

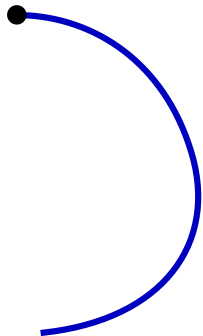
COURBES OSCULATRICES

ÉTIENNE GHYS

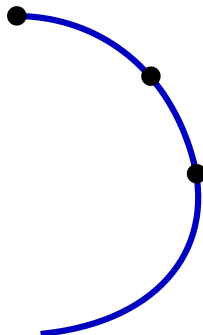
CNRS – ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

ENS, PARIS, OCTOBRE 2007

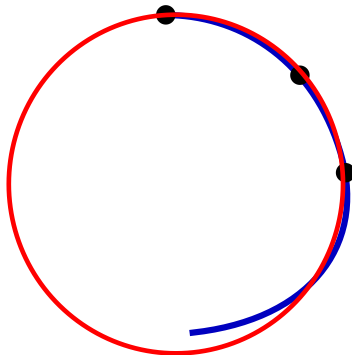
Cercle osculateur



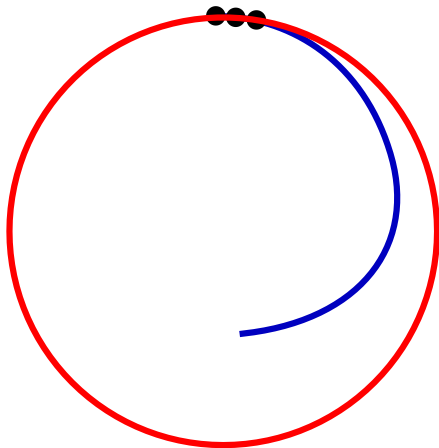
Cercle osculateur



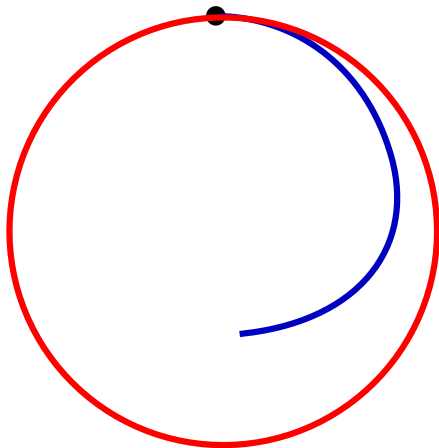
Cercle osculateur



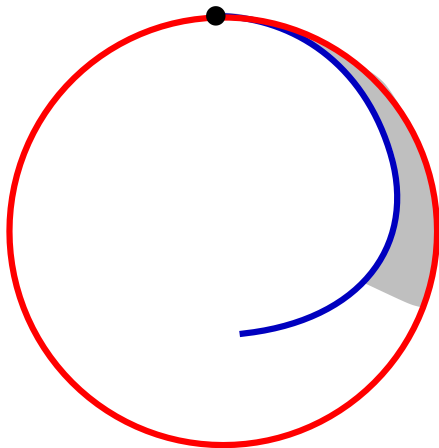
Cercle osculateur



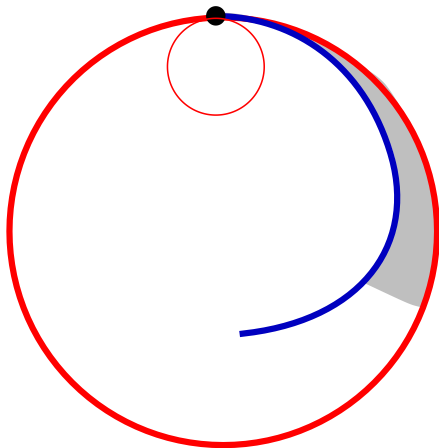
Cercle osculateur



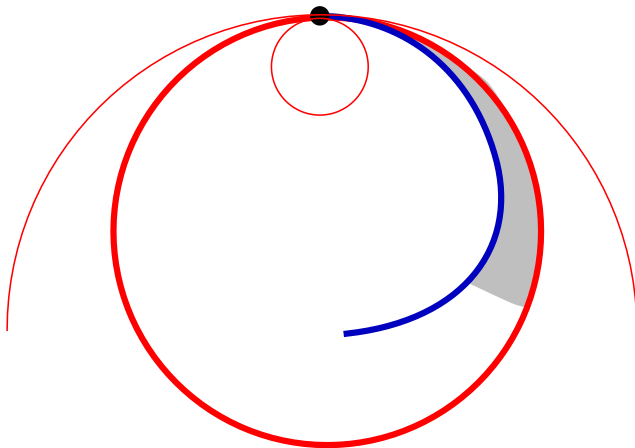
Cercle osculateur



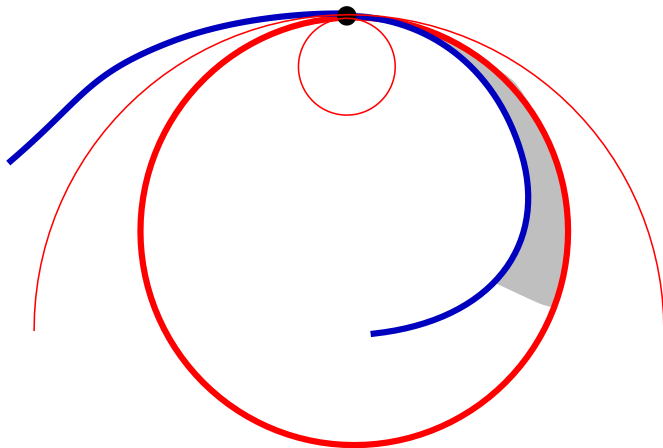
Cercle osculateur



Cercle osculateur



Cercle osculateur



CXVIII.

NOTE ON THE CIRCLES OF CURVATURE OF A PLANE
CURVE.

[*Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, December 13, 1895.*]

WHEN the curvature of a plane curve continuously increases or diminishes (as is the case with a logarithmic spiral for instance) no two of the circles of curvature can intersect one another.

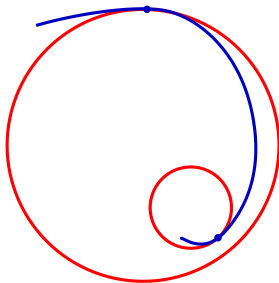
This curious remark occurred to me some time ago in connection with an accidental feature of a totally different question. (*Systems of Plane Curves whose Orthogonals form a similar System. Anté, No. CXVII.*)

The proof is excessively simple. For if A, B , be any two points of the evolute, the chord AB is the distance between the centres of two of the circles, and is necessarily less than the arc AB , the difference of their radii. (This is true even if the evolute be sinuous, so that the original curve has ramphoid cusps.)

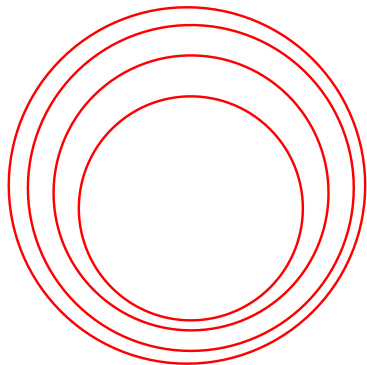
When the curve has points of maximum or minimum curvature, there are corresponding [keratoid] cusps on the evolute; and pairs of circles of curvature whose centres lie on opposite sides of the cusp, C , may intersect:—for the chord AB may now exceed the difference between CA and CB .

Théorème

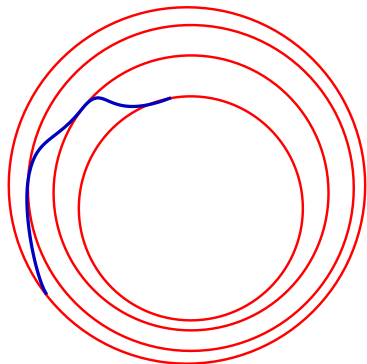
Si la courbure est monotone le long d'une courbe, les cercles osculateurs sont disjoints deux à deux.



Le théorème de Tait–Kneser n'est pas vrai !

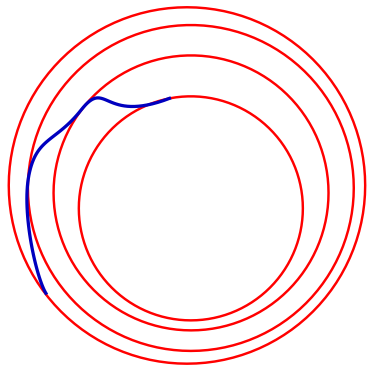


Le théorème de Tait–Kneser n'est pas vrai !



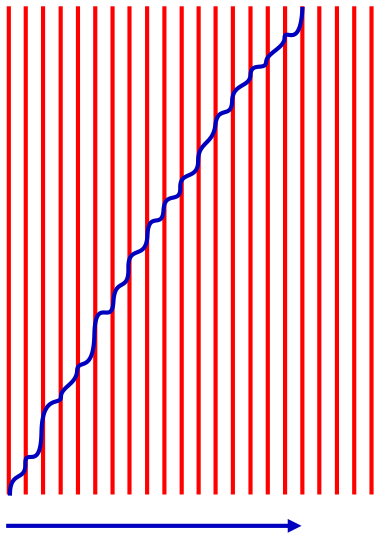
Une courbe ne peut être
tangente
à un feuilletage
sans être contenue dans une
feuille.

Le théorème de Tait–Kneser n'est pas vrai !



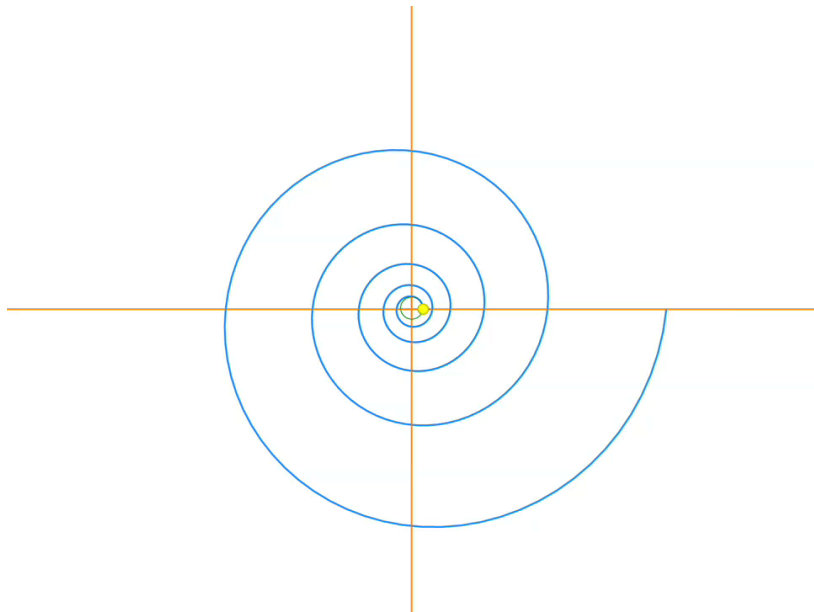
Une courbe ne peut être
tangente
à un feuilletage
sans être contenue dans une
feuille.

Le théorème de Tait–Kneser n'est pas vrai !



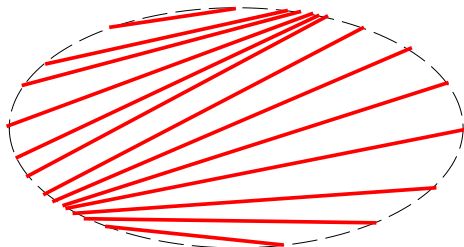
Une courbe ne peut être
tangente
à un feuilletage
sans être contenue dans une
feuille.

Le feuilletage n'est pas régulier !

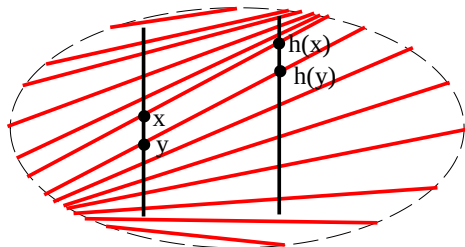


Le feuilletage n'est pas régulier !

Régularité faible des feuilletages

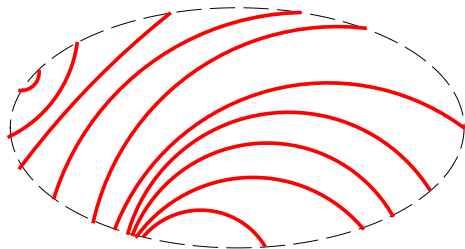


Régularité faible des feuilletages



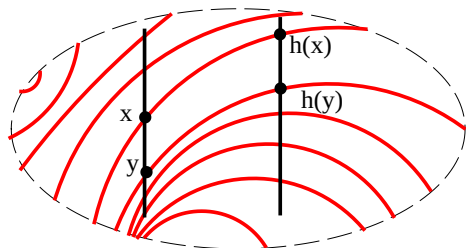
$\{ \text{Feuilles} \subset \text{Droites} \} \implies$
Le feuilletage est Lipschitz.

Régularité faible des feuilletages



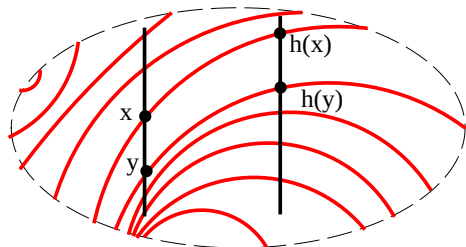
■ $\{ \text{Feuilles} \subset \text{cercles} \} \Rightarrow$

Régularité faible des feuilletages



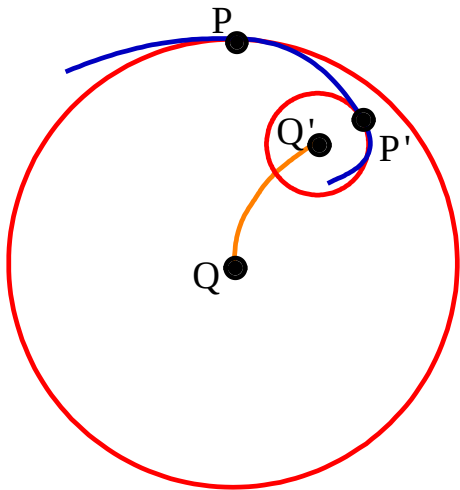
■ $\{ \text{Feuilles} \subset \text{cercles} \} \Rightarrow$

Régularité faible des feuilletages



■ $\{ \text{Feuilles} \subset \text{cercles} \} \implies$
RIEN ! (Zeghib)

Preuve du théorème de Tait–Kneser

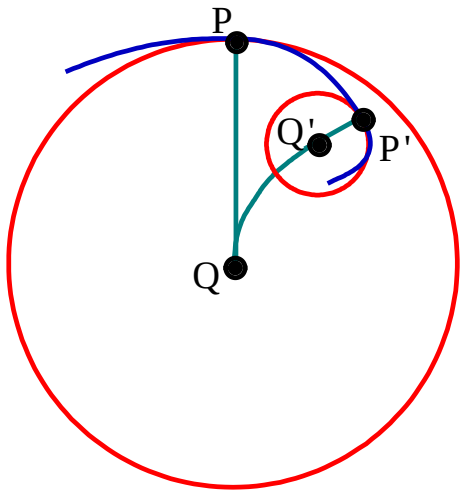


$\overline{QP}$

$$= \widehat{QQ'} + \overline{Q'P'}$$

$$\geq \overline{QQ'} + \overline{Q'P'} \quad \square$$

Preuve du théorème de Tait–Kneser

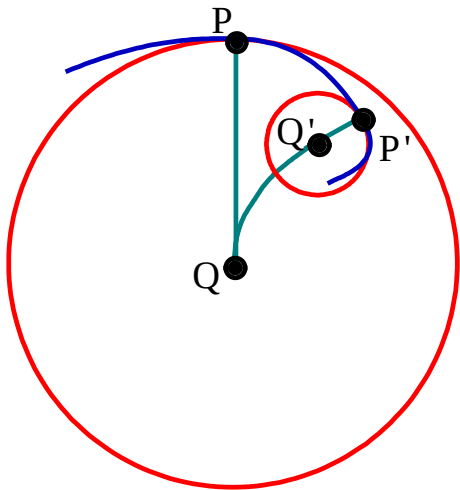


$\overline{QP}$

$$= \widehat{QQ'} + \overline{Q'P'}$$

$$\geq \overline{QQ'} + \overline{Q'P'} \quad \square$$

Preuve du théorème de Tait–Kneser



$$\overline{QP}$$

$$= \widehat{QQ'} + \overline{Q'P'}$$

$$\geq \overline{QQ'} + \overline{Q'P'}$$



- Les transformations de Möbius de la sphère de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) préservent les cercles et l'ordre de contact entre courbes.
- Donc, les transformations de Möbius transforment cercles osculateurs en cercles osculateurs.
- Le module de l'anneau défini par deux cercles osculateurs est un invariant conforme.
- L'anneau infinitésimal entre s et $s + ds$ a un module $\sqrt{\frac{dk}{ds}} ds$.
- $\Rightarrow$ une démonstration simple du **théorème des quatre sommets**.

- Les transformations de Möbius de la sphère de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) préservent les cercles et l'ordre de contact entre courbes.
- Donc, les transformations de Möbius transforment cercles osculateurs en cercles osculateurs.
- Le module de l'anneau défini par deux cercles osculateurs est un invariant conforme.
- L'anneau infinitésimal entre s et $s + ds$ a un module $\sqrt{\frac{dk}{ds}} ds$.
- $\Rightarrow$ une démonstration simple du théorème des quatre sommets.

- Les transformations de Möbius de la sphère de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) préservent les cercles et l'ordre de contact entre courbes.
- Donc, les transformations de Möbius transforment cercles osculateurs en cercles osculateurs.
- Le module de l'anneau défini par deux cercles osculateurs est un invariant conforme.
- L'anneau infinitésimal entre s et $s + ds$ a un module $\sqrt{\frac{dk}{ds}} ds$.
- $\Rightarrow$ une démonstration simple du théorème des quatre sommets.

- Les transformations de Möbius de la sphère de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) préservent les cercles et l'ordre de contact entre courbes.
- Donc, les transformations de Möbius transforment cercles osculateurs en cercles osculateurs.
- Le module de l'anneau défini par deux cercles osculateurs est un invariant conforme.
- L'anneau infinitésimal entre s et $s + ds$ a un module $\sqrt{\frac{dk}{ds}} ds$.
- $\Rightarrow$ une démonstration simple du théorème des quatre sommets.

- Les transformations de Möbius de la sphère de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) préservent les cercles et l'ordre de contact entre courbes.
- Donc, les transformations de Möbius transforment cercles osculateurs en cercles osculateurs.
- Le module de l'anneau défini par deux cercles osculateurs est un invariant conforme.
- L'anneau infinitésimal entre s et $s + ds$ a un module $\sqrt{\frac{dk}{ds}} ds$.
- $\Rightarrow$ une démonstration simple du théorème des quatre sommets.

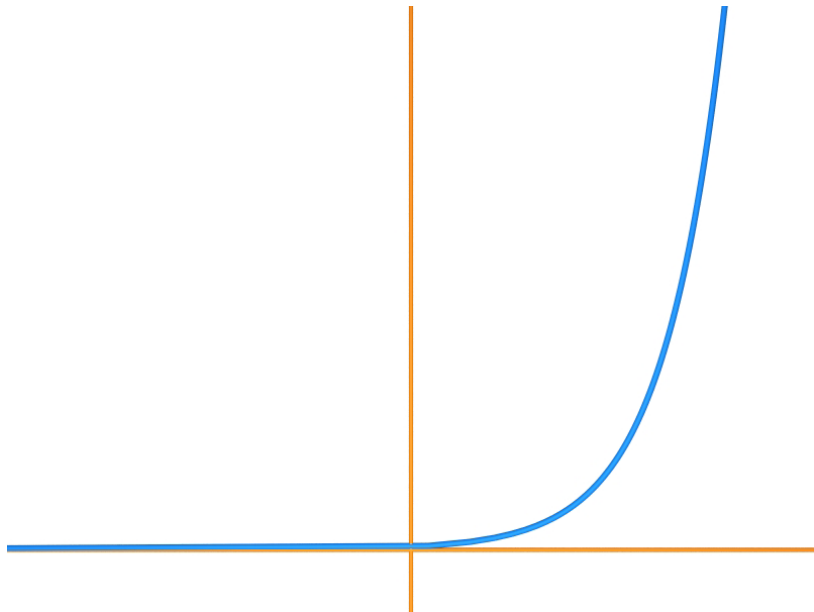
■ $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$

■ $T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2}f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$

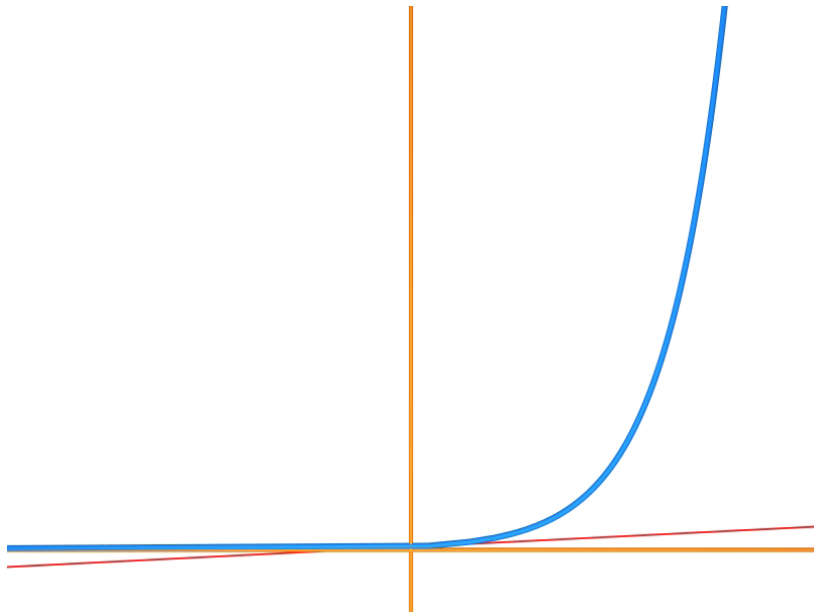
■ $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$

■ $T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2}f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$

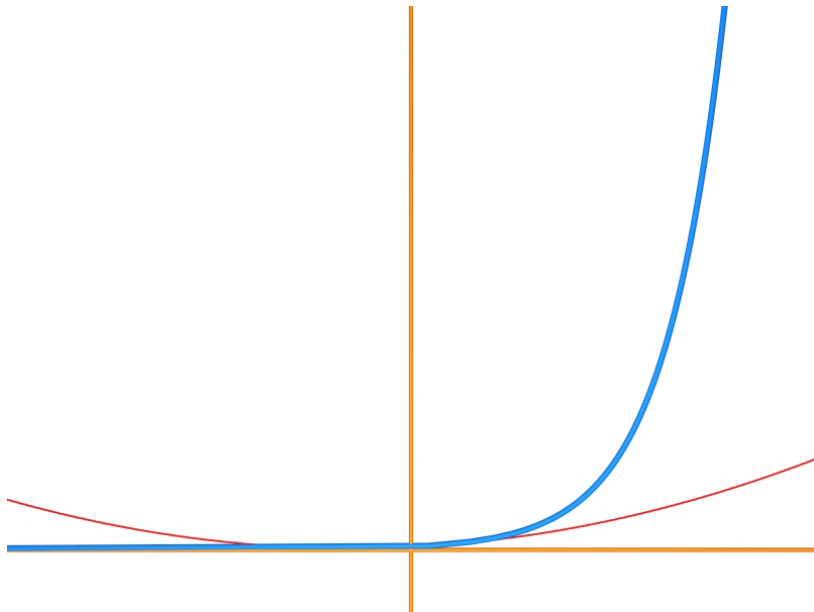
Polynômes de Taylor



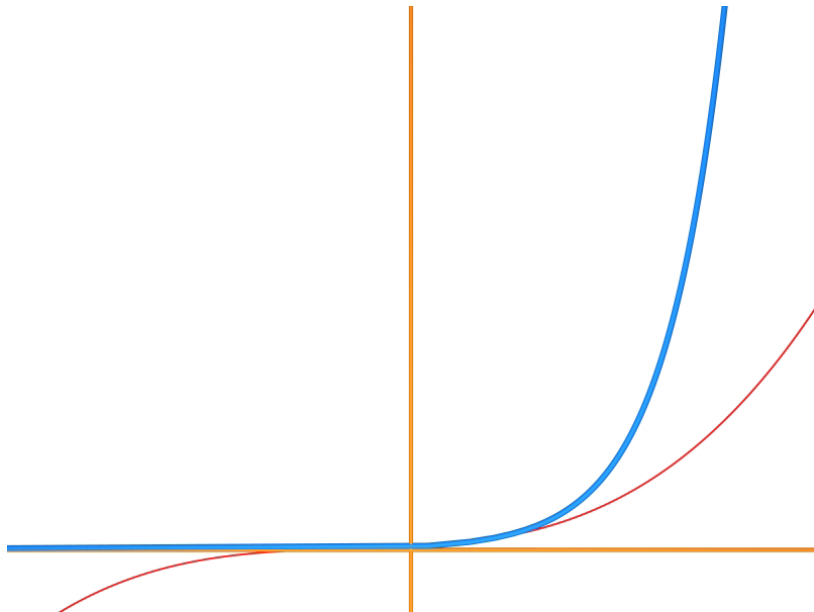
Polynômes de Taylor



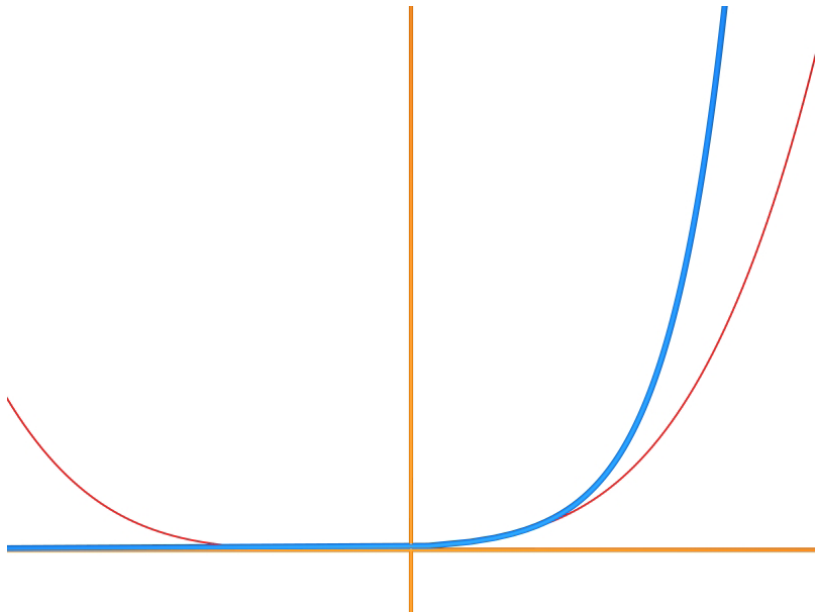
Polynômes de Taylor



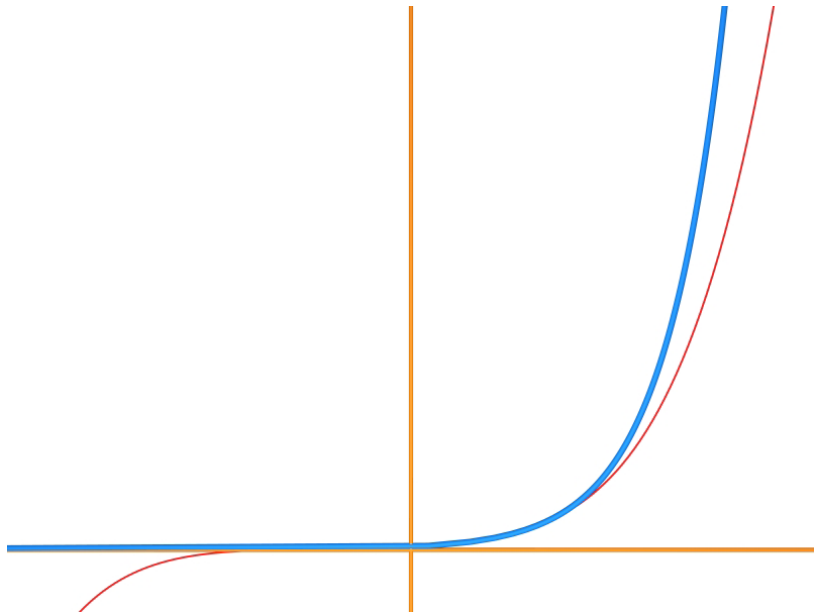
Polynômes de Taylor



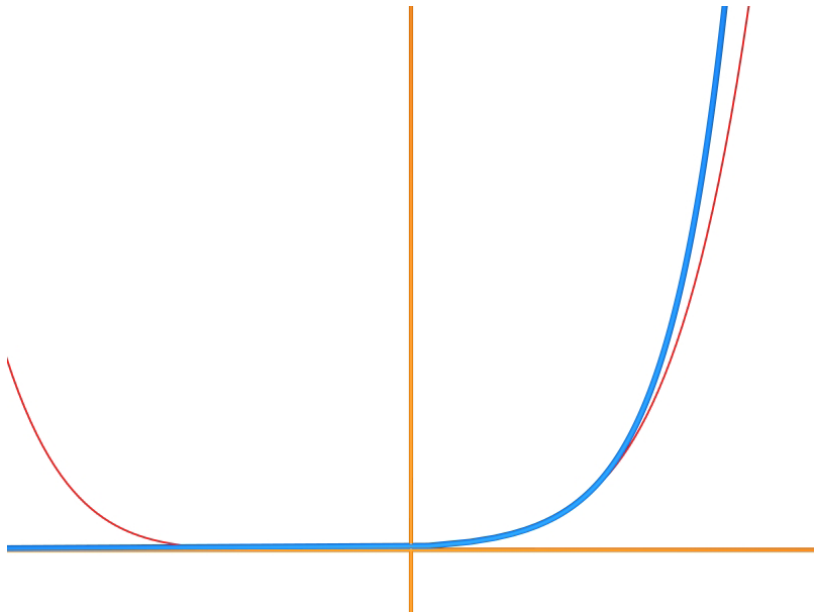
Polynômes de Taylor



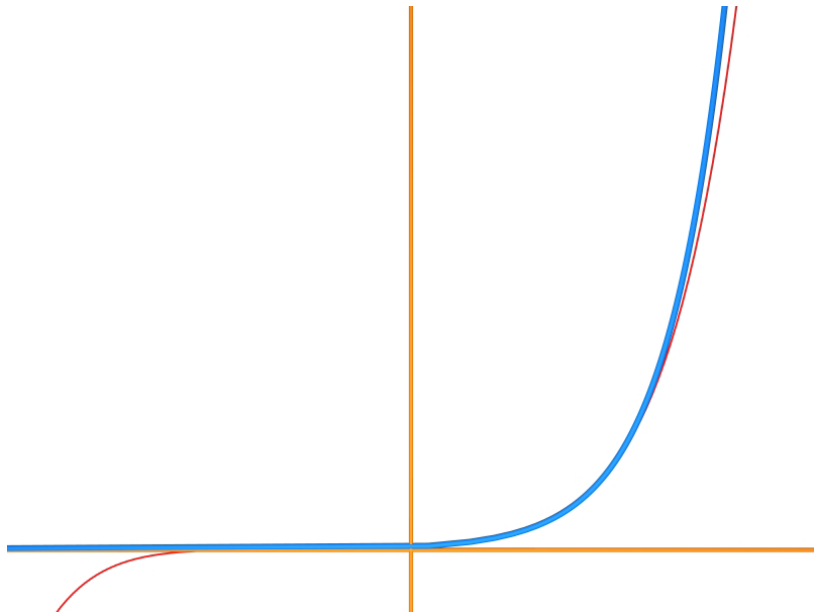
Polynômes de Taylor



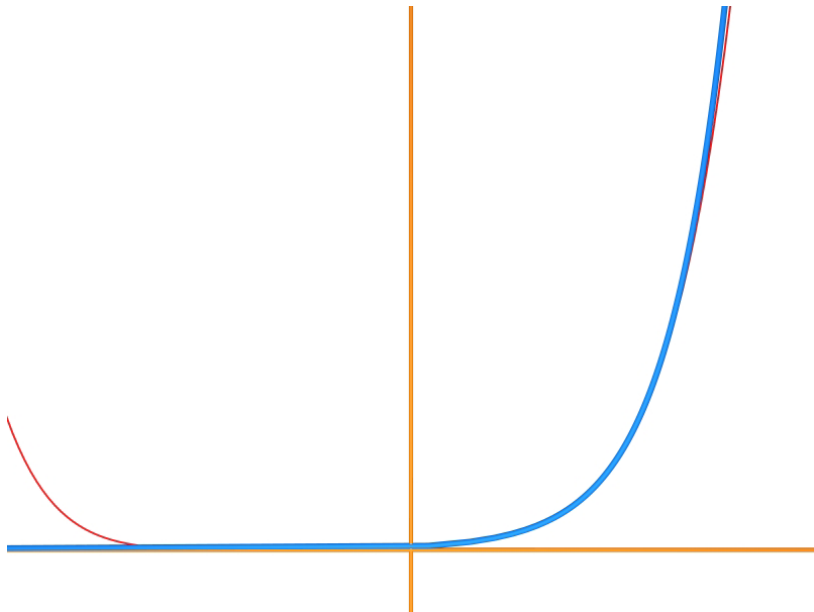
Polynômes de Taylor



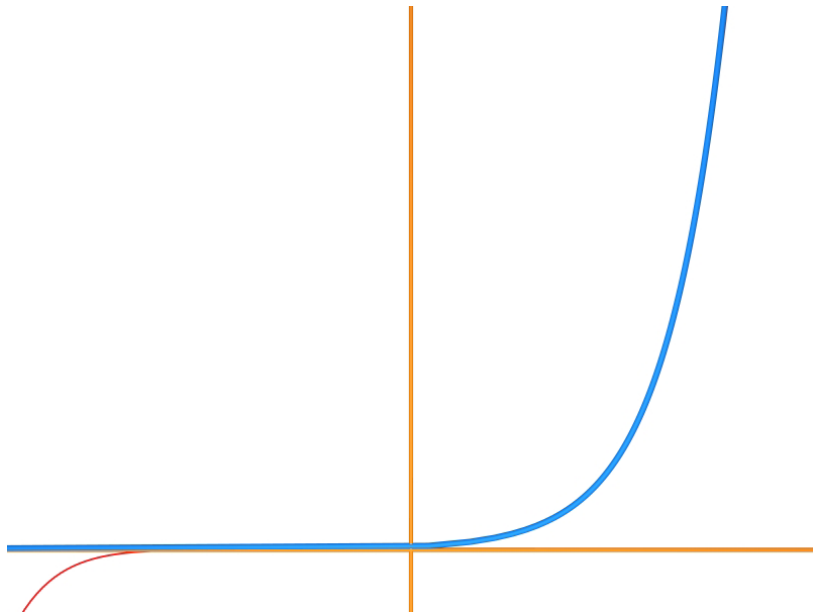
Polynômes de Taylor



Polynômes de Taylor



Polynômes de Taylor



Théorème

Si $f^{(2k+1)}$ ne s'annule pas dans l'intervalle $[a, b]$, les graphes des polynômes de Taylor $T_{f,t}^{2k}$ ($t \in [a, b]$) ne se rencontrent pas.

Exemple

$$t \in [a, b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2}f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k} dt > 0 \quad \square$$

$$t \in [a, b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2}f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k} dt > 0 \quad \square$$

$$t \in [a, b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2}f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k} dt > 0 \quad \square$$

$$t \in [a, b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2}f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X - t)^{2k} dt > 0 \quad \square$$

Équations différentielles d'ordre impair

■ $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$

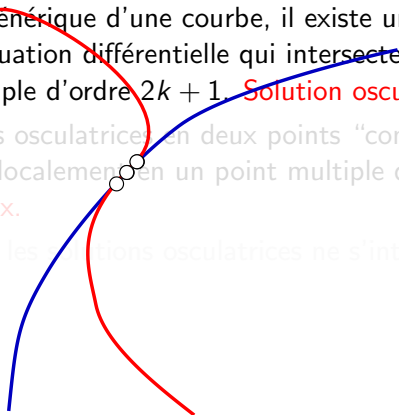
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. **Solution osculatrice.**
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$. **Points spéciaux.**
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.

Équations différentielles d'ordre impair

- $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. Solution osculatrice.
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$.
Points spéciaux.
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.

Équations différentielles d'ordre impair

- $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. **Solution osculatrice.**
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$. **Points spéciaux.**
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.

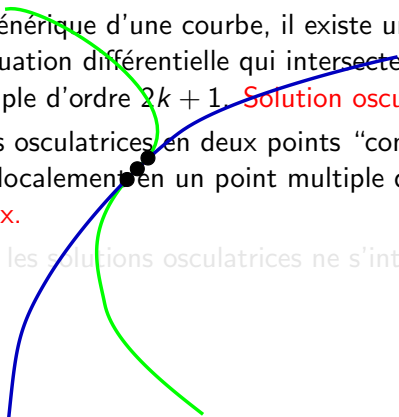


Équations différentielles d'ordre impair

- $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. **Solution osculatrice.**
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$. **Points spéciaux.**
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.

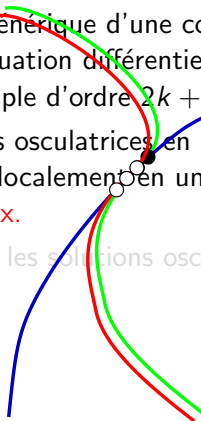
Équations différentielles d'ordre impair

- $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. **Solution osculatrice.**
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$. **Points spéciaux.**
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.



Équations différentielles d'ordre impair

- $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. **Solution osculatrice.**
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$. **Points spéciaux.**
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.

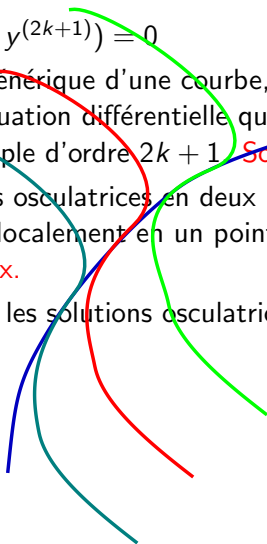


Équations différentielles d'ordre impair

- $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. **Solution osculatrice.**
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$. **Points spéciaux.**
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.

Équations différentielles d'ordre impair

- $F(x, y, y', \dots, y^{(2k+1)}) = 0$
- En un point générique d'une courbe, il existe une solution unique de l'équation différentielle qui intersecte la courbe en un point multiple d'ordre $2k + 1$. **Solution osculatrice.**
- Deux solutions osculatrices en deux points "consécutifs" s'intersectent localement en un point multiple d'ordre $2k$. **Points spéciaux.**
- En particulier, les solutions osculatrices ne s'intersectent pas localement.



Exemples

- $y^{(2k+1)} = 0$

- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$

- $y' = 1 + (y'')^2$

■ $y^{(2k+1)} = 0$

Polynômes de degré $2k$.

■ $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$

■ $\frac{y''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0$

- $y^{(2k+1)} = 0$

Polynômes de degré $2k$.

- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$

- $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0$

Exemples

■ $y^{(2k+1)} = 0$

Polynômes de degré $2k$.

■ $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$

Cercles.

■ $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0$

Exemples

- $y^{(2k+1)} = 0$

Polynômes de degré $2k$.

- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$

Cercles.

- $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0$

■ $y^{(2k+1)} = 0$

Polynômes de degré $2k$.

■ $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$

Cercles.

■ $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 = 0$

Dérivée Schwarzienne, $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Quatre sommets pour les difféomorphismes du cercle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{RP}^1$ un difféomorphisme local. Supposons que la dérivée schwarzienne de f ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, on considère l'application de Möbius m_x qui “osculé” f au point x à l'ordre 3. Alors, les graphes des m_x dans $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ sont disjoints deux à deux.

Pour tout difféomorphisme du cercle ($\simeq \mathbf{RP}^1$), la dérivée schwarzienne s'annule au moins quatre fois.

Quatre sommets pour les difféomorphismes du cercle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{RP}^1$ un difféomorphisme local. Supposons que la dérivée schwarzienne de f ne s'annule pas sur l'intervalle $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, on considère l'application de Möbius m_x qui “osculé” f au point x à l'ordre 3. Alors, les graphes des m_x dans $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ sont disjoints deux à deux.

Pour tout difféomorphisme du cercle ($\simeq \mathbf{RP}^1$), la dérivée schwarzienne s'annule au moins quatre fois.

L'équation de Monge

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^v/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^v/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

- Les coniques dépendent de cinq paramètres.

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^v/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

- Les coniques dépendent de cinq paramètres.
- Deux coniques se coupent en au plus quatre points.

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^v/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

- Les coniques dépendent de cinq paramètres.
- Deux coniques se coupent en au plus quatre points.
- Les points spéciaux sont les points sextactiques.

Si une courbe ne contient pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont disjointes.

Deux coniques osculatrices “consécutives” se coupent localement en un point multiple d’ordre 4. Mais deux coniques se coupent en au plus 4 points !

Si une courbe ne contient pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont disjointes.

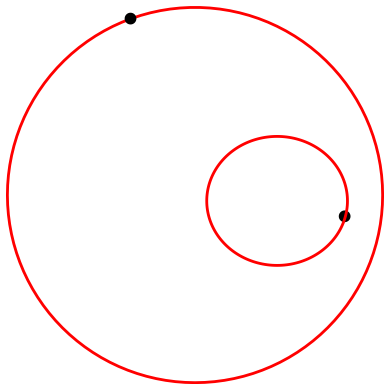
Deux coniques osculatrices “consécutives” se coupent localement en un point multiple d'ordre 4. Mais deux coniques se coupent en au plus 4 points !

Coniques osculatrices

Si une courbe ne contient pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont disjointes.

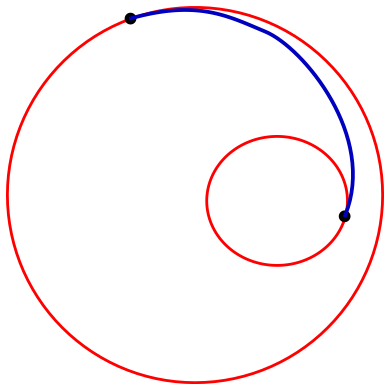
Deux coniques osculatrices “consécutives” se coupent localement en un point multiple d’ordre 4. Mais deux coniques se coupent en au plus 4 points !

Coniques osculatrices



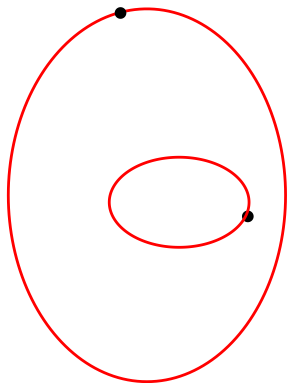
Existe-t-il une courbe sans sommets ?

Peut-on améliorer ?



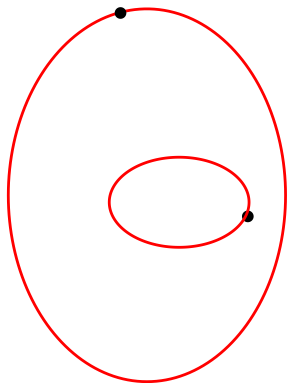
Existe-t-il une courbe sans sommets ?

Oui ! (Vogt, 1920)



Existe-t-il une courbe sans points sextactiques ?

Peut-on améliorer ?



Existe-il une courbe sans points sextactiques ?

En général, **NON !**

Proposition

Il existe une famille de relations d'ordre $\subset_\lambda$ dans l'ensemble des coniques non singulières du plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$, qui dépend d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, telle que :

- $\subset_\lambda$ est invariant par transformations projectives.
- $C \subset_0 C'$ signifie que l'intérieur de C est dans l'intérieur de C' .
- Si $\lambda \leq \mu$ et $C \subset_\mu C'$ alors $C \subset_\lambda C'$.
- Les relations $\subset_\lambda$ sont les seules relations d'ordre "raisonnables" dans l'ensemble des coniques.
- Si une courbe ne possède pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont ordonnées par rapport à $\subset_1$.
- Réciproquement, étant données deux coniques $C \subset_1 C'$ et deux points p, p' de C, C' , il existe une courbe sans points sextactiques joignant p et p' .

Proposition

Il existe une famille de relations d'ordre $\subset_\lambda$ dans l'ensemble des coniques non singulières du plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$, qui dépend d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, telle que :

- $\subset_\lambda$ est invariant par transformations projectives.
- $C \subset_0 C'$ signifie que l'intérieur de C est dans l'intérieur de C' .
- Si $\lambda \leq \mu$ et $C \subset_\mu C'$ alors $C \subset_\lambda C'$.
- Les relations $\subset_\lambda$ sont les seules relations d'ordre "raisonnables" dans l'ensemble des coniques.
- Si une courbe ne possède pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont ordonnées par rapport à $\subset_1$.
- Réciproquement, étant données deux coniques $C \subset_1 C'$ et deux points p, p' de C, C' , il existe une courbe sans points sextactiques joignant p et p' .

Proposition

Il existe une famille de relations d'ordre $\subset_\lambda$ dans l'ensemble des coniques non singulières du plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$, qui dépend d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, telle que :

- $\subset_\lambda$ est invariant par transformations projectives.
- $C \subset_0 C'$ signifie que l'intérieur de C est dans l'intérieur de C' .
- Si $\lambda \leq \mu$ et $C \subset_\mu C'$ alors $C \subset_\lambda C'$.
- Les relations $\subset_\lambda$ sont les seules relations d'ordre "raisonnables" dans l'ensemble des coniques.
- Si une courbe ne possède pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont ordonnées par rapport à $\subset_1$.
- Réciproquement, étant données deux coniques $C \subset_1 C'$ et deux points p, p' de C, C' , il existe une courbe sans points sextactiques joignant p et p' .

Proposition

Il existe une famille de relations d'ordre $\subset_\lambda$ dans l'ensemble des coniques non singulières du plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$, qui dépend d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, telle que :

- $\subset_\lambda$ est invariant par transformations projectives.
- $C \subset_0 C'$ signifie que l'intérieur de C est dans l'intérieur de C' .
- Si $\lambda \leq \mu$ et $C \subset_\mu C'$ alors $C \subset_\lambda C'$.
- Les relations $\subset_\lambda$ sont les seules relations d'ordre "raisonnables" dans l'ensemble des coniques.
- Si une courbe ne possède pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont ordonnées par rapport à $\subset_1$.
- Réciproquement, étant données deux coniques $C \subset_1 C'$ et deux points p, p' de C, C' , il existe une courbe sans points sextactiques joignant p et p' .

Proposition

Il existe une famille de relations d'ordre $\subset_\lambda$ dans l'ensemble des coniques non singulières du plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$, qui dépend d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, telle que :

- $\subset_\lambda$ est invariant par transformations projectives.
- $C \subset_0 C'$ signifie que l'intérieur de C est dans l'intérieur de C' .
- Si $\lambda \leq \mu$ et $C \subset_\mu C'$ alors $C \subset_\lambda C'$.
- *Les relations $\subset_\lambda$ sont les seules relations d'ordre "raisonnables" dans l'ensemble des coniques.*
- *Si une courbe ne possède pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont ordonnées par rapport à $\subset_1$.*
- *Réciproquement, étant données deux coniques $C \subset_1 C'$ et deux points p, p' de C, C' , il existe une courbe sans points sextactiques joignant p et p' .*

Proposition

Il existe une famille de relations d'ordre $\subset_\lambda$ dans l'ensemble des coniques non singulières du plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$, qui dépend d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, telle que :

- $\subset_\lambda$ est invariant par transformations projectives.
- $C \subset_0 C'$ signifie que l'intérieur de C est dans l'intérieur de C' .
- Si $\lambda \leq \mu$ et $C \subset_\mu C'$ alors $C \subset_\lambda C'$.
- Les relations $\subset_\lambda$ sont les seules relations d'ordre "raisonnables" dans l'ensemble des coniques.
- Si une courbe ne possède pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont ordonnées par rapport à $\subset_1$.
- Réciproquement, étant données deux coniques $C \subset_1 C'$ et deux points p, p' de C, C' , il existe une courbe sans points sextactiques joignant p et p' .

Proposition

Il existe une famille de relations d'ordre $\subset_\lambda$ dans l'ensemble des coniques non singulières du plan projectif réel $\mathbf{RP}^2$, qui dépend d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$, telle que :

- $\subset_\lambda$ est invariant par transformations projectives.
- $C \subset_0 C'$ signifie que l'intérieur de C est dans l'intérieur de C' .
- Si $\lambda \leq \mu$ et $C \subset_\mu C'$ alors $C \subset_\lambda C'$.
- Les relations $\subset_\lambda$ sont les seules relations d'ordre "raisonnables" dans l'ensemble des coniques.
- Si une courbe ne possède pas de points sextactiques, les coniques osculatrices sont ordonnées par rapport à $\subset_1$.
- *Réciproquement, étant données deux coniques $C \subset_1 C'$ et deux points p, p' de C, C' , il existe une courbe sans points sextactiques joignant p et p' .*

Définition

Soient C, C' deux coniques, définies par des matrices symétriques 3×3 A, A' , de signature $++-$.

On normalise pour que $\det(A) = \det(A')$.

On dit que $C \subset_1 C'$ si $A' - A$ est définie positive.

Exemple

$$C: x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad C': x^2 + y^2 = 0 \quad (C')$$

Définition de $\subset_1$

Définition

Soient C, C' deux coniques, définies par des matrices symétriques 3×3 A, A' , de signature $++-$.

On normalise pour que $\det(A) = \det(A')$.

On dit que $C \subset_1 C'$ si $A' - A$ est définie positive.

Exemple

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

$$C \subset_1 C' \iff \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} > 0 \iff a > b$$

Définition de $\subset_1$

Définition

Soient C, C' deux coniques, définies par des matrices symétriques 3×3 A, A' , de signature $++-$.

On normalise pour que $\det(A) = \det(A')$.

On dit que $C \subset_1 C'$ si $A' - A$ est définie positive.

Exemple

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

$$C \subset_0 C' \iff a, b \geq 1$$

$$C \subset_1 C' \iff a, b \geq 1 \text{ et } \sqrt{a} \leq b \leq a^2$$

Définition de $\subset_1$

Définition

Soient C, C' deux coniques, définies par des matrices symétriques 3×3 A, A' , de signature $++-$.

On normalise pour que $\det(A) = \det(A')$.

On dit que $C \subset_1 C'$ si $A' - A$ est définie positive.

Exemple

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

$$\blacksquare C \subset_0 C' \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \geq 1$$

$$\blacksquare C \subset_1 C' \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \geq 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \leq b \leq a^2$$

Définition de $\subset_1$

Définition

Soient C, C' deux coniques, définies par des matrices symétriques 3×3 A, A' , de signature $++-$.

On normalise pour que $\det(A) = \det(A')$.

On dit que $C \subset_1 C'$ si $A' - A$ est définie positive.

Exemple

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

$$\blacksquare \quad C \subset_0 C' \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \geq 1$$

$$\blacksquare \quad C \subset_1 C' \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \geq 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \leq b \leq a^2$$

Définition de $\subset_1$

Définition

Soient C, C' deux coniques, définies par des matrices symétriques 3×3 A, A' , de signature $++-$.

On normalise pour que $\det(A) = \det(A')$.

On dit que $C \subset_1 C'$ si $A' - A$ est définie positive.

Exemple

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

$$\blacksquare \quad C \subset_0 C' \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \geq 1$$

$$\blacksquare \quad C \subset_1 C' \quad \Longleftrightarrow \quad a, b \geq 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \leq b \leq a^2$$

L'équation de Halphen

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_3a_3 + 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 & 0 & a_2^3 & 3a_2^2a_3 & 3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2 & a_3^3 + 6a_2a_2a_4 + 3a_2^2a_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_i := y^{(i)} / i!$$

L'équation de Halphen

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_3a_3 + 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5 \\ 0 & 0 & a_2^3 & 3a_2^2a_3 & 3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2 & a_3^3 + 6a_2a_2a_4 + 3a_2^2a_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_i := y^{(i)} / i!$$

Cubiques !

- Les courbes algébriques de degré d dépendent de $d(d+3)/2$ paramètres.
- Deux courbes de degré d se coupent (en général) en d^2 points (complexes).
- Si $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), il est encore vrai que les courbes algébriques osculatrices ne se coupent pas *localement* mais ceci n'implique plus qu'elles ne se coupent pas "globalement" !

Le paradoxe de Cramer

- Les courbes algébriques de degré d dépendent de $d(d+3)/2$ paramètres.
- Deux courbes de degré d se coupent (en général) en d^2 points (complexes).
- Si $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), il est encore vrai que les courbes algébriques osculatrices ne se coupent pas *localement* mais ceci n'implique plus qu'elles ne se coupent pas "globalement" !

Le paradoxe de Cramer

- Les courbes algébriques de degré d dépendent de $d(d+3)/2$ paramètres.
- Deux courbes de degré d se coupent (en général) en d^2 points (complexes).
- Si $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), il est encore vrai que les courbes algébriques osculatrices ne se coupent pas *localement* mais ceci n'implique plus qu'elles ne se coupent pas "globalement" !

Le paradoxe de Cramer

- Les courbes algébriques de degré d dépendent de $d(d+3)/2$ paramètres.
- Deux courbes de degré d se coupent (en général) en d^2 points (complexes).
- Si $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), il est encore vrai que les courbes algébriques osculatrices ne se coupent pas *localement* mais ceci n'implique plus qu'elles ne se coupent pas "globalement" !

$$d = 6$$

$$6(6+3)/2 - 1 = 26$$

$$6^2 = 36$$

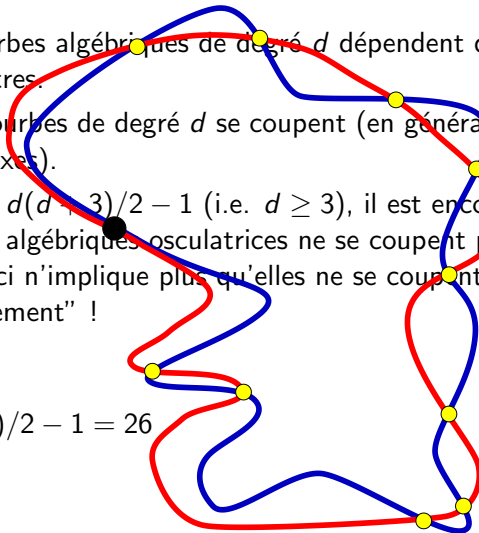
Le paradoxe de Cramer

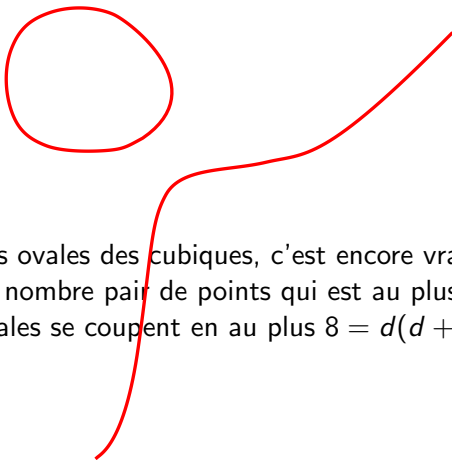
- Les courbes algébriques de degré d dépendent de $d(d+3)/2$ paramètres.
- Deux courbes de degré d se coupent (en général) en d^2 points (complexes).
- Si $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), il est encore vrai que les courbes algébriques osculatrices ne se coupent pas *localement* mais ceci n'implique plus qu'elles ne se coupent pas "globalement" !

$$d = 6$$

$$6(6+3)/2 - 1 = 26$$

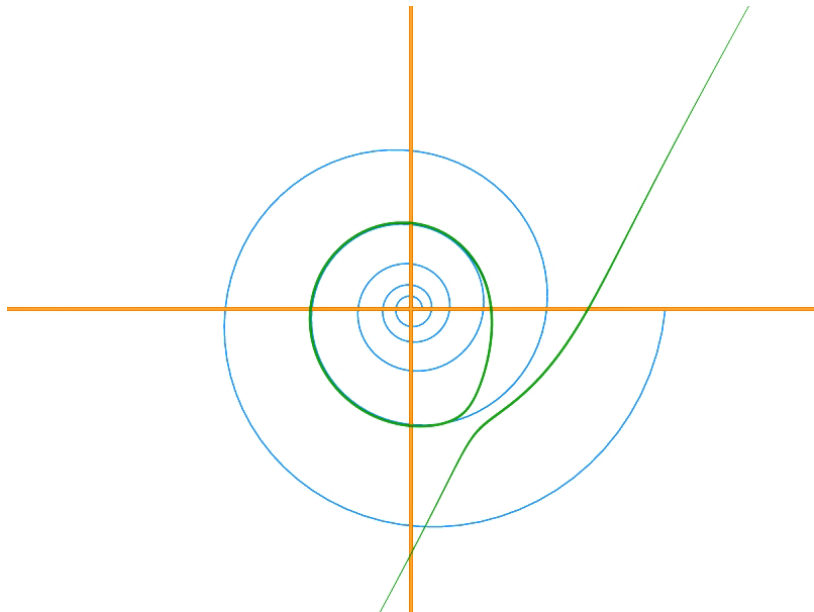
$$6^2 = 36$$





Dans le cas des ovales des cubiques, c'est encore vrai. Ils se coupent en un nombre pair de points qui est au plus $9 = d^2$!
Donc, deux ovales se coupent en au plus $8 = d(d + 3)/2$ points.

Cubiques osculatrices



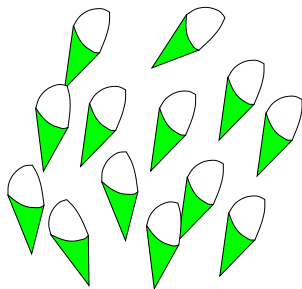
Cubiques osculatrices

Supposons d pair et $d(d+3)/2$ impair (i.e. $d = 4k + 2$).
Considérons l'espace X_d des courbes algébriques de degré d munies d'un point base.

Chaque courbe plane, sans points " d -tactiques", définit une courbe dans X_d qu'on peut orienter de sorte que les intérieurs des courbes osculatrices soient localement croissants. Les vecteurs tangents à ces courbes de X_d définissent un champ de cônes convexes dans X_d .

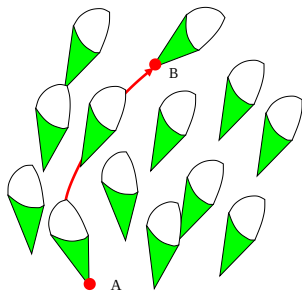
Supposons d pair et $d(d+3)/2$ impair (i.e. $d = 4k + 2$).
Considérons l'espace X_d des courbes algébriques de degré d munies d'un point base.

Chaque courbe plane, sans points “ d -tactiques”, définit une courbe dans X_d qu'on peut orienter de sorte que les intérieurs des courbes osculatrices soient localement croissants. Les vecteurs tangents à ces courbes de X_d définissent un champ de cônes convexes dans X_d .



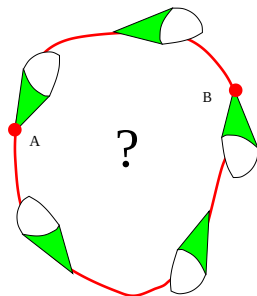
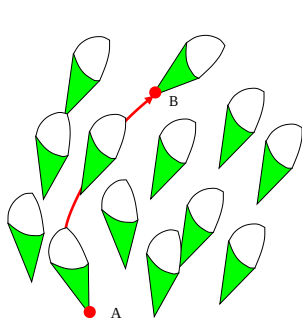
Question

Ce champ de cônes convexes dans X_d définit-il une relation d'ordre dans X_d ?



Question

Ce champ de cônes convexes dans X_d définit-il une relation d'ordre dans X_d ?



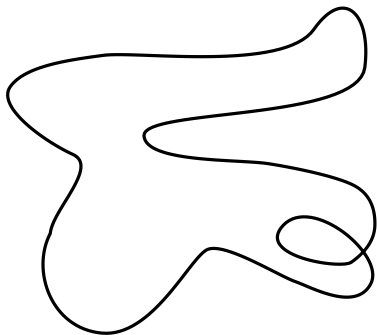
Question

Ce champ de cônes convexes dans X_d définit-il une relation d'ordre dans X_d ?

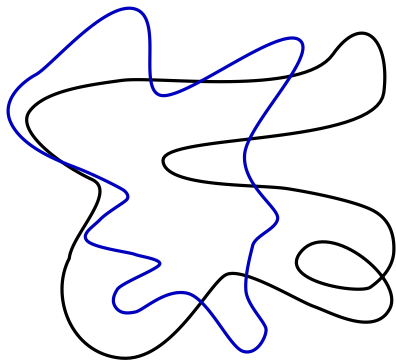
- Les courbes de degré 6 dépendent de $27 = d(d+3)/2$ paramètres et se coupent en au plus $36 = 6^2$ points.
- Existe-t-il une courbe *fermée* dans le plan projectif qui ne contient aucun point 6-tactique ?

- Les courbes de degré 6 dépendent de $27 = d(d+3)/2$ paramètres et se coupent en au plus $36 = 6^2$ points.
- Existe-t-il une courbe fermée dans le plan projectif qui ne contient aucun point 6-tactique ?

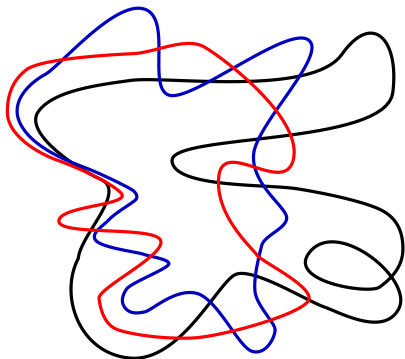
Courbes de degré 6



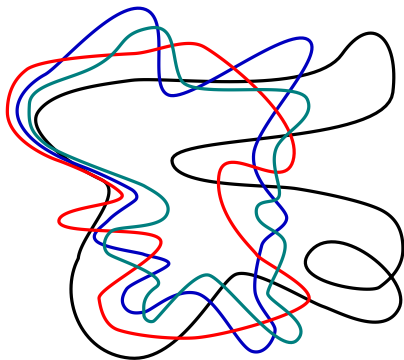
Courbes de degré 6



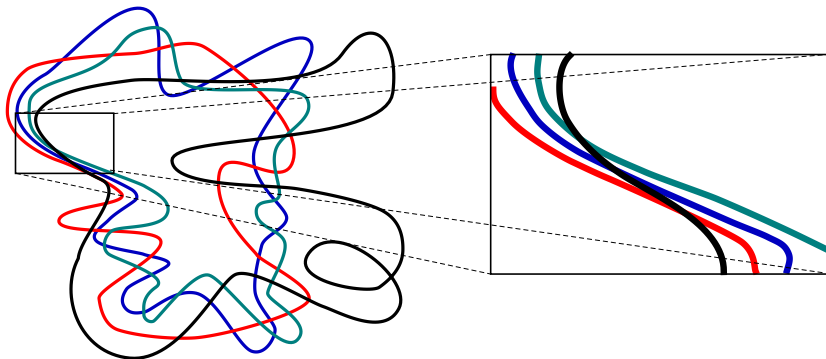
Courbes de degré 6



Courbes de degré 6



Courbes de degré 6



Théorème (Vinberg)

Une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$ contient un cône convexe non trivial invariant par la représentation adjointe si et seulement si l'espace symétrique correspondant G/K est un espace symétrique hermitien.

Exemples

- $SL(2, \mathbf{R})$: disque de Poincaré.
- $Sp(2n, \mathbf{R})$: domaine de Siegel.
- $PU(2, 1)$: boule hyperbolique complexe.

Théorème (Vinberg)

*Une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$ contient un cône convexe non trivial invariant par la représentation adjointe si et seulement si l'espace symétrique correspondant G/K est un espace symétrique **hermitien**.*

Exemples

- $SL(2, \mathbf{R})$: disque de Poincaré.
- $Sp(2n, \mathbf{R})$: domaine de Siegel.
- $PU(2, 1)$: boule hyperbolique complexe.

Théorème (Vinberg)

*Une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$ contient un cône convexe non trivial invariant par la représentation adjointe si et seulement si l'espace symétrique correspondant G/K est un espace symétrique **hermitien**.*

Exemples

- $SL(2, \mathbf{R})$: disque de Poincaré.
- $Sp(2n, \mathbf{R})$: domaine de Siegel.
- $PU(2, 1)$: boule hyperbolique complexe.

Théorème (Vinberg)

*Une algèbre de Lie simple $\mathcal{G}$ contient un cône convexe non trivial invariant par la représentation adjointe si et seulement si l'espace symétrique correspondant G/K est un espace symétrique **hermitien**.*

Exemples

- $SL(2, \mathbf{R})$: disque de Poincaré.
- $Sp(2n, \mathbf{R})$: domaine de Siegel.
- $PU(2, 1)$: boule hyperbolique complexe.

Théorème (Vinberg)

Si G/K est hermitien, il existe un unique cône maximal (resp. minimal) dans l'algèbre de Lie de G qui est invariant par représentation adjointe.

Exemples

Dans le groupe symplectique, il existe un cône convexe invariant unique.

Dans le groupe d'isométries de la boule hyperbolique complexe, il existe une famille à un paramètre.

Question

Un champ de cônes convexes définit une relation d'ordre local dans un groupe de Lie, invariante par translations à gauche.

Relation globale ?

Ordonner les groupes de Lie

Théorème (Vinberg)

Si G/K est hermitien, il existe un unique cône maximal (resp. minimal) dans l'algèbre de Lie de G qui est invariant par représentation adjointe.

Exemples

Dans le groupe symplectique, il existe un cône convexe invariant unique.

Dans le groupe d'isométries de la boule hyperbolique complexe, il existe une famille à un paramètre.

Question

Un champ de cônes convexes définit une relation d'ordre local dans un groupe de Lie, invariante par translations à gauche.

Relation globale ?

Ordonner les groupes de Lie

Théorème (Vinberg)

Si G/K est hermitien, il existe un unique cône maximal (resp. minimal) dans l'algèbre de Lie de G qui est invariant par représentation adjointe.

Exemples

Dans le groupe symplectique, il existe un cône convexe invariant unique.

Dans le groupe d'isométries de la boule hyperbolique complexe, il existe une famille à un paramètre.

Question

Un champ de cônes convexes définit une relation d'ordre local dans un groupe de Lie, invariante par translations à gauche.

Relation globale ?

Ordonner les groupes de Lie

Théorème (Vinberg)

Si G/K est hermitien, il existe un unique cône maximal (resp. minimal) dans l'algèbre de Lie de G qui est invariant par représentation adjointe.

Exemples

Dans le groupe symplectique, il existe un cône convexe invariant unique.

Dans le groupe d'isométries de la boule hyperbolique complexe, il existe une famille à un paramètre.

Question

Un champ de cônes convexes définit une relation d'ordre local dans un groupe de Lie, invariante par translations à gauche.

Relation globale ?

Théorème (Vinberg)

*Le cône **minimal** $C_{\min}$ définit toujours une relation d'ordre **globale** sur le revêtement universel d'un groupe de Lie simple.*

Théorème (Olshanskii)

Description explicite des cônes invariants qui définissent un ordre global : ceux qui sont contenus dans un cône C_{ord} .

Exemples

Dans le groupe symplectique, $C_{\min} = C_{\text{ord}} = C_{\max}$.

Pour le groupe d'isométries de la boule complexe,
 $C_{\min} = C_{\text{ord}} \neq C_{\max}$.

Ordonner les groupes de Lie

Théorème (Vinberg)

Le cône **minimal** C_{min} définit toujours une relation d'ordre **globale** sur le revêtement universel d'un groupe de Lie simple.

Théorème (Olshanskii)

Description explicite des cônes invariants qui définissent un ordre global : ceux qui sont contenus dans un cône C_{ord} .

Exemples

Dans le groupe symplectique, $C_{min} = C_{ord} = C_{max}$.

Pour le groupe d'isométries de la boule complexe,

$C_{min} = C_{ord} \neq C_{max}$.

Ordonner les groupes de Lie

Théorème (Vinberg)

Le cône **minimal** C_{min} définit toujours une relation d'ordre **globale** sur le revêtement universel d'un groupe de Lie simple.

Théorème (Olshanskii)

Description explicite des cônes invariants qui définissent un ordre global : ceux qui sont contenus dans un cône C_{ord} .

Exemples

Dans le groupe symplectique, $C_{min} = C_{ord} = C_{max}$.

Pour le groupe d'isométries de la boule complexe,
 $C_{min} = C_{ord} \neq C_{max}$.

Ordonner les groupes de Lie

Théorème (Vinberg)

*Le cône **minimal** $C_{\min}$ définit toujours une relation d'ordre **globale** sur le revêtement universel d'un groupe de Lie simple.*

Théorème (Olshanskii)

Description explicite des cônes invariants qui définissent un ordre global : ceux qui sont contenus dans un cône C_{ord} .

Exemples

Dans le groupe symplectique, $C_{\min} = C_{\text{ord}} = C_{\max}$.

Pour le groupe d'isométries de la boule complexe,
 $C_{\min} = C_{\text{ord}} \neq C_{\max}$.

- Décrire les champs de cônes G -invariants sur les espaces homogènes G/H .
- Décrire les espaces homogènes ordonnables.
- La dimension infinie ?

Plus généralement ?

- Décrire les champs de cônes G -invariants sur les espaces homogènes G/H .
- Décrire les espaces homogènes ordonnables.
- La dimension infinie ?

- Décrire les champs de cônes G -invariants sur les espaces homogènes G/H .
- Décrire les espaces homogènes ordonnables.
- La dimension infinie ?

Eliashberg-Kim-Polterovich

Le groupe des contactomorphismes de la sphère de contact standard possède un champ de cônes invariant.

Ce champ de cônes ne définit pas une relation d'ordre

Problème

Généraliser les résultats de Vinberg-Ol'shankii aux groupes de difféomorphismes de dimension infinie !

Eliashberg-Kim-Polterovich

Le groupe des contactomorphismes de la sphère de contact standard possède un champ de cônes invariant.

Ce champ de cônes ne définit pas une relation d'ordre

Problème

Généraliser les résultats de Vinberg-Ol'shankii aux groupes de difféomorphismes de dimension infinie !

Eliashberg-Kim-Polterovich

Le groupe des contactomorphismes de la sphère de contact standard possède un champ de cônes invariant.

Ce champ de cônes ne définit pas une relation d'ordre

Problème

Généraliser les résultats de Vinberg-Ol'shankii aux groupes de difféomorphismes de dimension infinie !

- Décrire les champs de cônes G -invariants sur les espaces homogènes G/H .
- Décrire les espaces homogènes ordonnables.
- La dimension infinie ?

Plus généralement ?

- Décrire les champs de cônes G -invariants sur les espaces homogènes G/H .
- Décrire les espaces homogènes ordonnables.
- La dimension infinie ?

Plus généralement ?

- Décrire les champs de cônes G -invariants sur les espaces homogènes G/H .
- Décrire les espaces homogènes ordonnables.
- La dimension infinie ?