

O conceito de bifurcação



Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

O conceito de bifurcação

A forma do planeta Terra



Étienne Ghys

Unité de Mathématiques Pures et Appliquées

UMR 5669 CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

Matemática

do
Planeta
Terra



Início

Parceiros

Módulos MPT2013

Projetos

Atividades

Eventos

Desafios

Recursos

Sugestões MPT2013

Divulgação

Além Fronteiras

Contactos

Foi durante o Congresso Internacional de Matemática de 2010, na Índia, que Christiane Rousseau (Montreal) lançou o desafio [Matemática do Planeta Terra 2013](#). O ano MPT2013 está a desenvolver atividades que visam mostrar como a matemática desempenha um papel central em questões relacionadas com o Planeta Terra. Veja [aqui](#) as ideias sugeridas pela comissão internacional para o MPT2013.

A [abertura oficial do ano MPT2013](#) decorreu no dia 5 de Março, na sede da UNESCO, em Paris. Em Portugal a cerimónia de abertura decorreu no [Pavilhão do Conhecimento](#), em Lisboa. Durante a cerimónia foi estabelecido contacto com Paris e com S. Tomé e Príncipe.

Missão

Por todo o mundo diversas sociedades, associações, universidades, institutos de investigação e fundações vão dedicar o ano 2013 ao projeto MPT2013. É missão do projecto MPT2013:

- Incentivar a investigação na identificação e na resolução de questões fundamentais sobre o Planeta Terra;
- Incentivar educadores de todos os níveis de ensino para comunicar os problemas relacionados com o planeta Terra;
- Informar o público sobre o papel essencial das ciências matemáticas para enfrentar os desafios do planeta Terra.

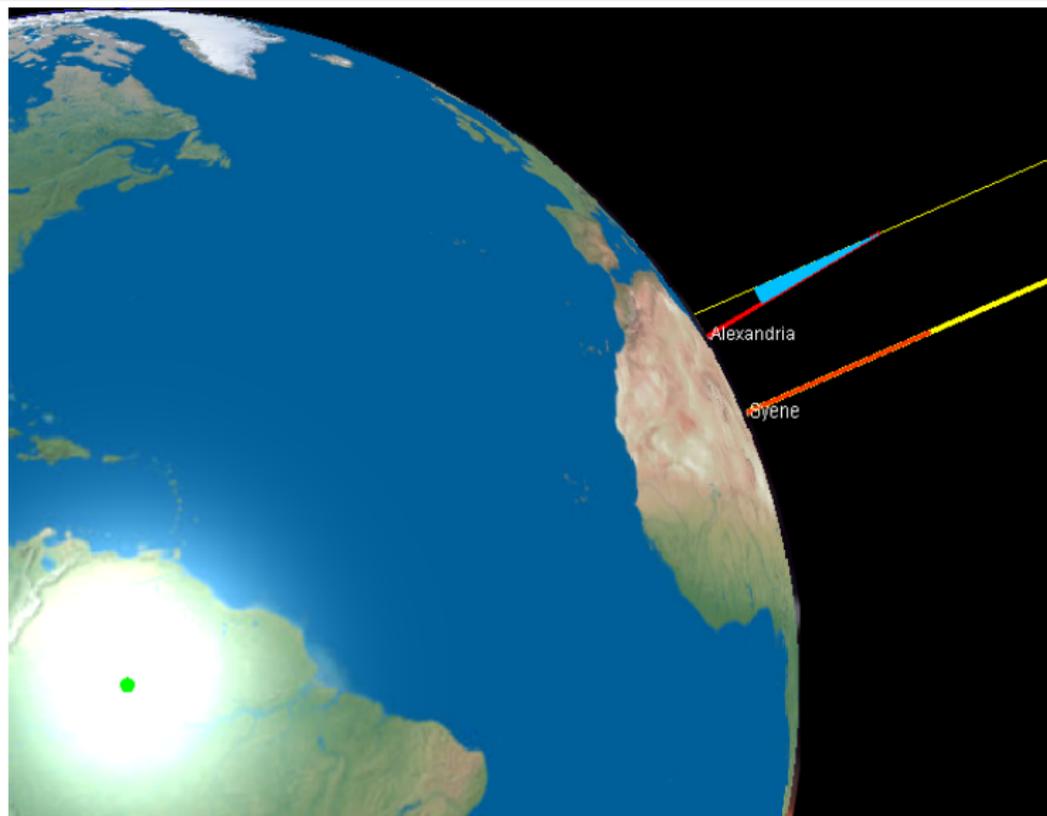
Eppur si muove!

J. Leys

Eratóstenes (276 a.C. – 194 a.C.)

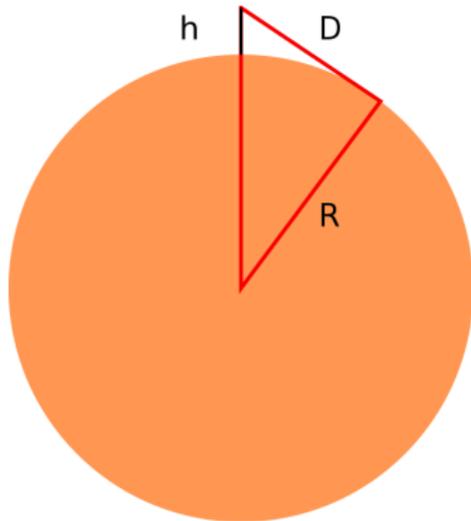


Eratóstenes (276 a.C. – 194 a.C.)



Sacrobosco 1550

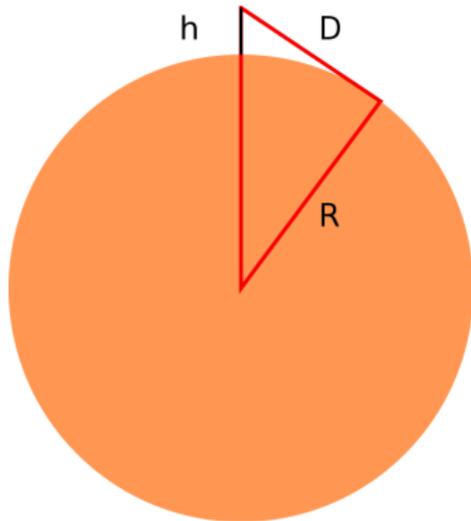




$$D = \sqrt{h(h + 2R)} \simeq \sqrt{2hR}$$

kilómetros

$$D \simeq 113\sqrt{h}$$



$$D = \sqrt{h(h + 2R)} \simeq \sqrt{2hR}$$

kilómetros

$$D \simeq 113\sqrt{h}$$

Isaac Newton (1642-1727) (1689)



Cassini (1701)



Huygens (1690)



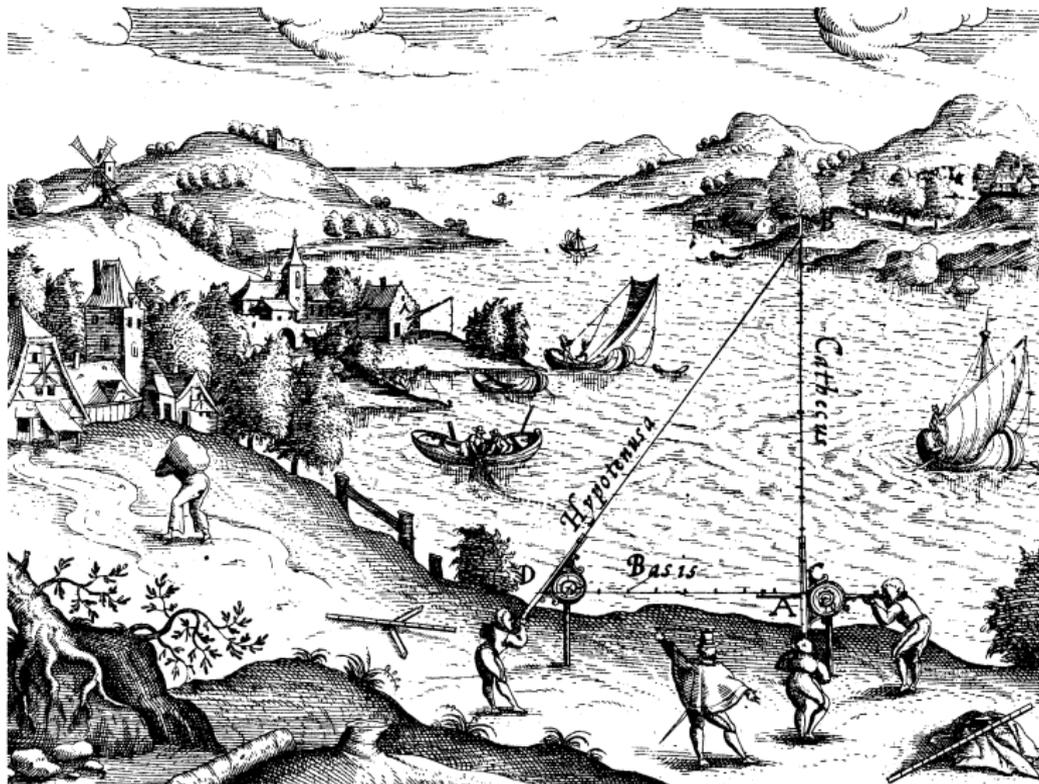
Euler (1740)



Maupertuis (1732)



Triangulação



MacLaurin (1742)



Elipsoide de MacLaurin

J. Leys

Lagrange (1759)



Laplace (1772)



Legendre (1784)



Legendre (1784)



Jacobi (1834)



Elipsoide de Jacobi

J. Leys

Dirichlet (1857)



Dedekind (1860)



Riemann (1860)



Kowaleski (1874)



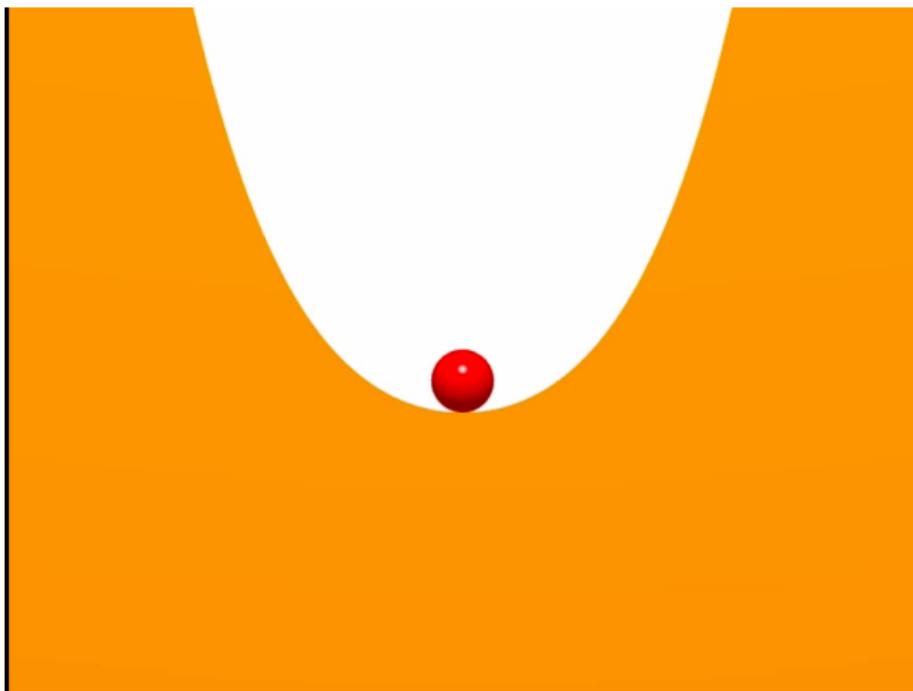
Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation,

Acta Mathematica 7 (1885), 259-380).



Henri Poincaré :
Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation
Revue générale des Sciences, (3), 809-815 (1892).

Os elipsoides de MacLaurin dependem de um parâmetro



J. Leys

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\text{grad } U$$

$$U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Equilíbrio = pontos críticos = $\text{grad } U = 0$.

Se U tem um **mínimo** local em p , equilíbrio **estável**.
($U + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}$)

Se p não é um mínimo de U , equilíbrio instável?

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\text{grad } U$$

$$U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Equilíbrio = pontos críticos = $\text{grad } U = 0$.

Se U tem um **mínimum** local em p , equilíbrio **estável**.
($U + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}$)

Se p não é um **mínimum** de U , equilíbrio **instável**?

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\text{grad } U$$

$$U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Equilíbrio = pontos críticos = $\text{grad } U = 0$.

Se U tem um **mínimum** local em p , equilíbrio **estável**.
($U + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}$)

Se p não é um **mínimum** de U , equilíbrio **instável**?

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\text{grad } U$$

$$U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Equilíbrio = pontos críticos = $\text{grad } U = 0$.

Se U tem um **mínimum** local em p , equilíbrio **estável**.
($U + \frac{1}{2}mv^2 = \text{constante}$)

Se p não é um **mínimum** de U , equilíbrio **instável**?

$$\text{grad } U(p) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}(p) = 0$$

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz simétrica (Hessiana).

O número de autovalores negativos é o **índice de instabilidade**.

Se o índice é 0, o equilíbrio estável.

Se U_ω depende de um parâmetro, o valor ω_0 é um **valor de bifurcação** se a Hessiana tem um autovalor 0.

Quando ω atravessa o valor ω_0 , genericamente, um ponto de equilíbrio ganha ou perde um índice de instabilidade.

$$\text{grad } U(p) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}(p) = 0$$

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz simétrica (Hessiana).

O número de autovalores negativos é o **índice de instabilidade**.

Se o índice é 0, o equilíbrio estável.

Se U_ω depende de um parâmetro, o valor ω_0 é um **valor de bifurcação** se a Hessiana tem um autovalor 0.

Quando ω atravessa o valor ω_0 , genericamente, um ponto de equilíbrio ganha ou perde um índice de instabilidade.

$$\text{grad } U(p) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}(p) = 0$$

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz simétrica (Hessiana).

O número de autovalores negativos é o **índice de instabilidade**.

Se o índice é 0, o equilíbrio estável.

Se U_ω depende de um parâmetro, o valor ω_0 é um **valor de bifurcação** se a Hessiana tem um autovalor 0.

Quando ω atravessa o valor ω_0 , genericamente, um ponto de equilíbrio ganha ou perde um índice de instabilidade.

$$\text{grad } U(p) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x_i}(p) = 0$$

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ é uma matriz simétrica (Hessiana).

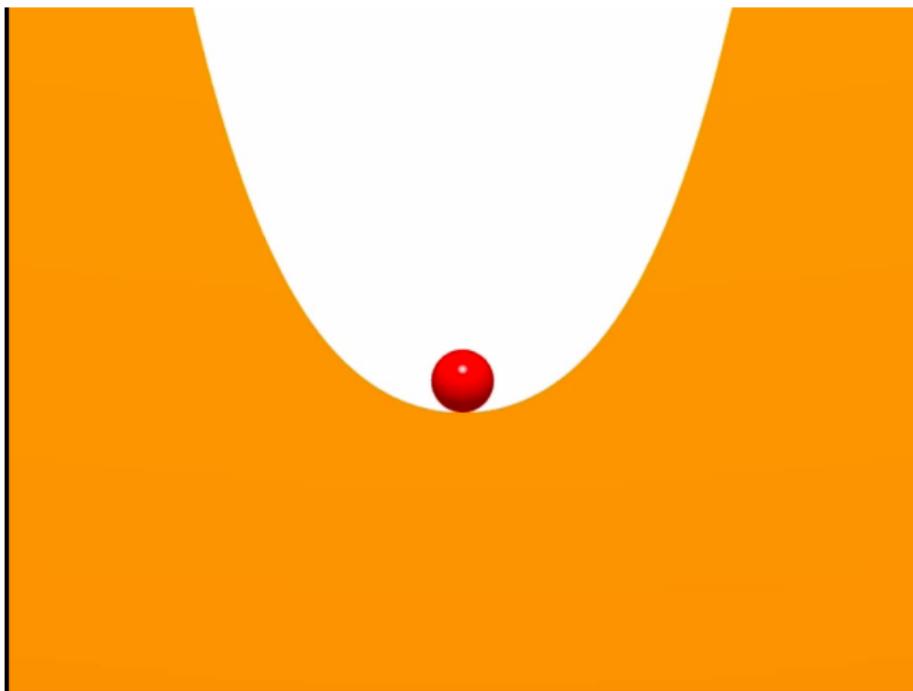
O número de autovalores negativos é o **índice de instabilidade**.

Se o índice é 0, o equilíbrio estável.

Se U_ω depende de um parâmetro, o valor ω_0 é um **valor de bifurcação** se a Hessiana tem um autovalor 0.

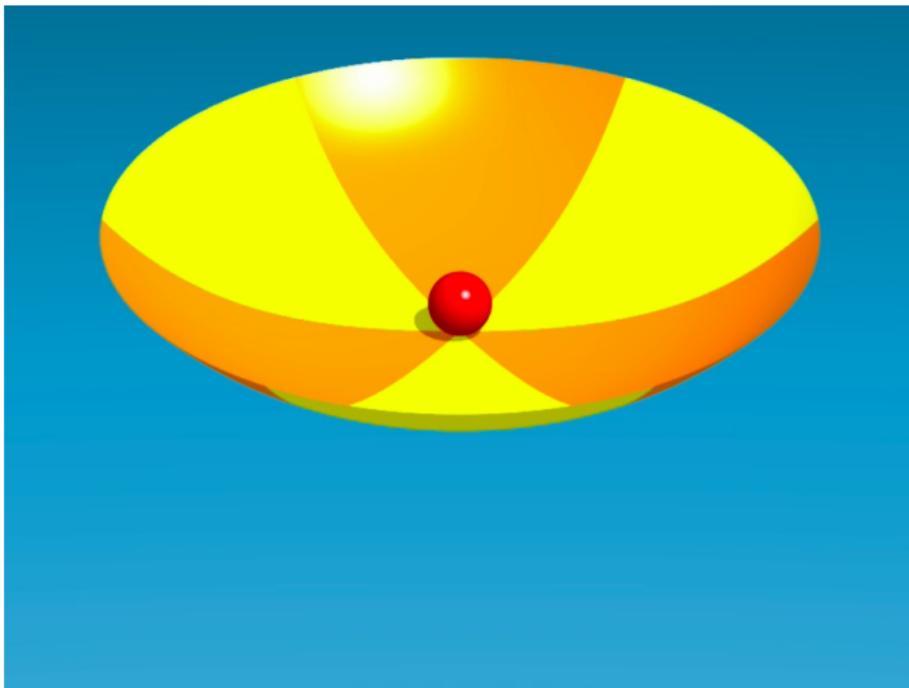
Quando ω atravessa o valor ω_0 , genericamente, um ponto de equilíbrio ganha ou perde um índice de instabilidade.

J. Leys



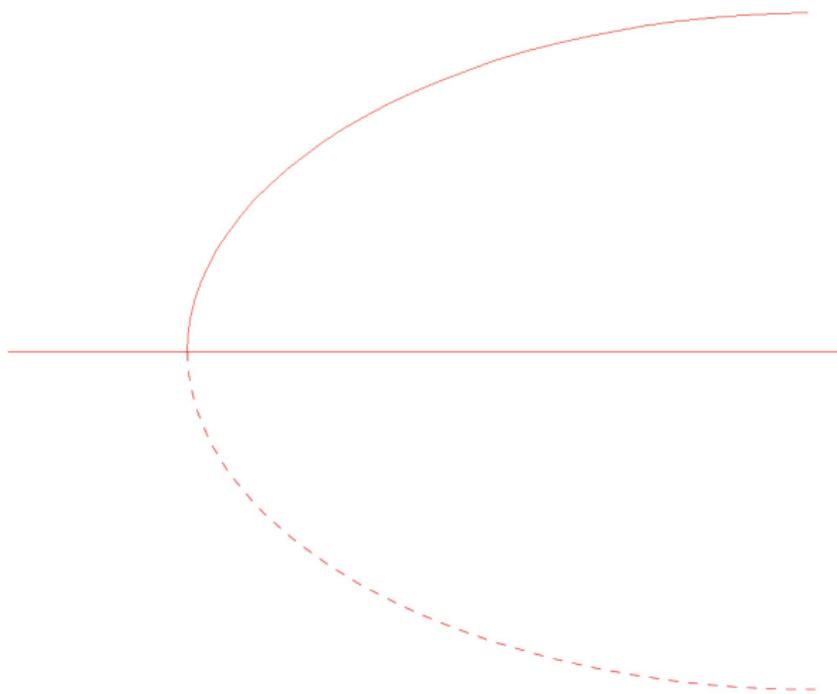
J. Leys

J. Leys

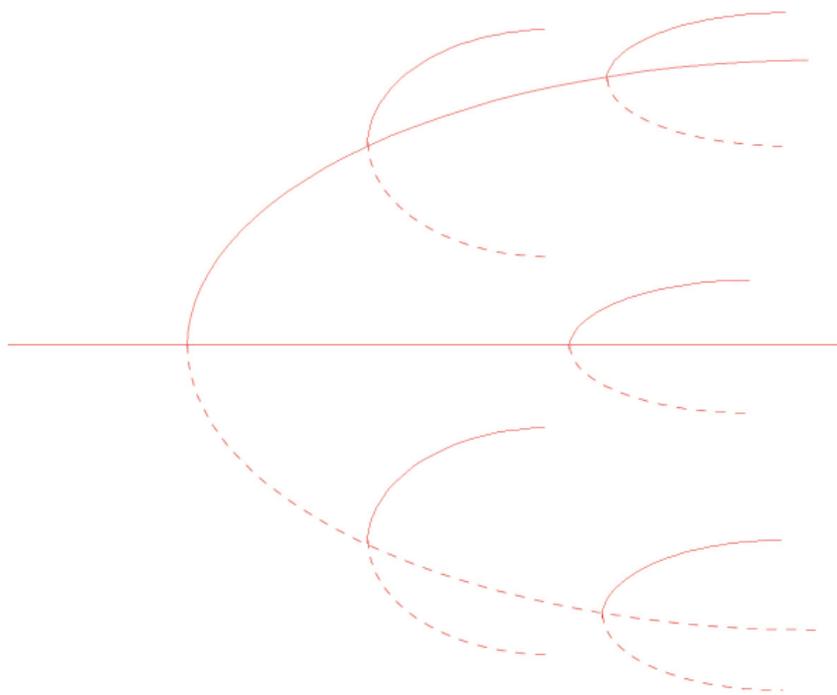


O sombrero mexicano

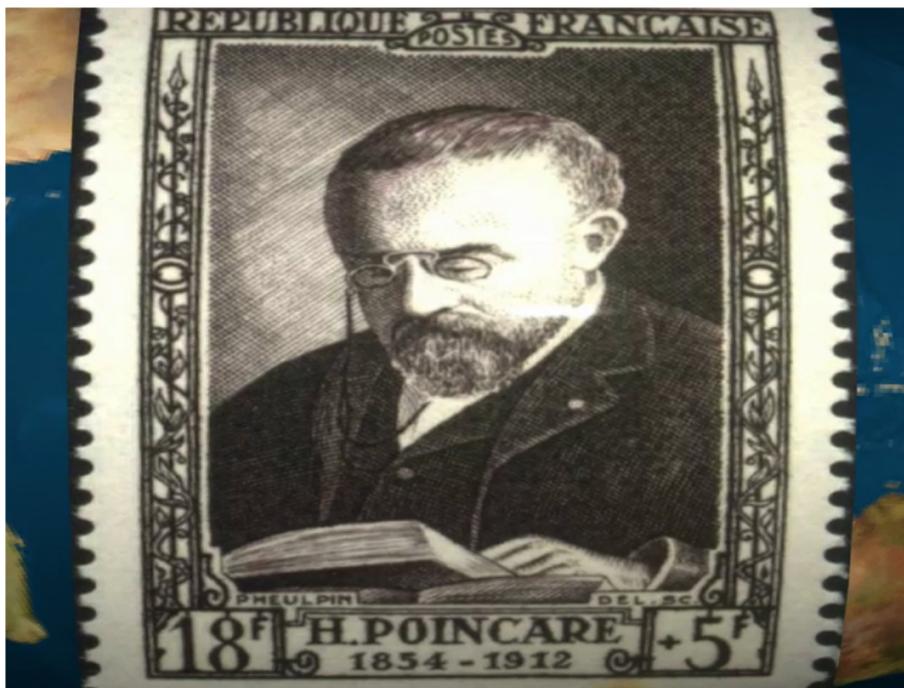
J. Leys



J. Leys



MacLaurin Jacobi Poincaré : A pêra de Poincaré



\mathcal{F} = o espaço de todas as formas possíveis da Terra.

U_ω = energia total (gravitacional + cinética) da Terra, girando com velocidade angular ω .

Procuramos pontos críticos da função U_ω definida no espaço \mathcal{F} (de dimensão infinita)

As soluções dependem de ω e “bifurcam” quando a hessiana tem um autovalor 0.

A função U tem simetrias : invariante por rotações.

\mathcal{F} = o espaço de todas as formas possíveis da Terra.

U_ω = energia total (gravitacional + cinética) da Terra, girando com velocidade angular ω .

Procuramos pontos críticos da função U_ω definida no espaço \mathcal{F} (de dimensão infinita)

As soluções dependem de ω e “bifurcam” quando a hessiana tem um autovalor 0.

A função U tem simetrias : invariante por rotações.

\mathcal{F} = o espaço de todas as formas possíveis da Terra.

U_ω = energia total (gravitacional + cinética) da Terra, girando com velocidade angular ω .

Procuramos pontos críticos da função U_ω definida no espaço \mathcal{F} (de dimensão infinita)

As soluções dependem de ω e “bifurcam” quando a hessiana tem um autovalor 0.

A função U tem simetrias : invariante por rotações.

\mathcal{F} = o espaço de todas as formas possíveis da Terra.

U_ω = energia total (gravitacional + cinética) da Terra, girando com velocidade angular ω .

Procuramos pontos críticos da função U_ω definida no espaço \mathcal{F} (de dimensão infinita)

As soluções dependem de ω e “bifurcam” quando a hessiana tem um autovalor 0.

A função U tem simetrias : invariante por rotações.

Dado um elipsoide e Jacobi, girando com uma certa velocidade, temos que calcular a hessiana da função energia no espaço \mathcal{F} das formas possíveis.

Para descrever uma forma próxima de um elipsoide, basta conhecer a altura com respeito ao elipsoide.

Portanto, temos que desenvolver uma análise harmônica das funções definidas num elipsoide.

As **funções de Lamé** são análogas as harmônicas esféricas.

Dado um elipsoide e Jacobi, girando com uma certa velocidade, temos que calcular a hessiana da função energia no espaço \mathcal{F} das formas possíveis.

Para descrever uma forma próxima de um elipsoide, basta conhecer a altura com respeito ao elipsoide.

Portanto, temos que desenvolver uma análise harmônica das funções definidas num elipsoide.

As **funções de Lamé** são análogas as harmônicas esféricas.

Dado um elipsoide e Jacobi, girando com uma certa velocidade, temos que calcular a hessiana da função energia no espaço \mathcal{F} das formas possíveis.

Para descrever uma forma próxima de um elipsoide, basta conhecer a altura com respeito ao elipsoide.

Portanto, temos que desenvolver uma análise harmônica das funções definidas num elipsoide.

As **funções de Lamé** são análogas as harmônicas esféricas.

Dado um elipsoide e Jacobi, girando com uma certa velocidade, temos que calcular a hessiana da função energia no espaço \mathcal{F} das formas possíveis.

Para descrever uma forma próxima de um elipsoide, basta conhecer a altura com respeito ao elipsoide.

Portanto, temos que desenvolver uma análise harmônica das funções definidas num elipsoide.

As **funções de Lamé** são análogas as harmônicas esféricas.

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

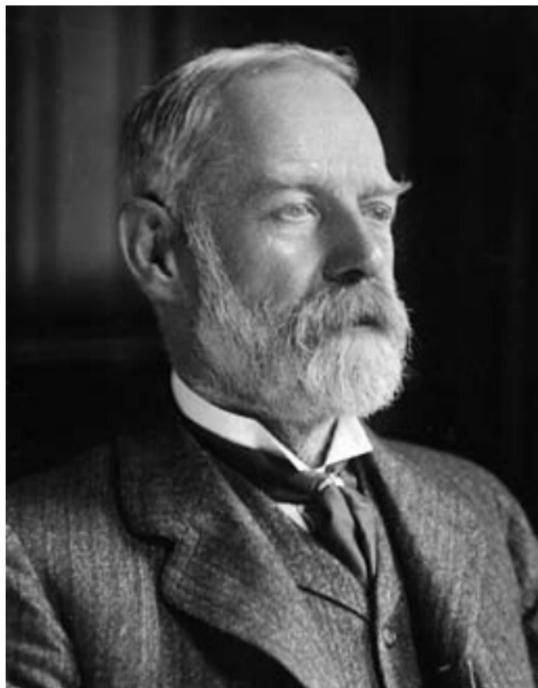
- $\lambda < a$: elipsoide
- $a < \lambda < b$: hiperboloide uma folha
- $b < \lambda < c$: hiperboloide de duas folhas
- $c < \lambda$: vazio

Quádricas homofocais e funções de Lamé

J. Leys



Em seguida ? Pêra estável ? Darwin 1906



Em seguida ? Pêra estável ? Jeans 1917



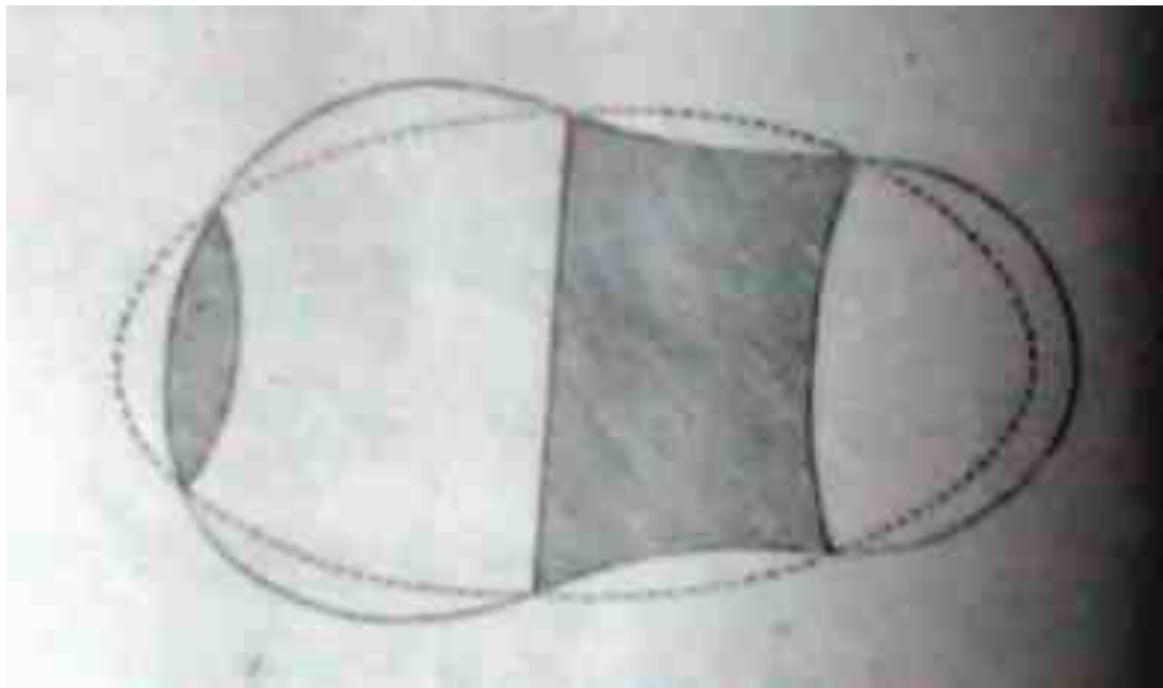
Em seguida? Cartan 1924



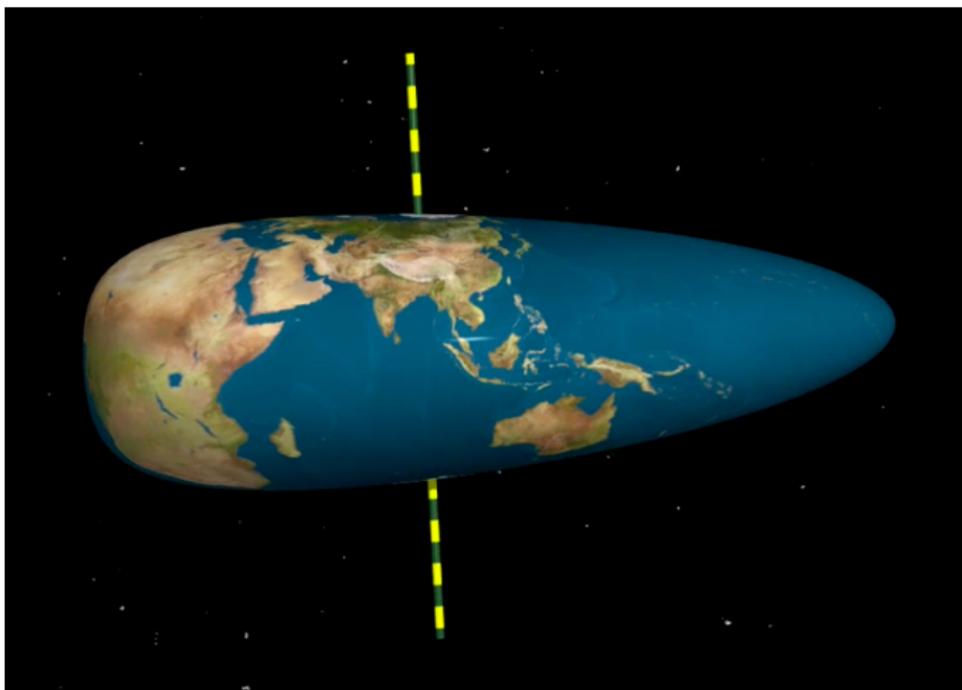
Em seguida ? Chandrasekhar 1960



Satélite ?



Satélite ?



“The grand mental panorama that was thus created was so intoxicating that those following Poincaré were not to recover from its pursuit”.

“And at this point the subject quietly went to a coma”.
(Chandrasekhar)



René Thom (1923-2002)



Genericamente, se um sistema depende de menos de 4 parâmetros, somente tem sete tipos de bifurcações podem acontecer :

- A dobra
- Um cusp
- Uma andorinha
- uma borboleta
- Umbigo elíptico (?)
- Umbigo hiperbólico (?)
- Umbigo parabolico (?)

Sete catástrofes!

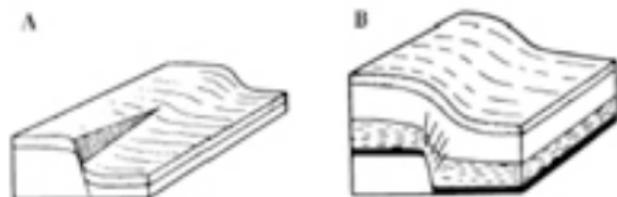
- $x^3 + ux$
- $x^4 + ux^2 + vx$
- $x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$
- $x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$
- $x^3/3 - xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy$
- $x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$
- $x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$



Cliché 5

La fronce (catastrophe de Riemann-Hugoniot) en géologie : naissance d'une faille (voir figure 5-3).

D'après E. Scherbon Hills, *Elements of Structural Geology*, Methuen, London, 1963.



Cliché 5

Cliché 25

Nébuleuse plus ancienne en déferlement équatorial : NGC 4594.

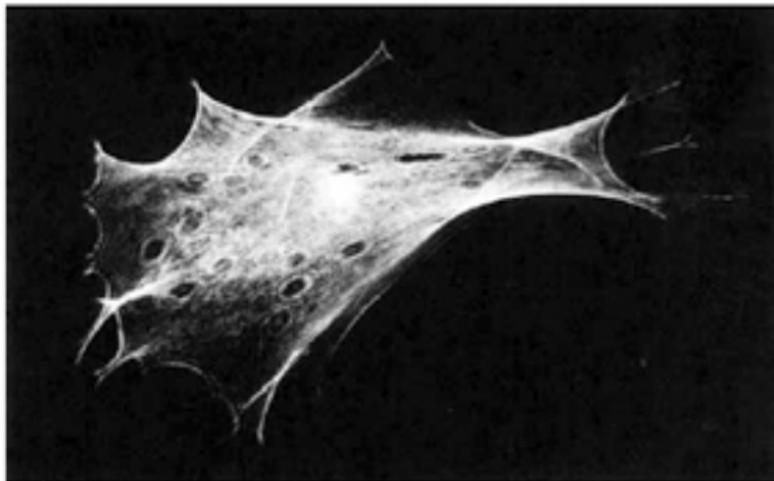
D'après S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York, 1960.



Cliché 25

Cliché 6, [1968]

La queue d'aronde en optique géométrique. La singularité ponctuelle ébauchée en C1 se déploie en C2 (voir figure 5-7).



Cliché 6a

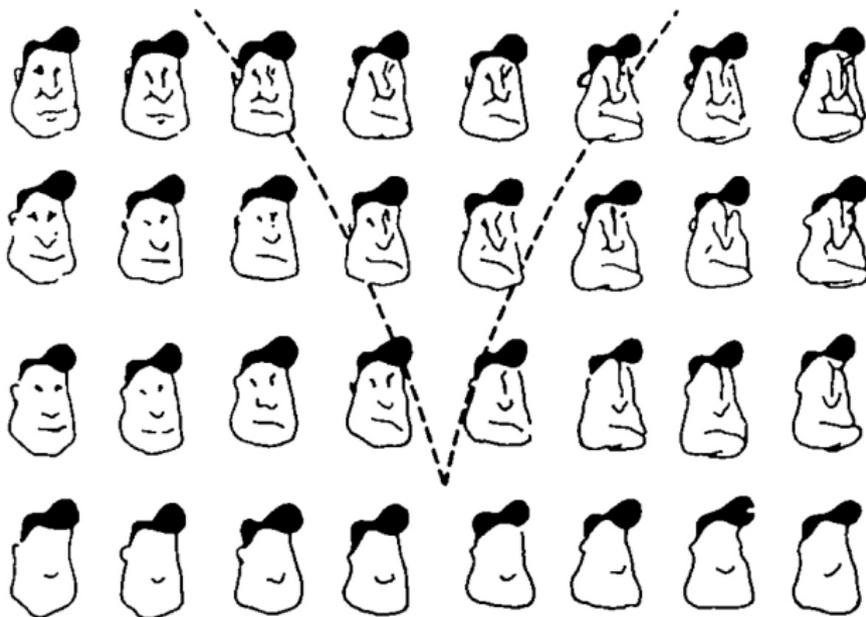
Cliché 29 [1975]

The hyperbolic umbilic in hydrodynamics : a wave breaking.



Cliché 29





Teorema (Poincaré) : $\omega \leq \sqrt{2\pi G\rho}$

Pergunta : Qual é o ω_{max} ?

Teorema (Poincaré) : $\omega \leq \sqrt{2\pi G\rho}$

Pergunta : Qual é o ω_{max} ?

Teorema (Lichtenstein) : Qualquer objeto liquido girando no espaço em equilíbrio gravitacional tem que ser simétrico com respeito a algum plano equatorial.

Pergunta : Todos os exemplos conhecidos tem também um outro plano de simetria contendo o eixo de rotação. É um fato geral ?

Teorema (Lichtenstein) : Qualquer objeto liquido girando no espaço em equilíbrio gravitacional tem que ser simétrico com respeito a algum plano equatorial.

Pergunta : Todos os exemplos conhecidos tem também um outro plano de simetria contendo o eixo de rotação. É um fato geral ?

Teorema (Marchal) : Se o diâmetro do objeto $\leq \omega^{-2/3}(GM)^{1/3}$ então tem que ter simetria de revolução.

Pergunta : Melhorar! Nota que os elipsoides de Jacobi têm diâmetro $\geq 1.568\omega^{-2/3}(GM)^{1/3}$.

Teorema (Marchal) : Se o diâmetro do objeto $\leq \omega^{-2/3}(GM)^{1/3}$ então tem que ter simetria de revolução.

Pergunta : Melhorar ! Nota que os elipsoides de Jacobi têm diâmetro $\geq 1.568\omega^{-2/3}(GM)^{1/3}$.

Pergunta : Existem mais equilíbrios ?

Pergunta : Têm que ser convexos ?

Pergunta : Existem soluções estáveis que não são elipsoides ?

Pergunta : Qual é a dinâmica ? Qualquer forma converge até algum equilíbrio ?

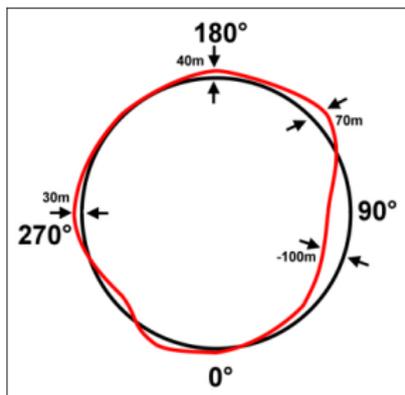
A forma da Terra

Geoide : A superfície equipotencial que, em média, coincide com o valor médio do nível médio das águas do mar.

Elipsoide de referência : elipsoide que aproxima do geoide.

Coordenadas de pontos, latitude, longitude e altitude.

Eixo equatorial : 6 378, 137 km Eixo polar : 6 356, 752 km



A forma da Terra

Geoide : A superfície equipotencial que, em média, coincide com o valor médio do nível médio das águas do mar.

Elipsoide de referência : elipsoide que aproxima do geoide.

Coordenadas de pontos, latitude, longitude e altitude.

Eixo equatorial : 6 378, 137 km Eixo polar : 6 356, 752 km

