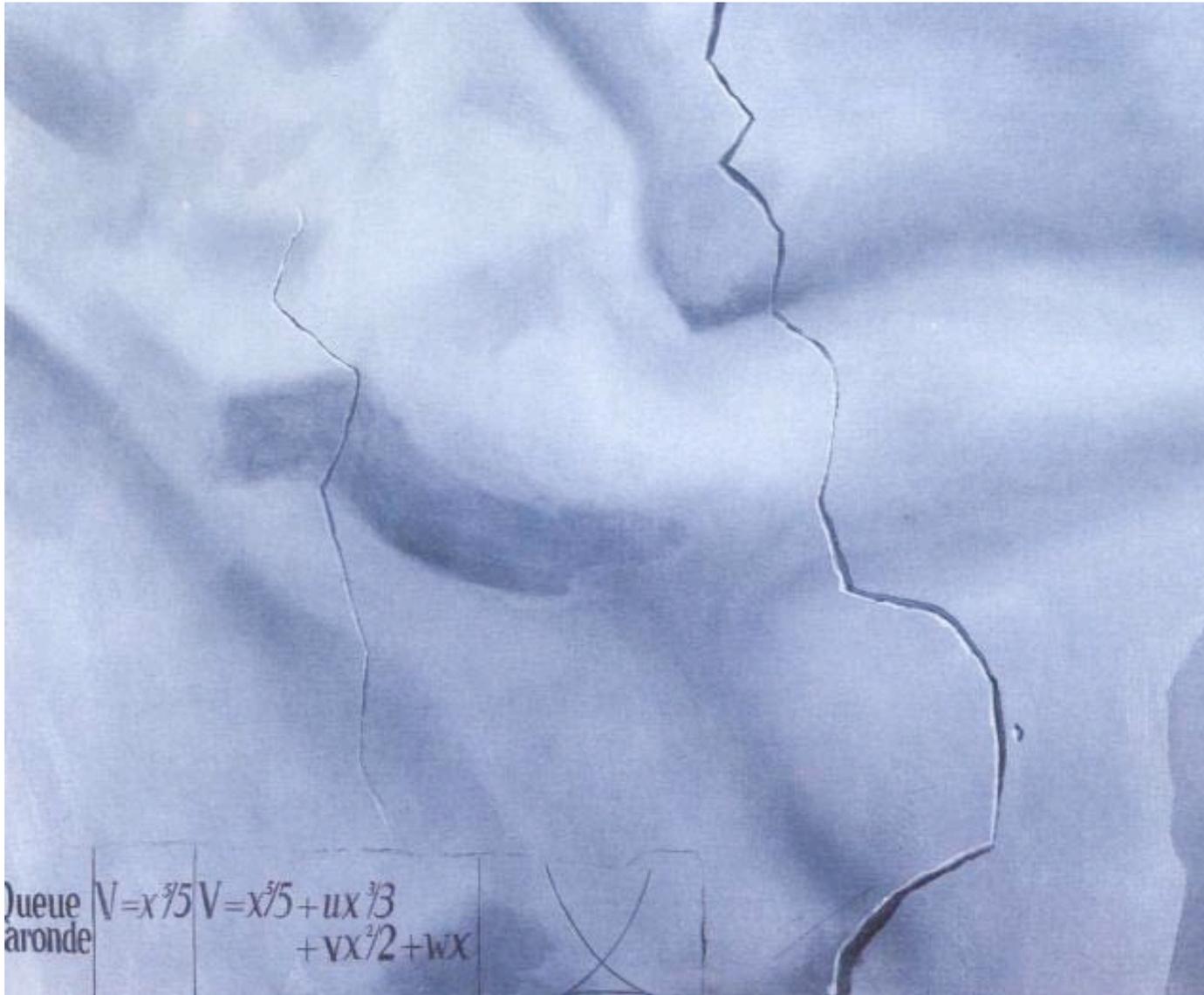
**Le parapluie de Whitney**







# Abduction Topologique- Hommage à René Thom (Dali)



Lycée  
Jacquard

Animath



L'Atelier de Mathématiques  
«Laurent SCHWARTZ»,  
les Professeurs de la discipline,  
et le Proviseur Christophe HESPEL.  
Ont le plaisir de vous inviter à une promenade  
mathématique avec  
**Etienne Ghys**  
Directeur de recherche au CNRS.

Jeudi 14 Décembre 2006 à 15h  
Au Gymnase du Lycée

Lycée Jacquard  
2, rue Bouret  
75019 PARIS

*Les systèmes physiques, chimiques, biologiques, économiques, sociologiques etc... dépendent d'un très grand nombre de paramètres. L'espace qui leur est associé est de dimension gigantesque...*

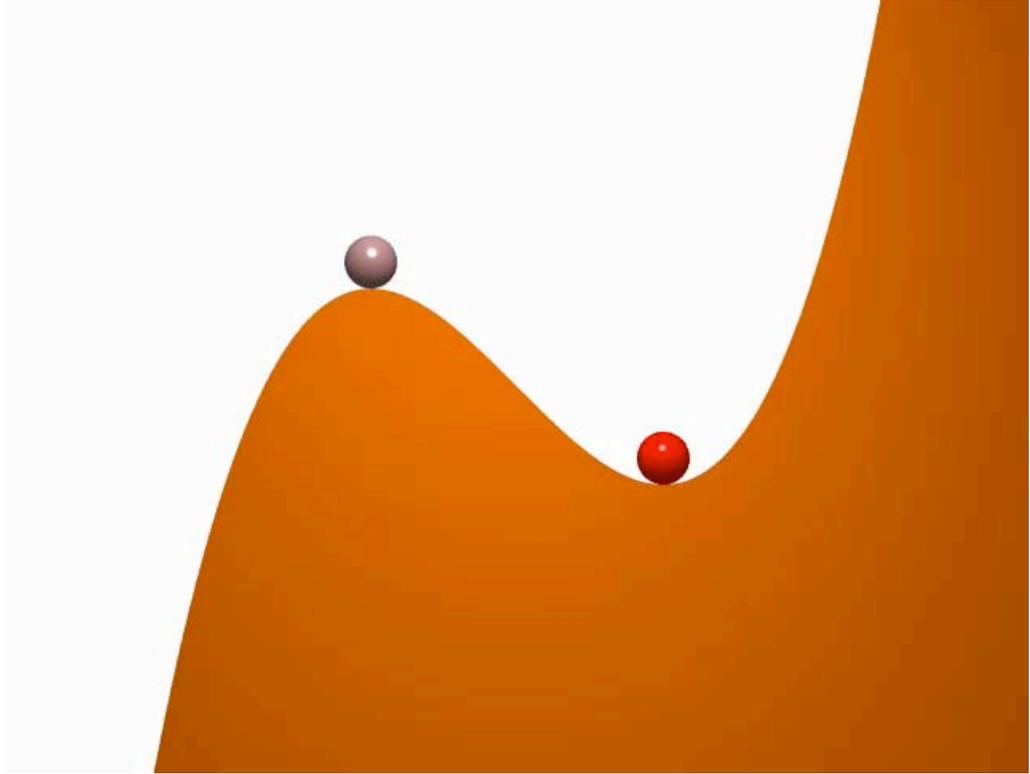
***Principe de moindre action :***

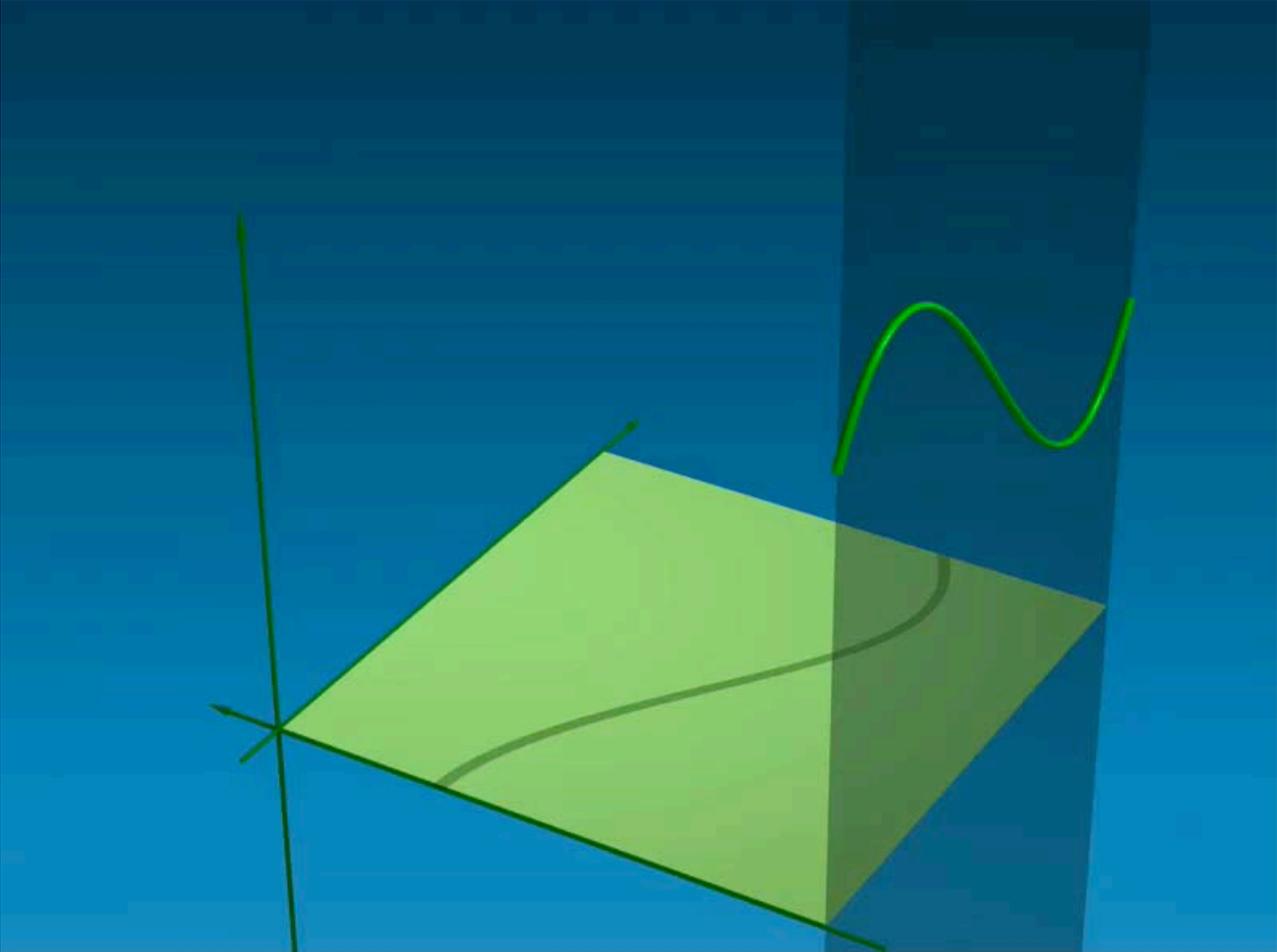
*Dans cet espace, le système étudié essaye de se placer en des situations où une certaine fonction est minimum.*

**En général, le système se trouve dans une position stable, au fond d'une vallée, d'un bassin.**

**Lorsque le paysage se déforme lentement, il arrive que le système passe soudainement d'un bassin vers un autre bassin: c'est une catastrophe... Comprendre une science, c'est comprendre la nature des catastrophes qui apparaissent en général.**

**Même si le paysage est dans un espace de très grande dimension, le scientifique n'agit souvent qu'en modifiant un tout petit nombre de « paramètres » (1, 2, 3 ou 4...)**





## ***Théorème de Thom***

*Lorsqu'un système dépend de moins de 4 paramètres,  
il ne rencontre en général que 7 types de catastrophes:*

*Le pli*

*La fronce*

*La queue d'aronde*

*Le papillon*

*L'ombilic elliptique*

*L'ombilic hyperbolique*

*L'ombilic parabolique*

## Les sept catastrophes élémentaires de Thom

$$x^3 + ux$$

$$x^4 + ux^2 + vx$$

$$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$$

$$x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$$

$$x^3/3 - xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy$$

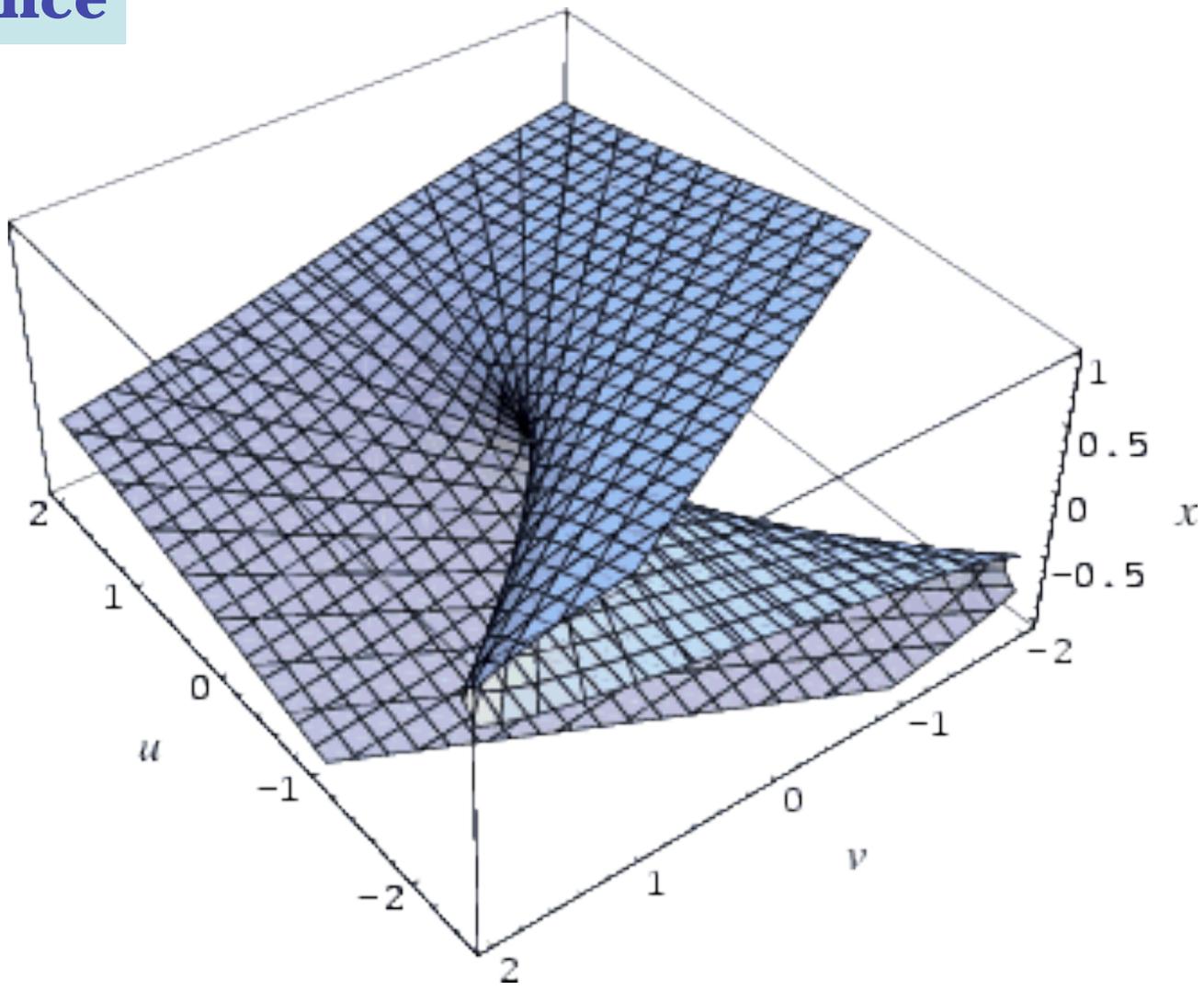
$$x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$$

$$x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$$

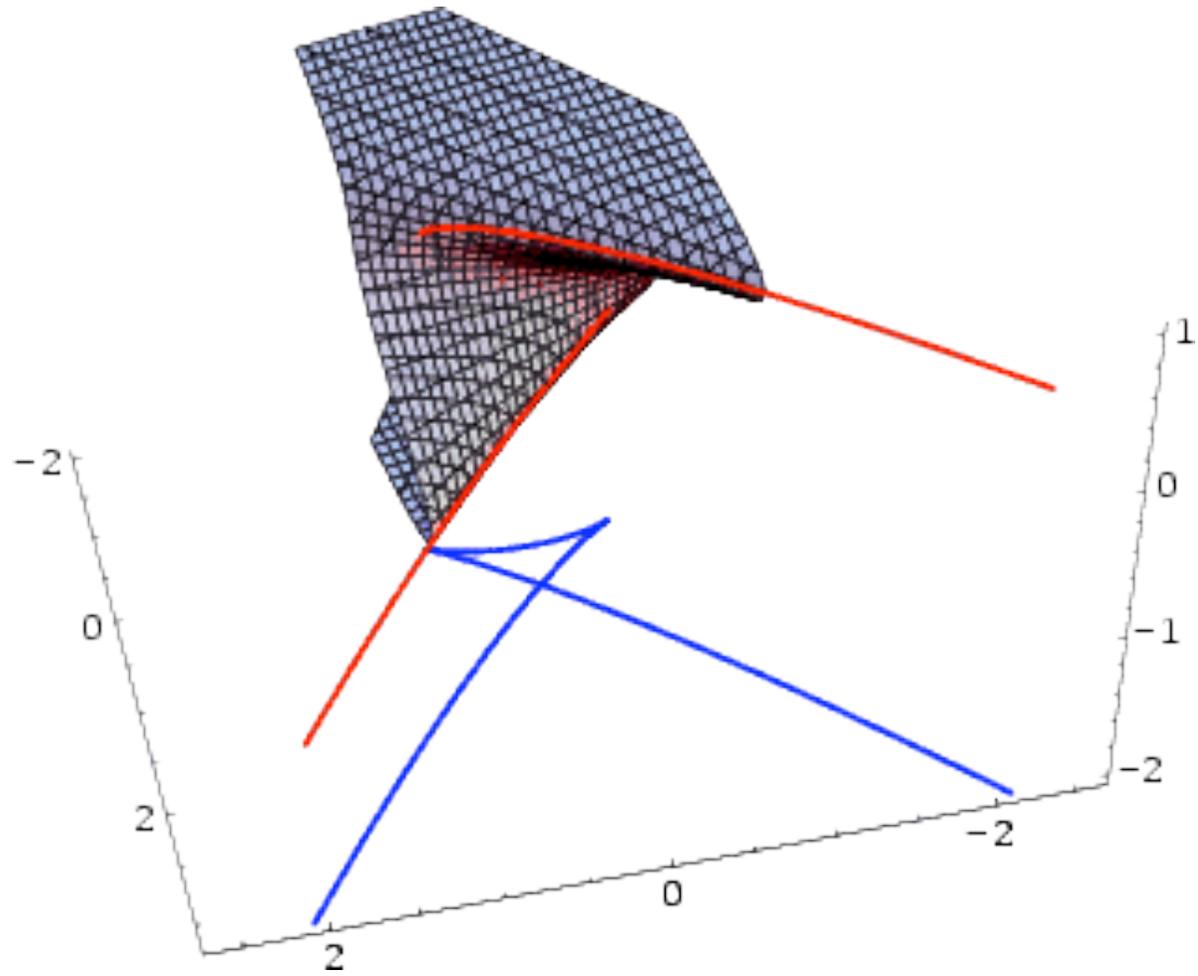
Dali (1983) : série sur les catastrophes



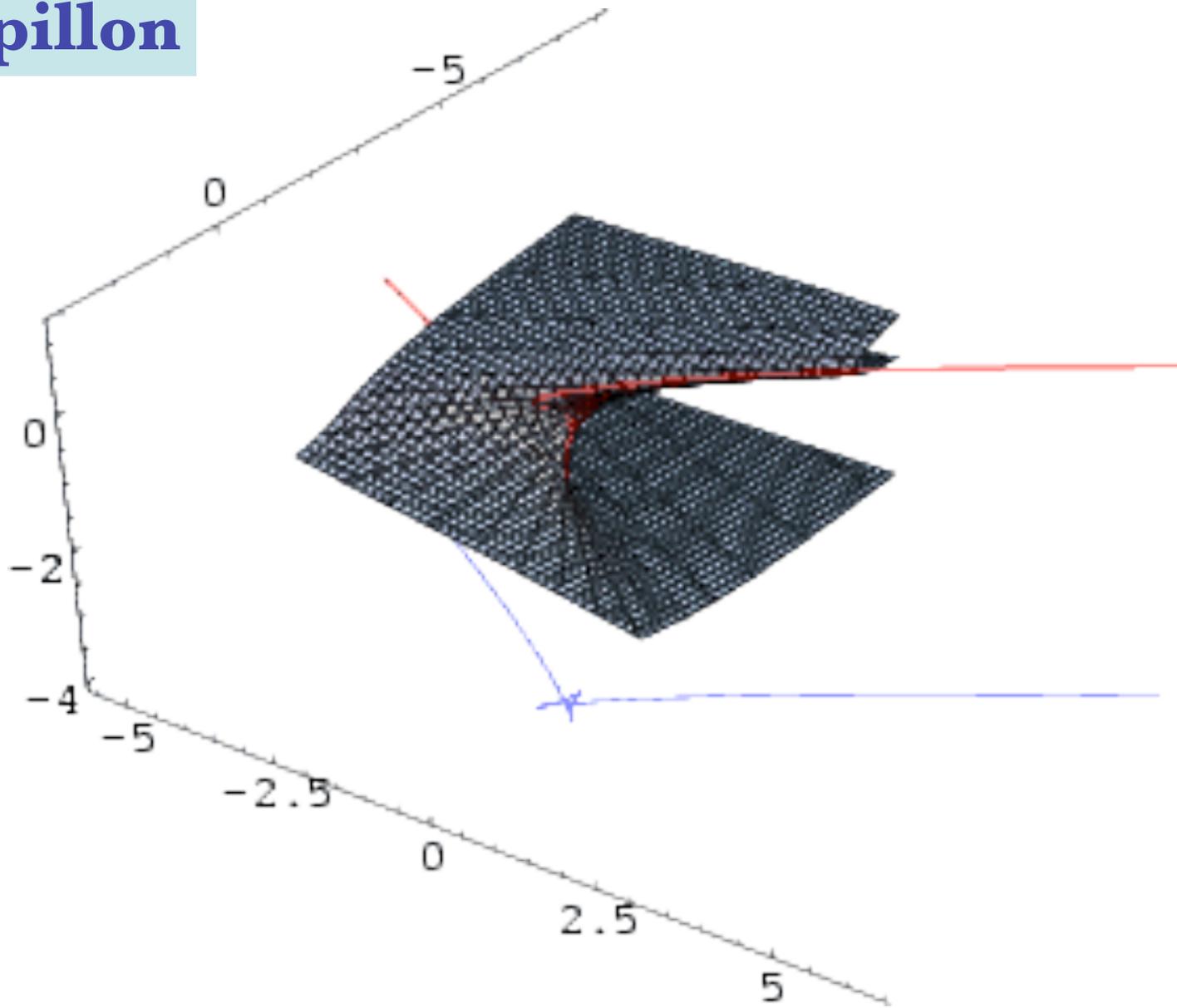
# La fronce



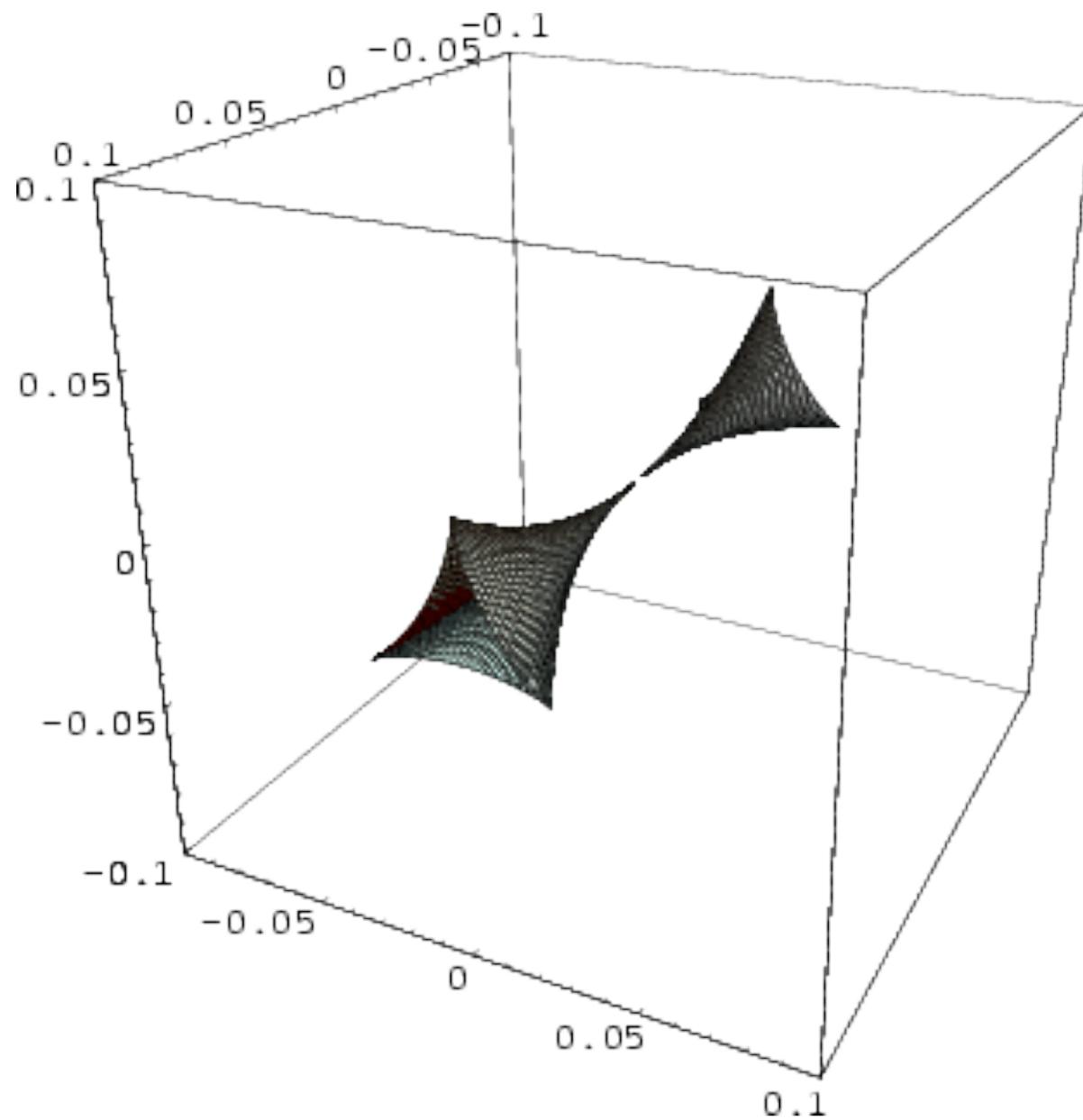
# Queue d'aronde



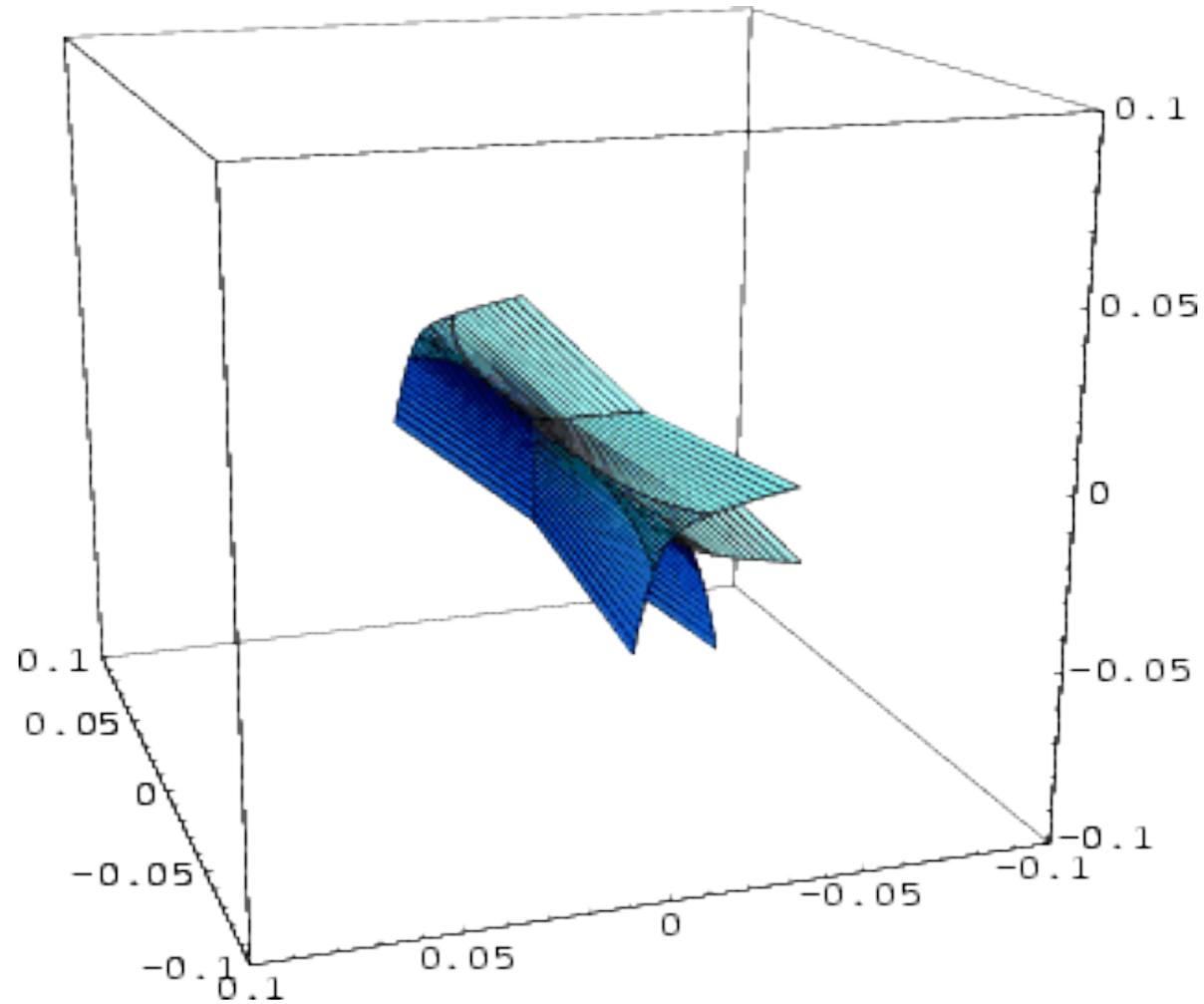
# Papillon



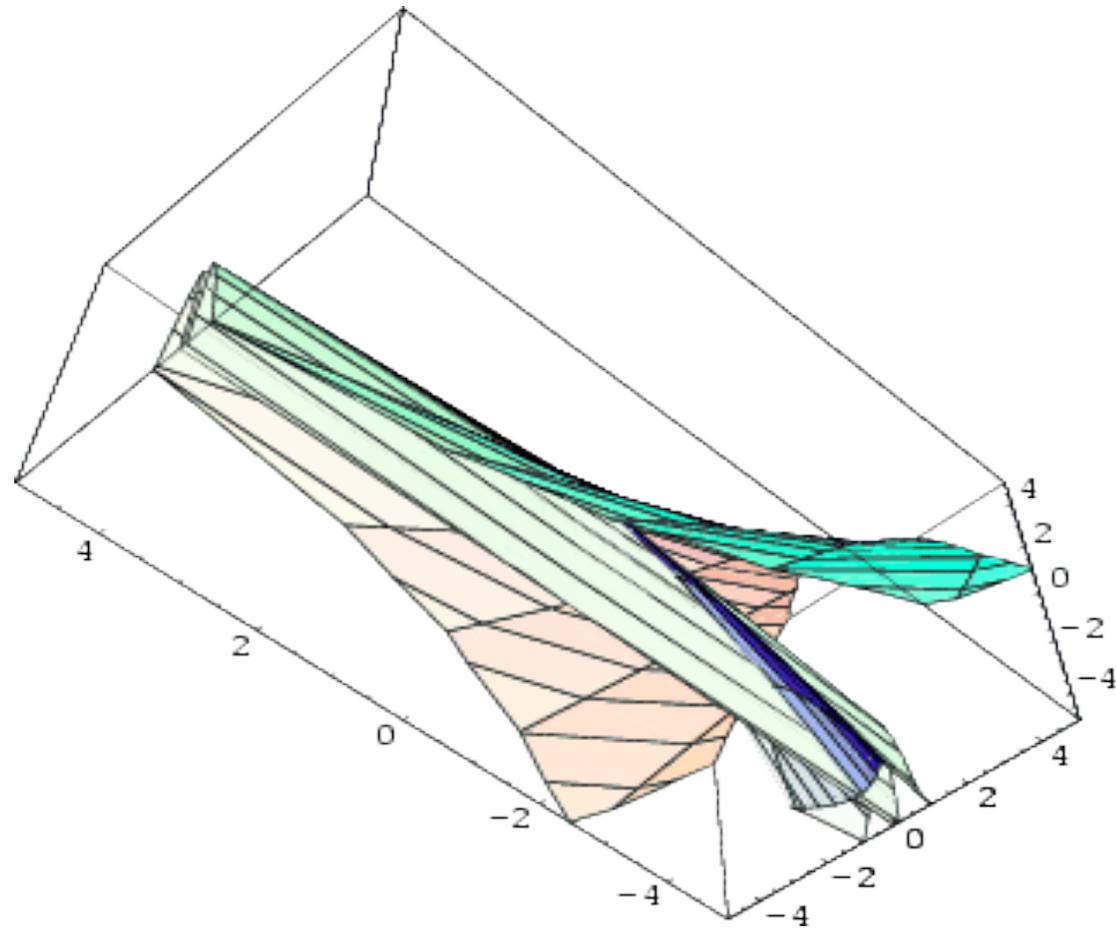
# Ombilic elliptique



# L'ombilic hyperbolique



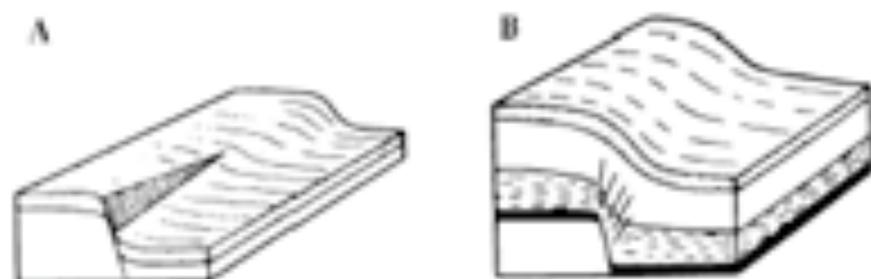
# Ombilic parabolique



## Cliché 5

La fronce (catastrophe de Riemann-Hugoniot) en géologie : naissance d'une faille (voir figure 5-3).

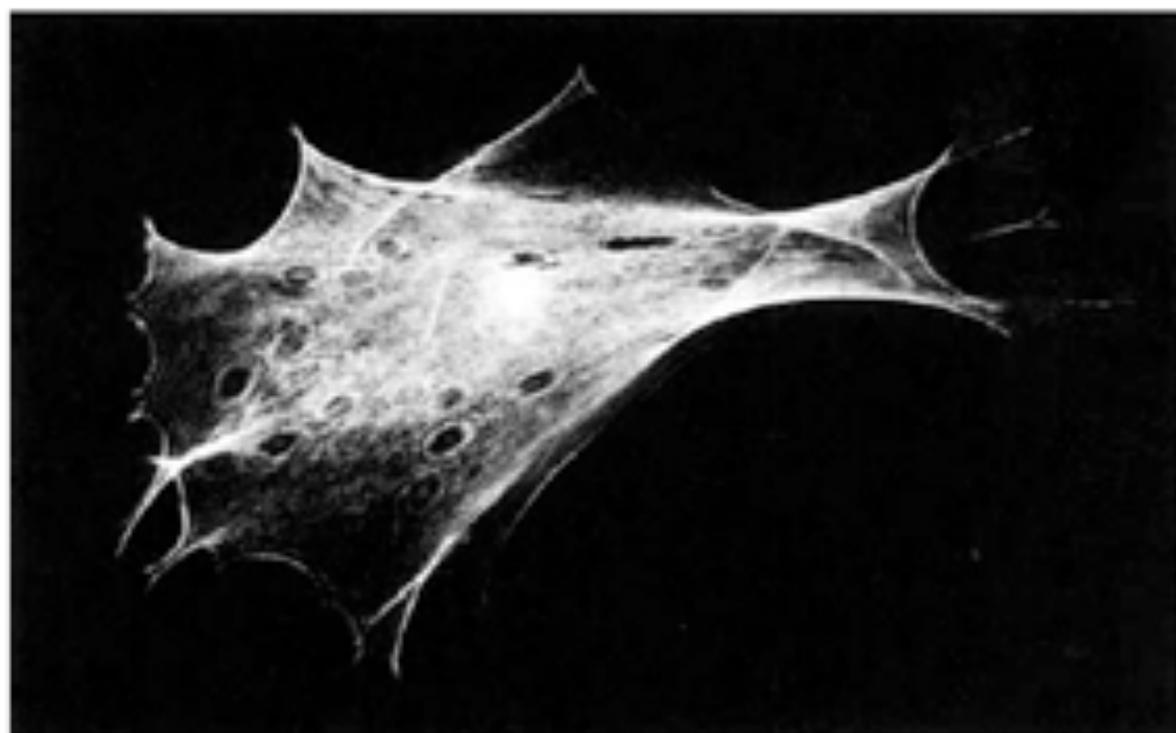
D'après E. Scherbon Hills, *Elements of Structural Geology*, Methuen, London, 1963.



Cliché 5

## Cliché 6, [1968]

La queue d'aronde en optique géométrique. La singularité ponctuelle ébauchée en C1 se déploie en C2 (voir figure 5-7).

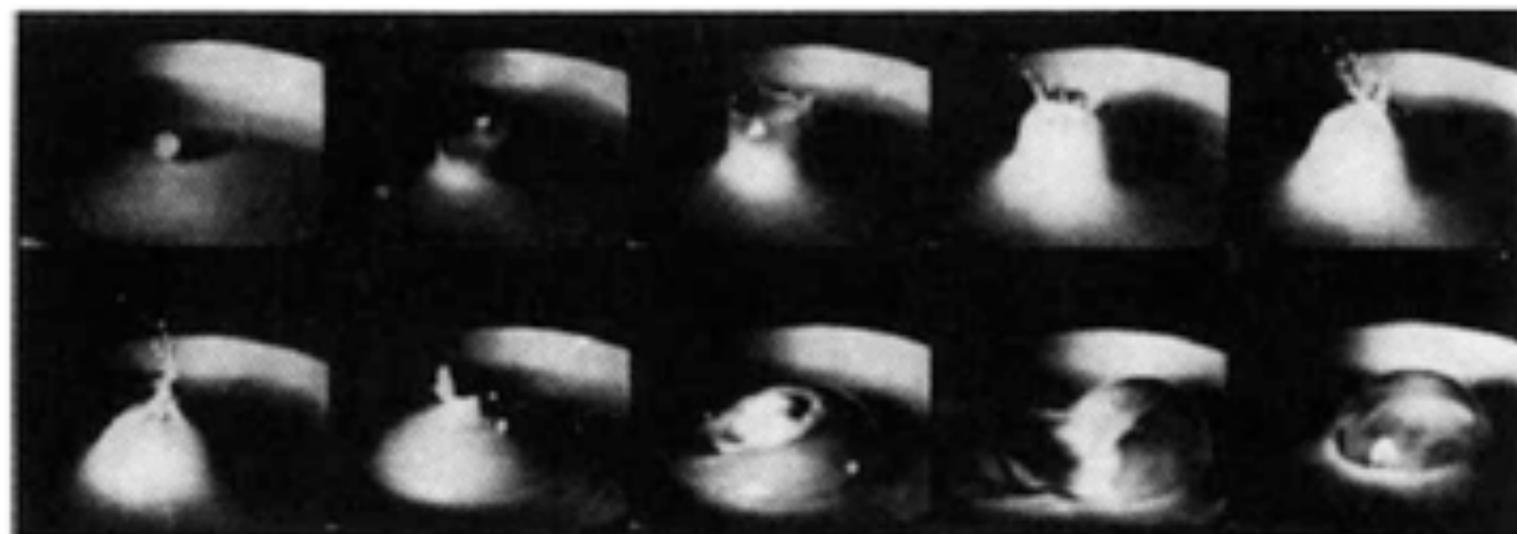


Cliché 6a

## Cliché 8

Naissance d'une bulle. La chute d'une goutte a provoqué par contre-coup la formation d'une alvéole au bord délicatement déferlant. Cette alvéole se ferme en une catastrophe complexe qui provoque une gerbe de déferlements de type elliptique.

Cliché Prof. H. E. Edgerton, Mass. Inst. of Technology.



Cliché 8

## Cliché 10

Un pli géologique sur le point de briser.

D'après *Elements of Structural Geology*, op. cit.



Cliché 10

## Cliché 11

Un pli biologique sur le point de se refermer : neurulation chez le crapaud *Xenopus Levis*.

D'après P.D. Nieuwkoop et P.A. Florschütz.  
*Archives de Biologie*, tome 61, p. 113.

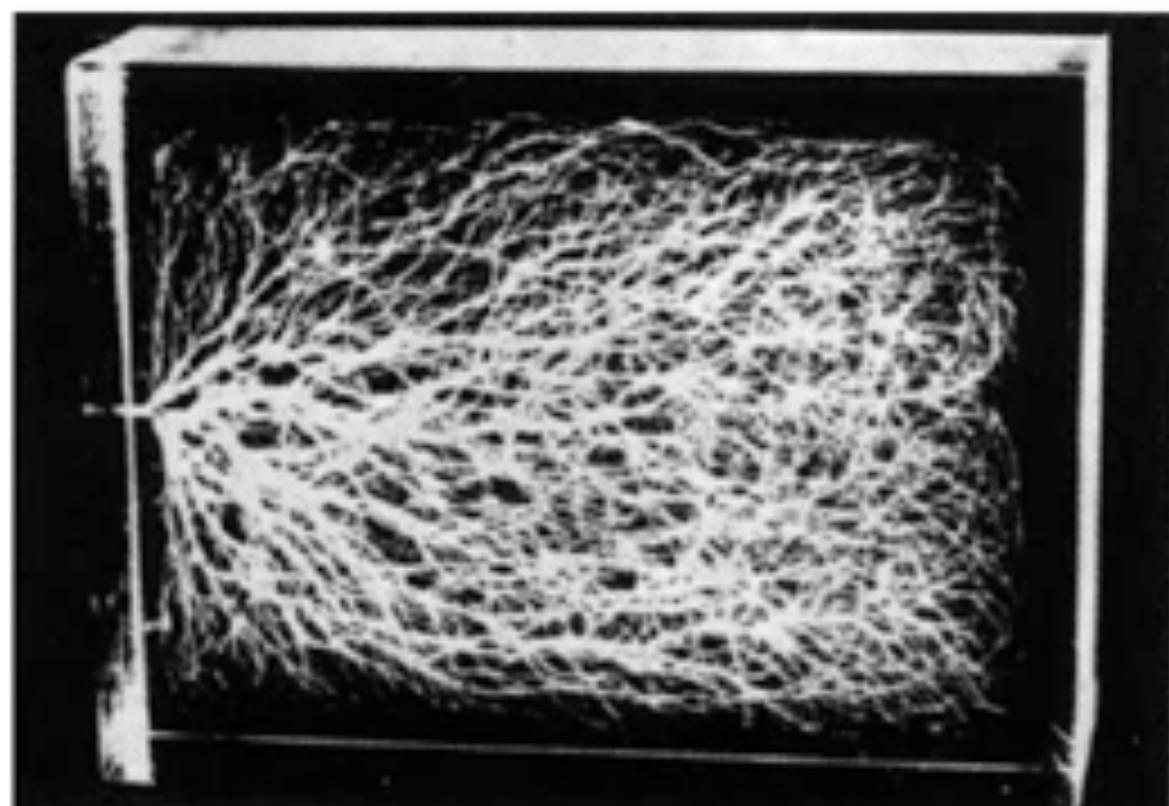


Cliché 11

## Cliché 18

Catastrophe à paramètre spatial : étincelle électrique dans un matériau plastique (voir figure 6-1).

Spécimen aimablement communiqué par M. Robert Mouton.

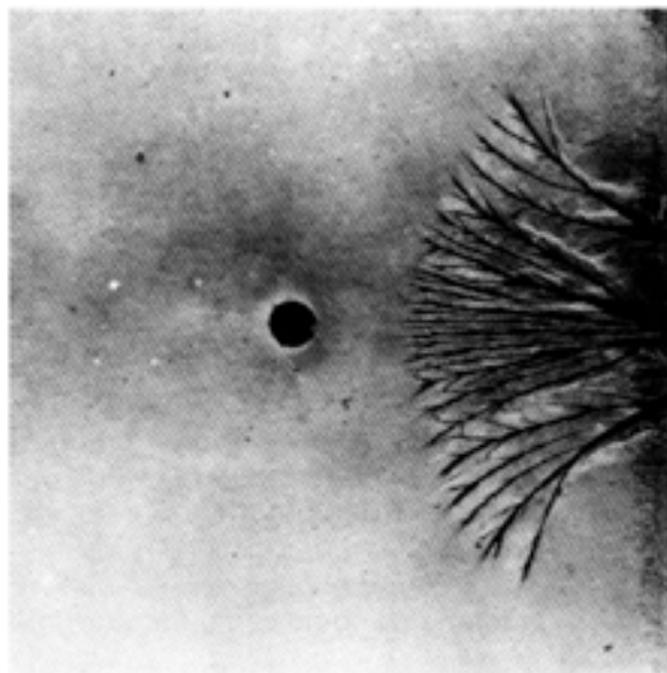


Cliché 18

### Cliché 19

Sous l'impact d'une balle de revolver, les fêlures du verre se propagent à partir du bord en se ramifiant vers le point d'impact (voir figure 6-1).

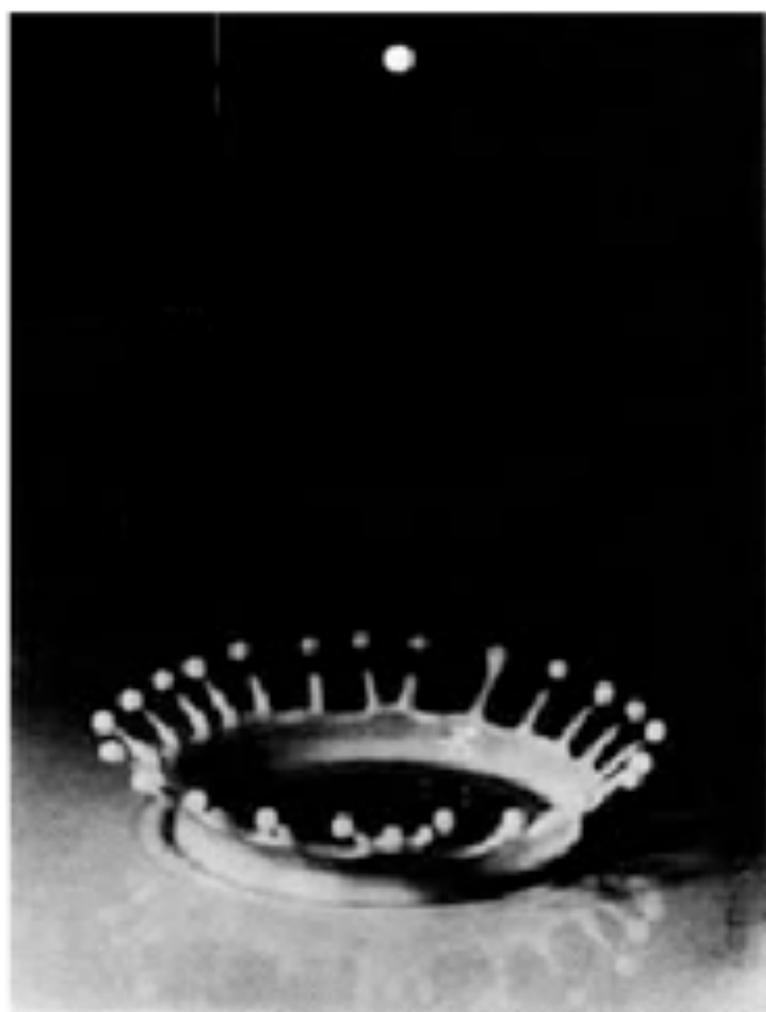
Cliché Professeur H.E. Edgerton, Massachusetts Institute of Technology.



Cliché 19

## Cliché 21

Catastrophe généralisée : exemple de symétrie :  
- Le diadème (Cliché H.E. Edgerton).



Cliché 21

## Cliché 25

Nébuleuse plus ancienne en déferlement équatorial : NGC 4594.

D'après S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York, 1960.



Cliché 25

**Cliché 29 [1975]**

The hyperbolic umbilic in hydrodynamics : a wave breaking.

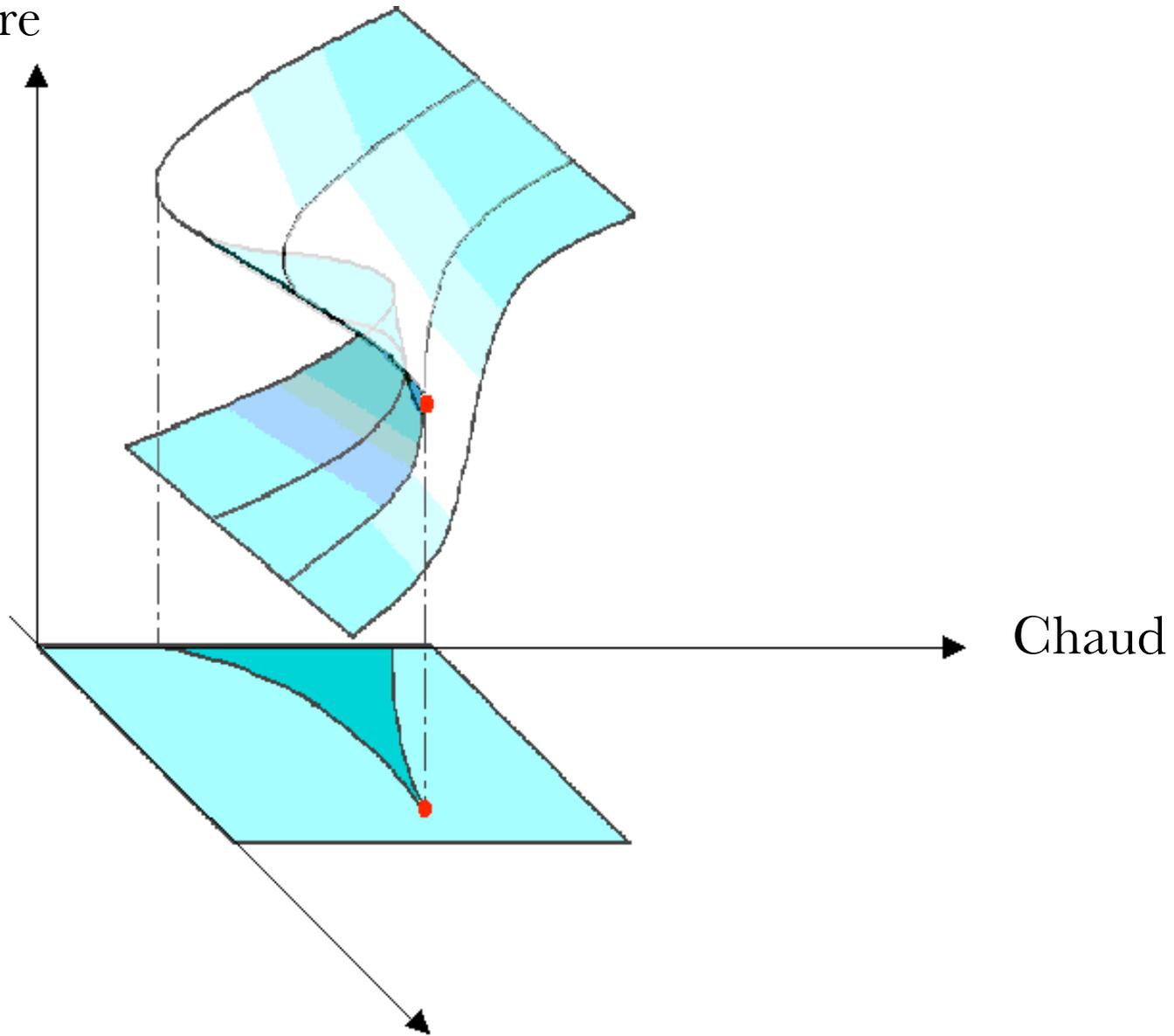


Cliché 29

# Douche catastrophique

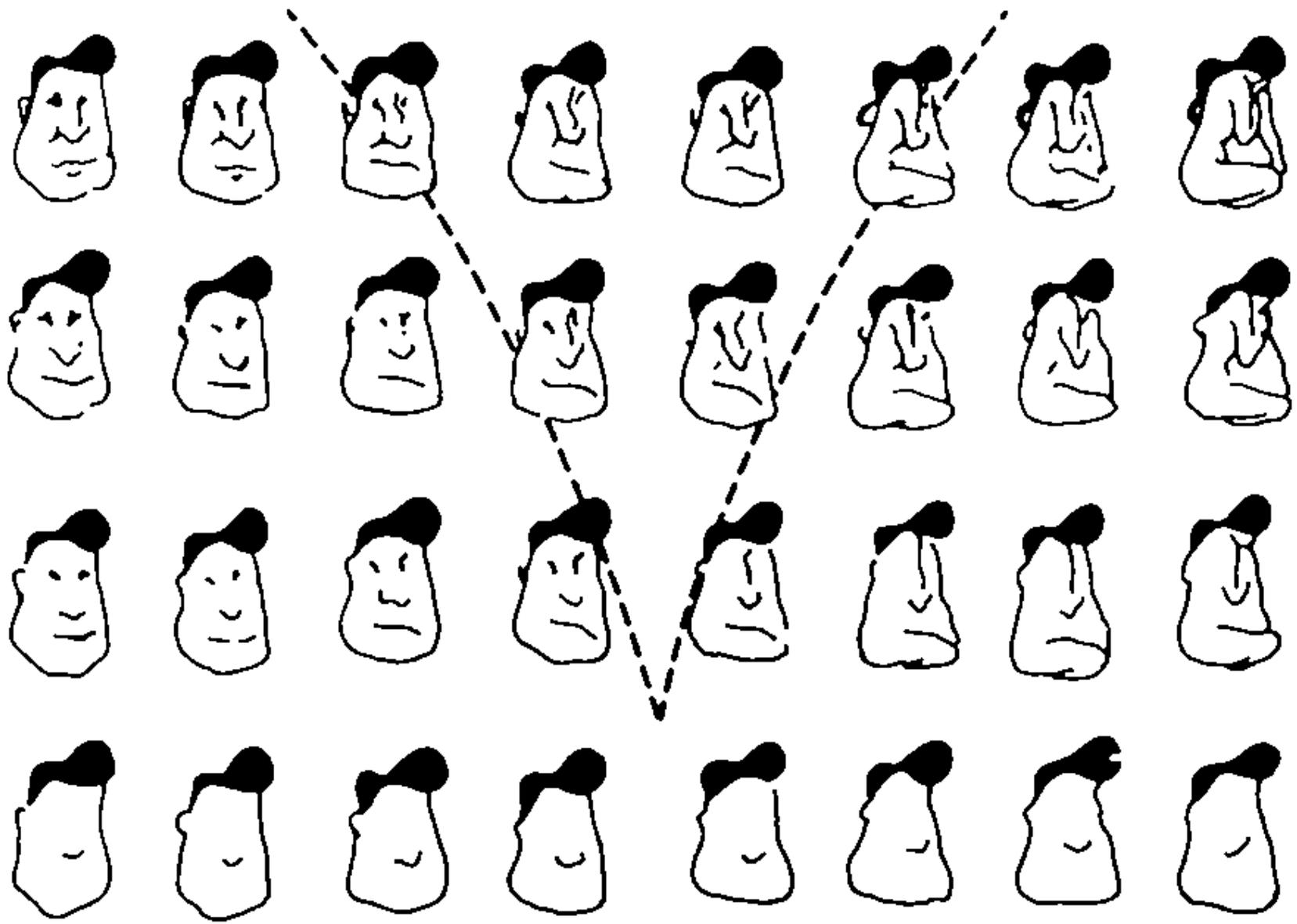


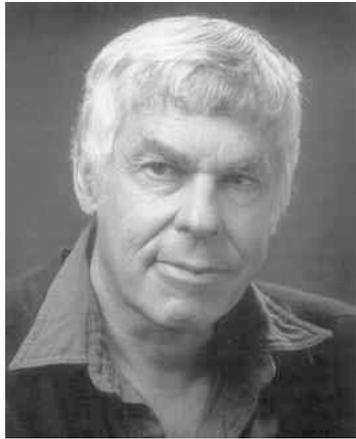
Température



Chaud

Froid





S. Smale

A partir de 1975 :  
Vives critiques de la théorie des catastrophes.

Est-il vrai qu'en général un système est en position stable, au fond d'une vallée ?

Quel est l'intérêt d'une théorie qui n'est que qualitative ?

Ce n'est pas sans quelque mauvaise conscience qu'un mathématicien s'est décidé à aborder des sujets apparemment si éloignés de ses préoccupations habituelles. Une grande partie de mes affirmations relèvent de la pure spéculation ; on pourra sans doute les traiter de rêveries... J'accepte le qualificatif ; la rêverie n'est-elle pas la catastrophe virtuelle en laquelle s'initie la connaissance ? Au moment où tant de savants calculent de par le monde, n'est-il pas souhaitable que d'aucuns, qui le peuvent, rêvent ?



La théorie des  
**Catastrophes**

14 décembre

2006

15h00

Promenade  
mathématique

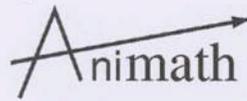
avec

**Etienne GHYS**

*Directeur de recherche au CNRS*



Lycée  
Jacquard



L'atelier de mathématiques  
"Laurent SCHWARTZ"  
& les professeurs de la discipline  
Les équipes du Lycée Jacquard  
& Mr HESPEL, le proviseur.

AFFICHE RÉALISÉE PAR LES ÉLÈVES DE 1ère ST2A

La théorie des

# Catastrophes

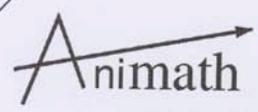


14 décembre  
2006  
15h00

Promenade  
mathématique

avec

**Etienne GHYS**  
Directeur de recherche au CNRS



L'atelier de mathématiques  
"Laurent SCHWARTZ"  
& les professeurs de la discipline  
Les équipes du Lycée Jacquard  
& Mr HESPEL, le proviseur.

AFFICHE RÉALISÉE PAR LES ÉLÈVES DE 1ère STCA

夢