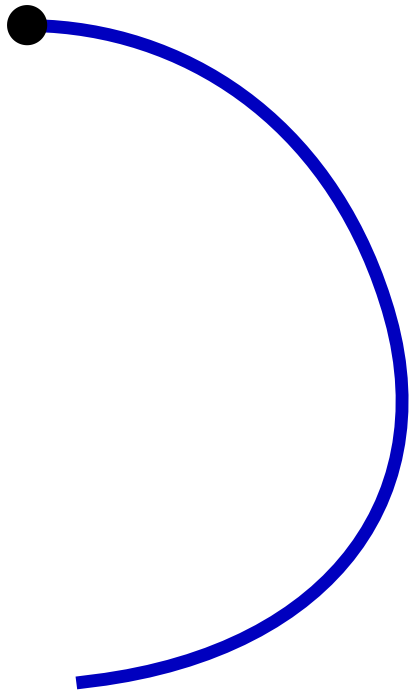
Curvas osculatrizes

Étienne Ghys

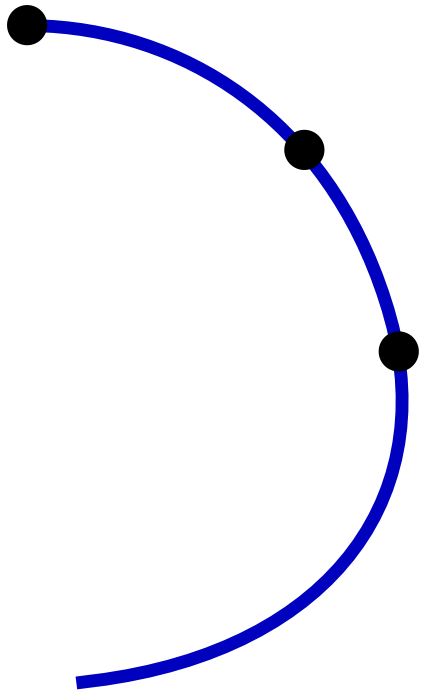
CNRS – École Normale Supérieure de Lyon

26º Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, 2007

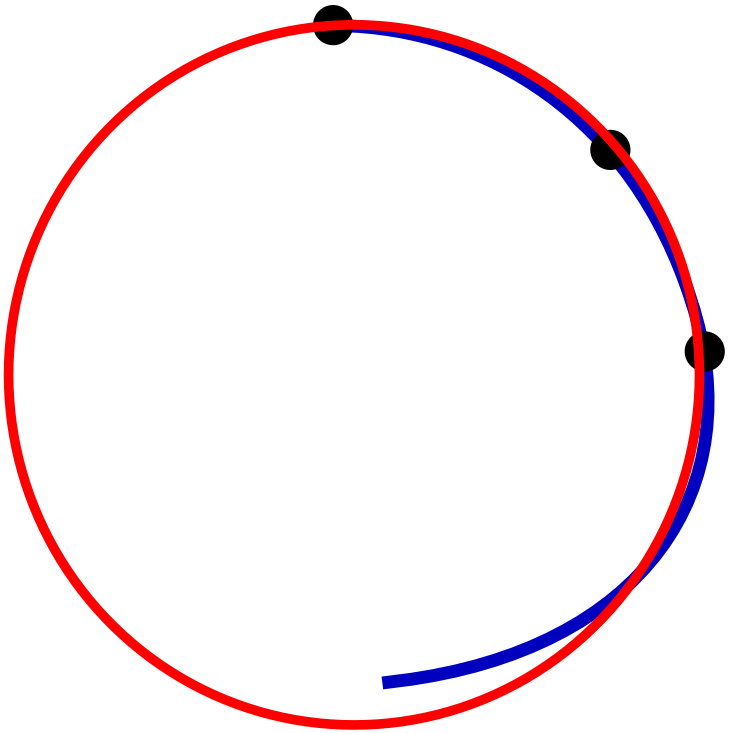
Círculo osculador



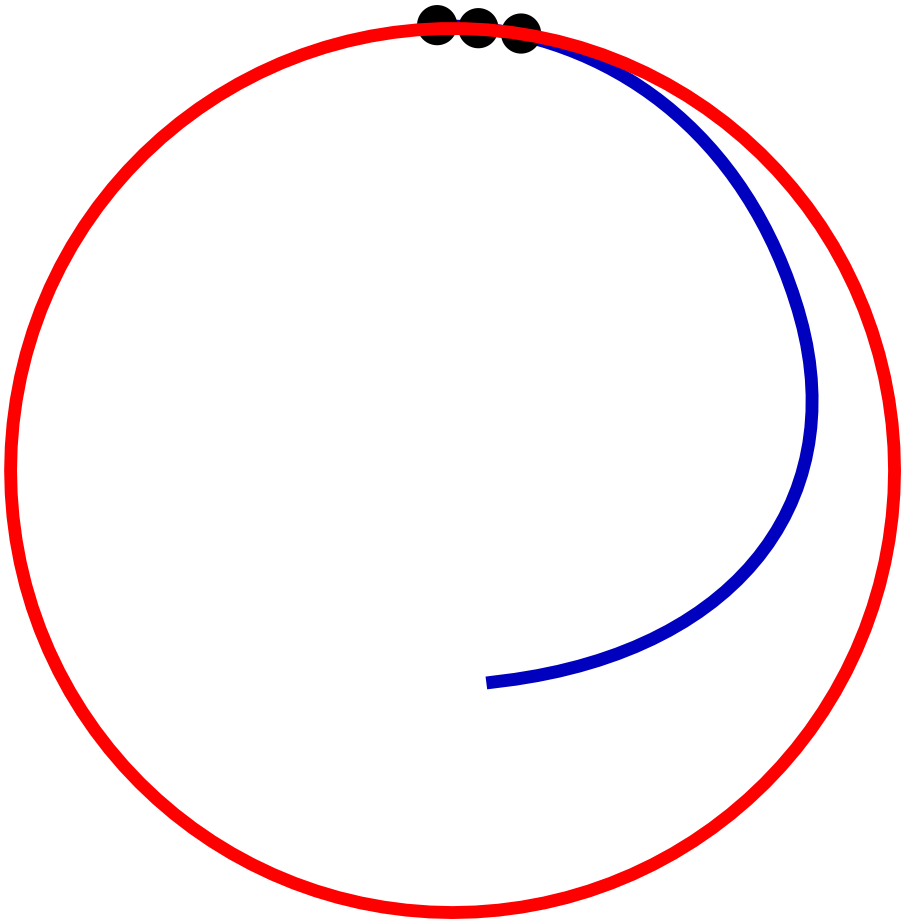
Círculo osculador



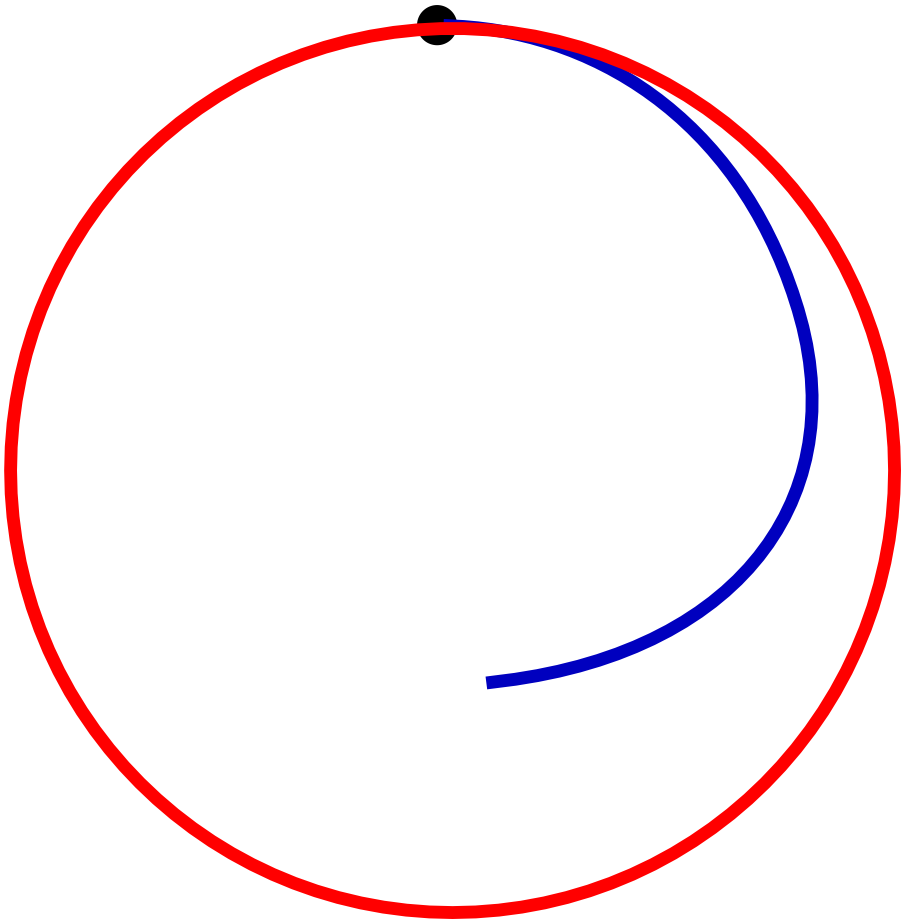
Círculo osculador



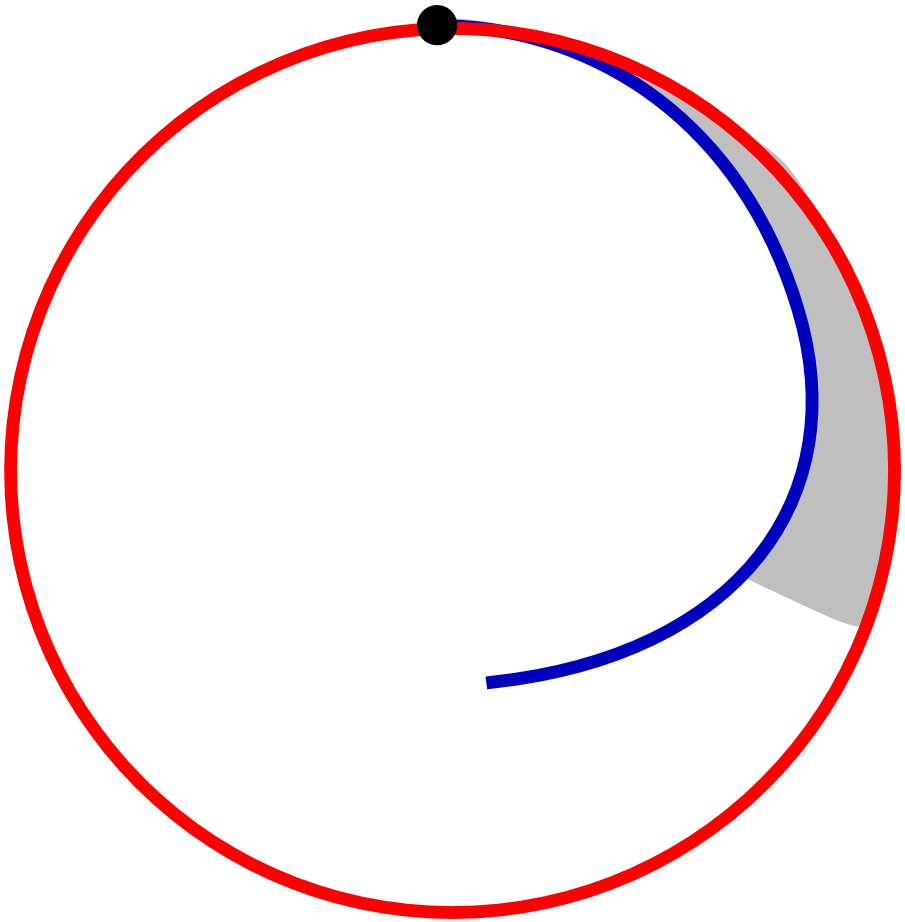
Círculo osculador



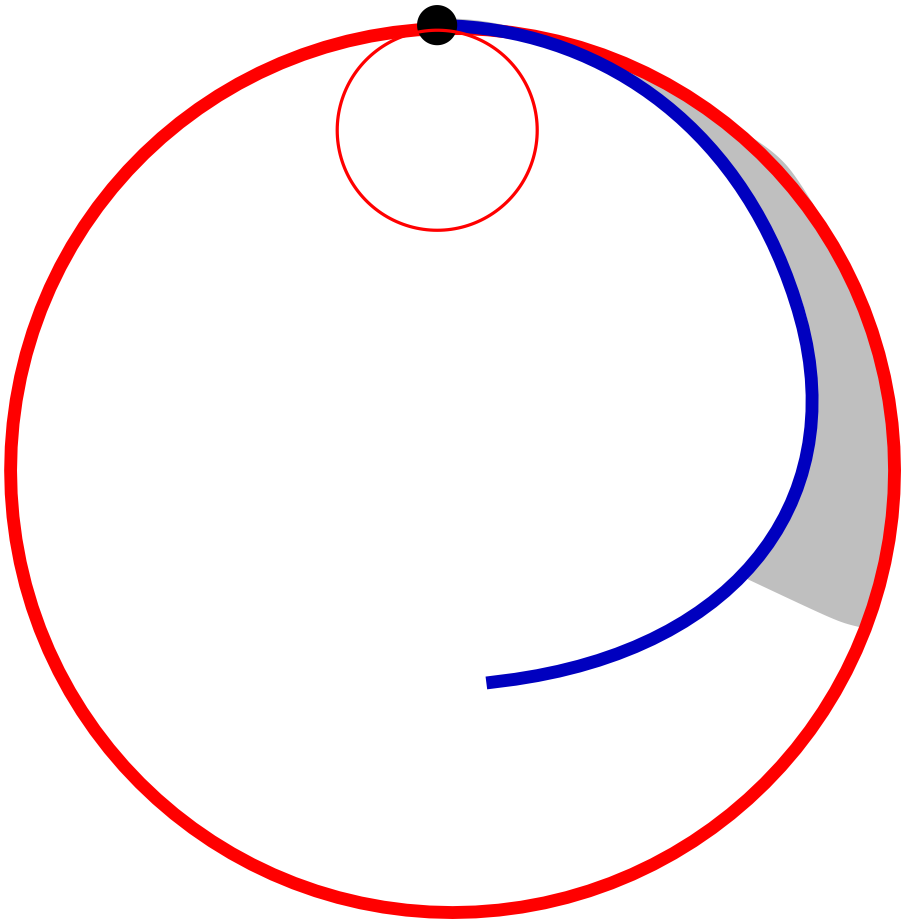
Círculo osculador



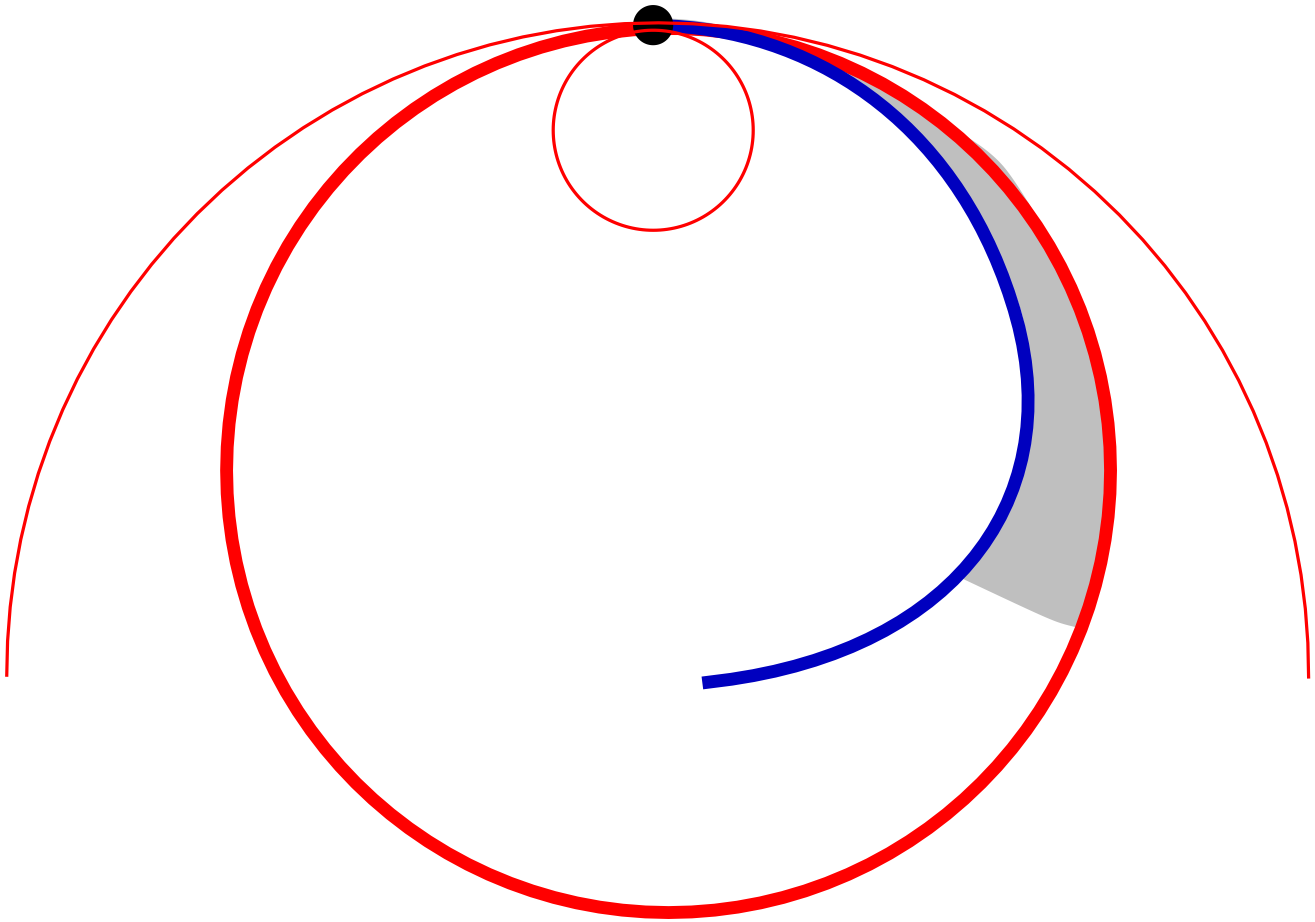
Círculo osculador



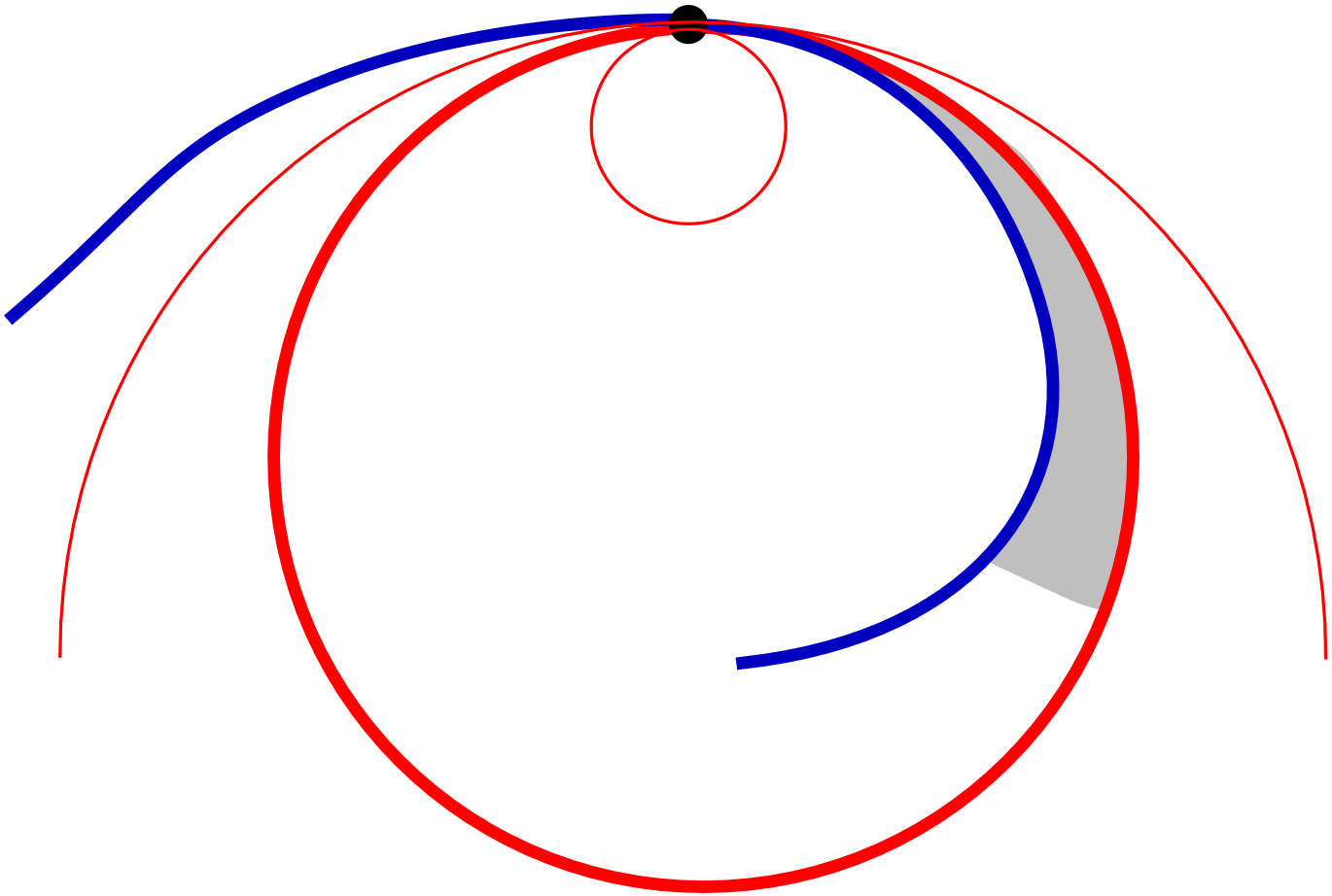
Círculo osculador



Círculo osculador



Círculo osculador



P.G. Tait (1895)

CXVIII.

NOTE ON THE CIRCLES OF CURVATURE OF A PLANE CURVE.

[*Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, December* 13, 1895.]

WHEN the curvature of a plane curve continuously increases or diminishes (as is the case with a logarithmic spiral for instance) no two of the circles of curvature can intersect one another.

This curious remark occurred to me some time ago in connection with an accidental feature of a totally different question. (*Systems of Plane Curves whose Orthogonals form a similar System. Anté,* No. CXVII.)

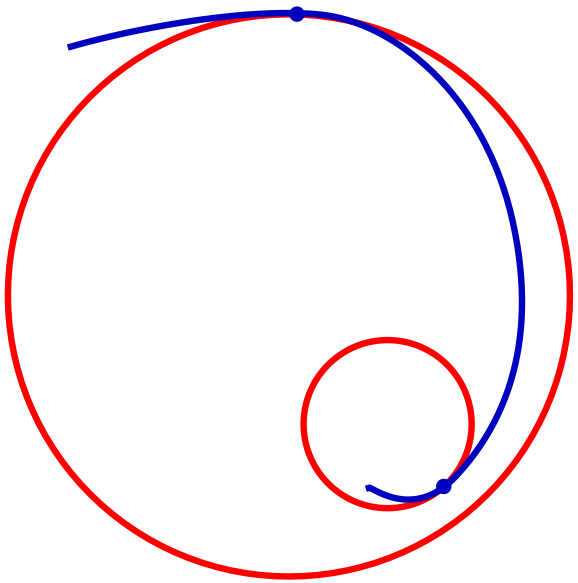
The proof is excessively simple. For if A, B, be any two points of the evolute, the chord AB is the distance between the centres of two of the circles, and is necessarily less than the arc AB, the difference of their radii. (This is true even if the evolute be sinuous, so that the original curve has ramphoid cusps.)

When the curve has points of maximum or minimum curvature, there are corresponding [keratoid] cusps on the evolute; and pairs of circles of curvature whose centres lie on opposite sides of the cusp, C, may intersect:—for the chord AB may now exceed the difference between CA and CB.

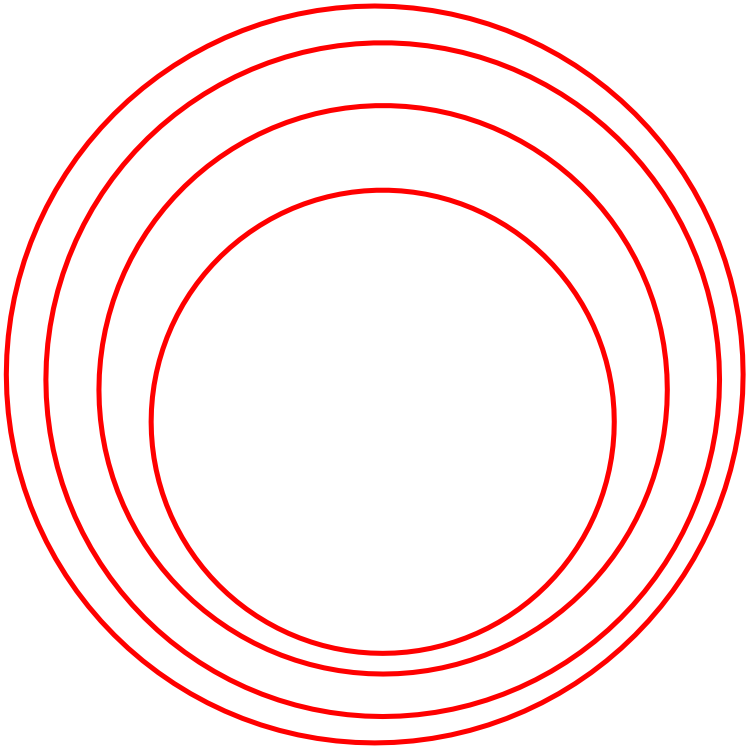
O teorema de Tait–Kneser

Teorema

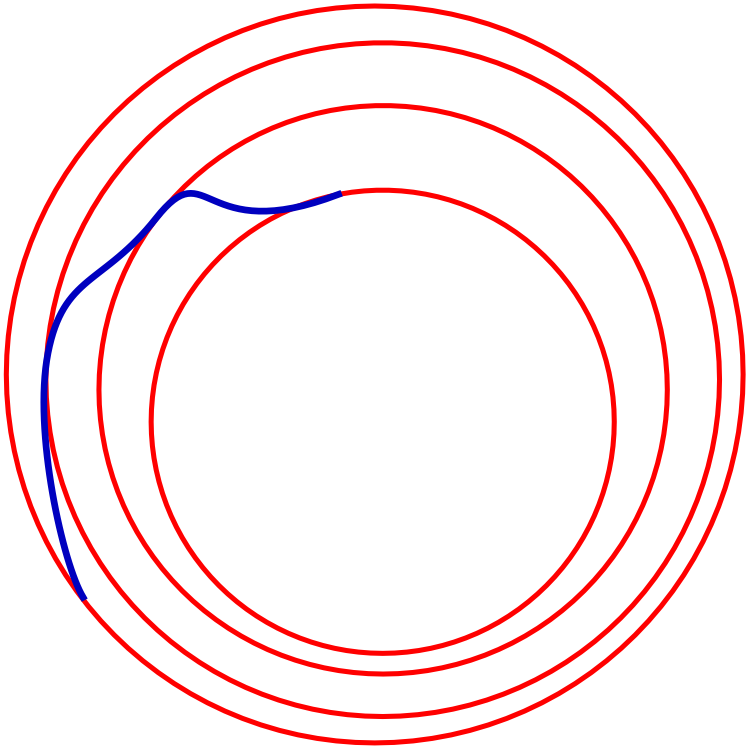
Se a curvatura cresce ao longo de uma curva, os círculos osculadores não se interceptam.



O teorema de Tait–Kneser não é verdade !

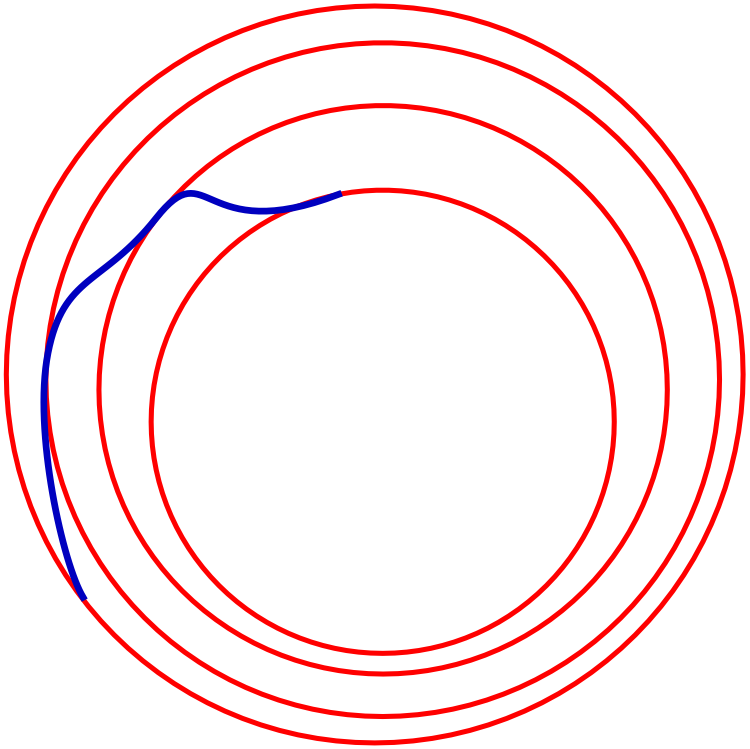


O teorema de Tait–Kneser não é verdade !



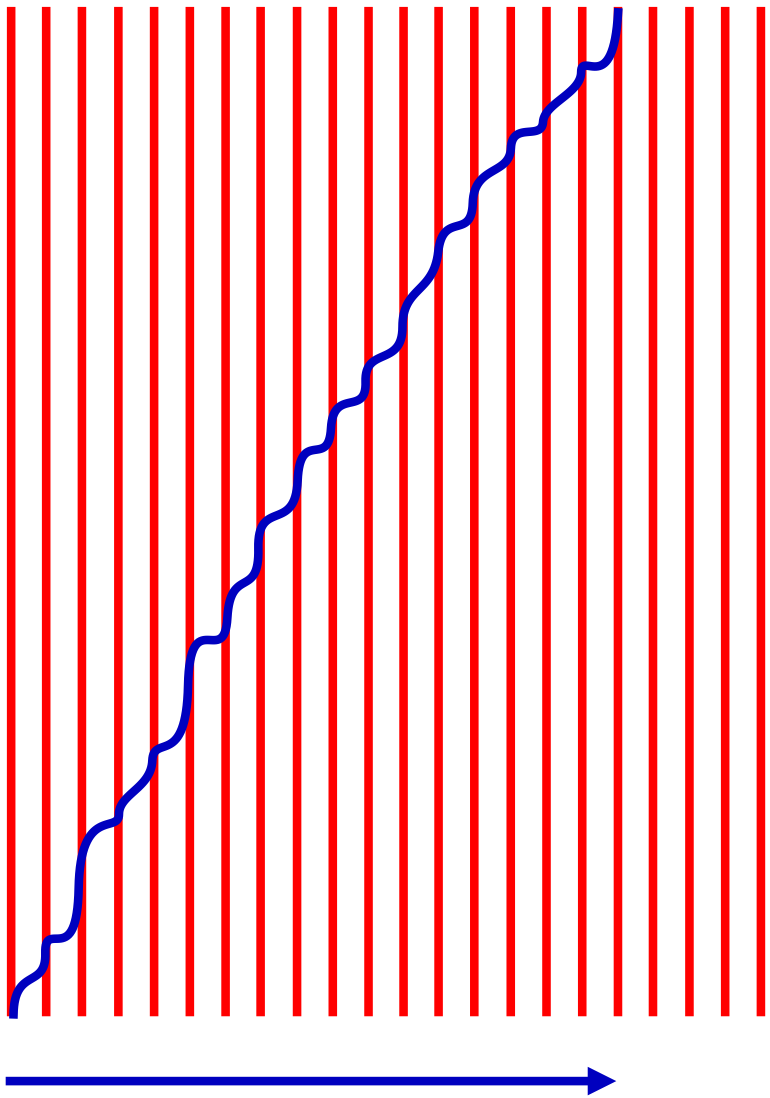
Uma curva não pode ser tangente
a uma folheação
sem estar contida numa folha.

O teorema de Tait–Kneser não é verdade !



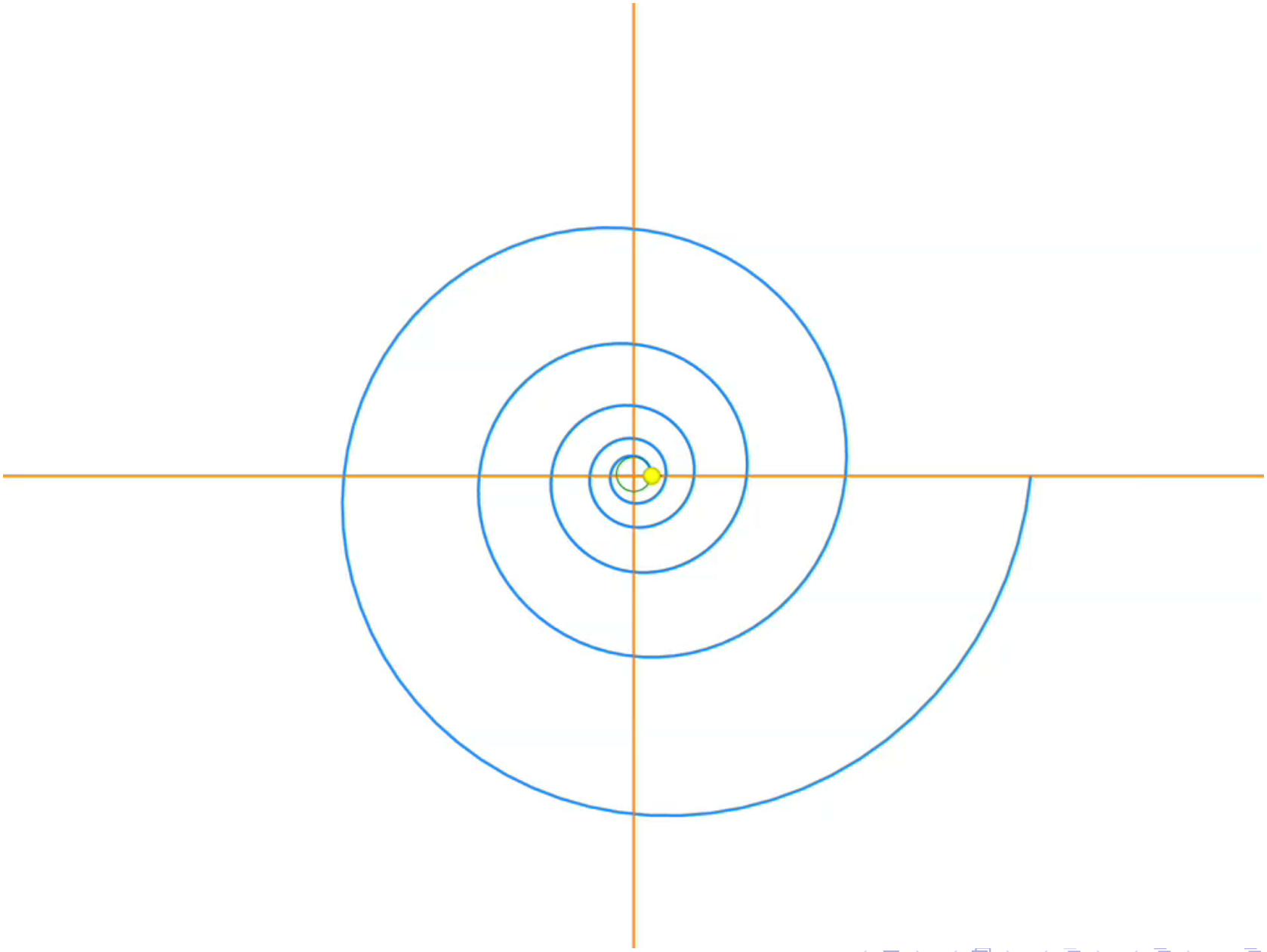
Uma curva não pode ser tangente
a uma folheação
sem estar contida numa folha.

O teorema de Tait–Kneser não é verdade !



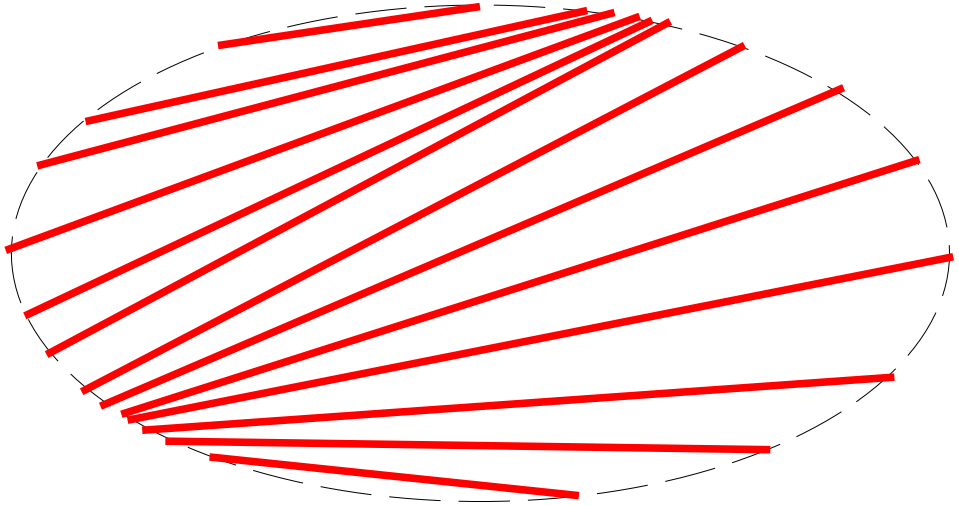
Uma curva não pode ser tangente
a uma folheação
sem estar contida numa folha.

A folheação não é regular !

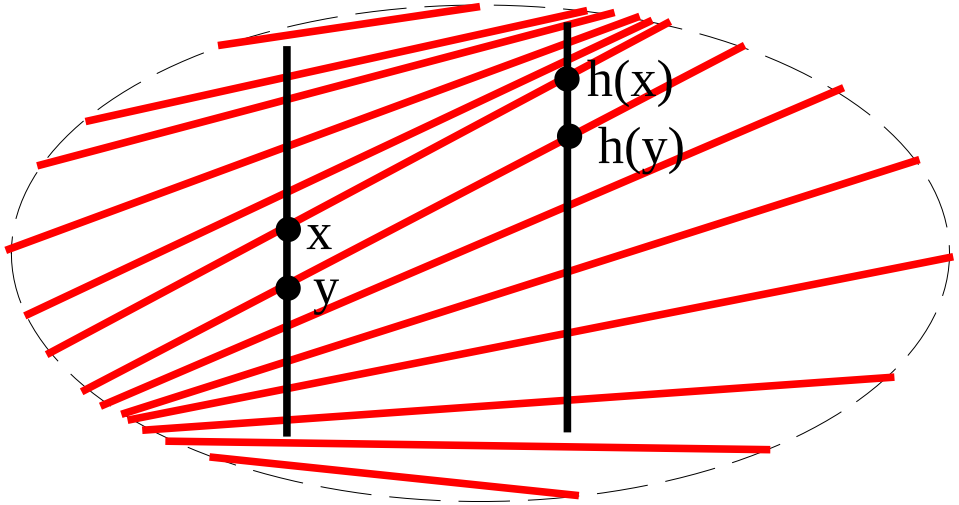


A folheação não é regular !

Regularidade fraca das folheaçoẽs

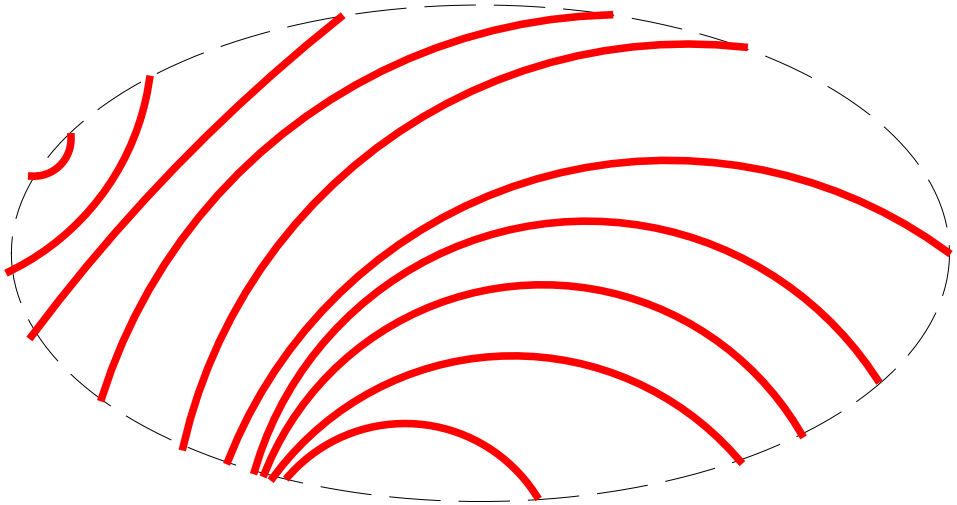


Regularidade fraca das folheaçoẽs



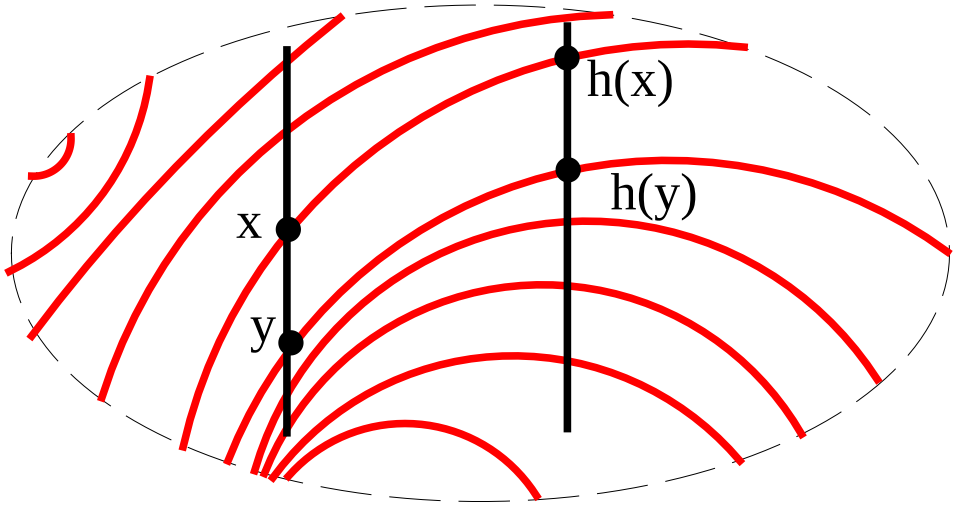
$\{$ Folhas $\subset$ Retas $\}$ $\Longrightarrow$
A folheação é Lipschitziana

Regularidade fraca das folheaçoẽs



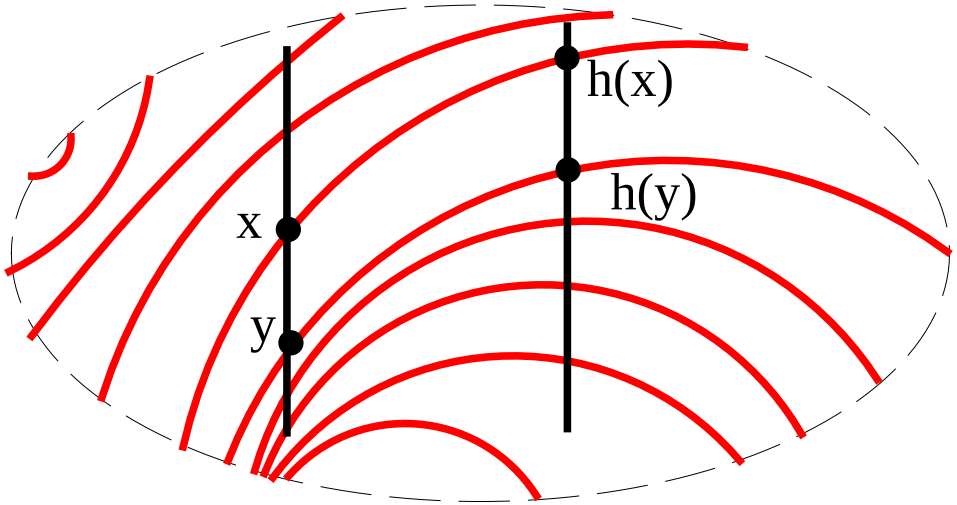
- $\{$ Folhas $\subset$ círculos $\}$ $\Longrightarrow$

Regularidade fraca das folheaçoẽs



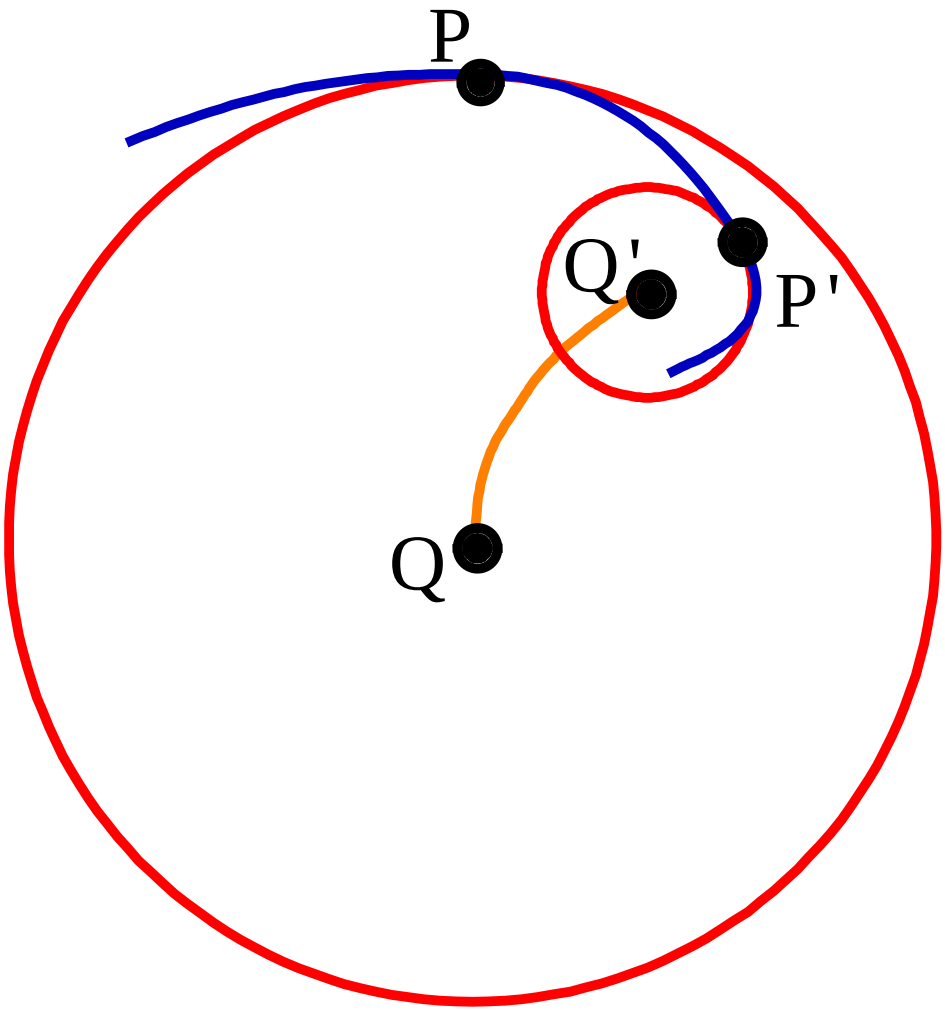
- $\{$ Folhas $\subset$ círculos $\}$ $\Longrightarrow$

Regularidade fraca das folheaçoẽs



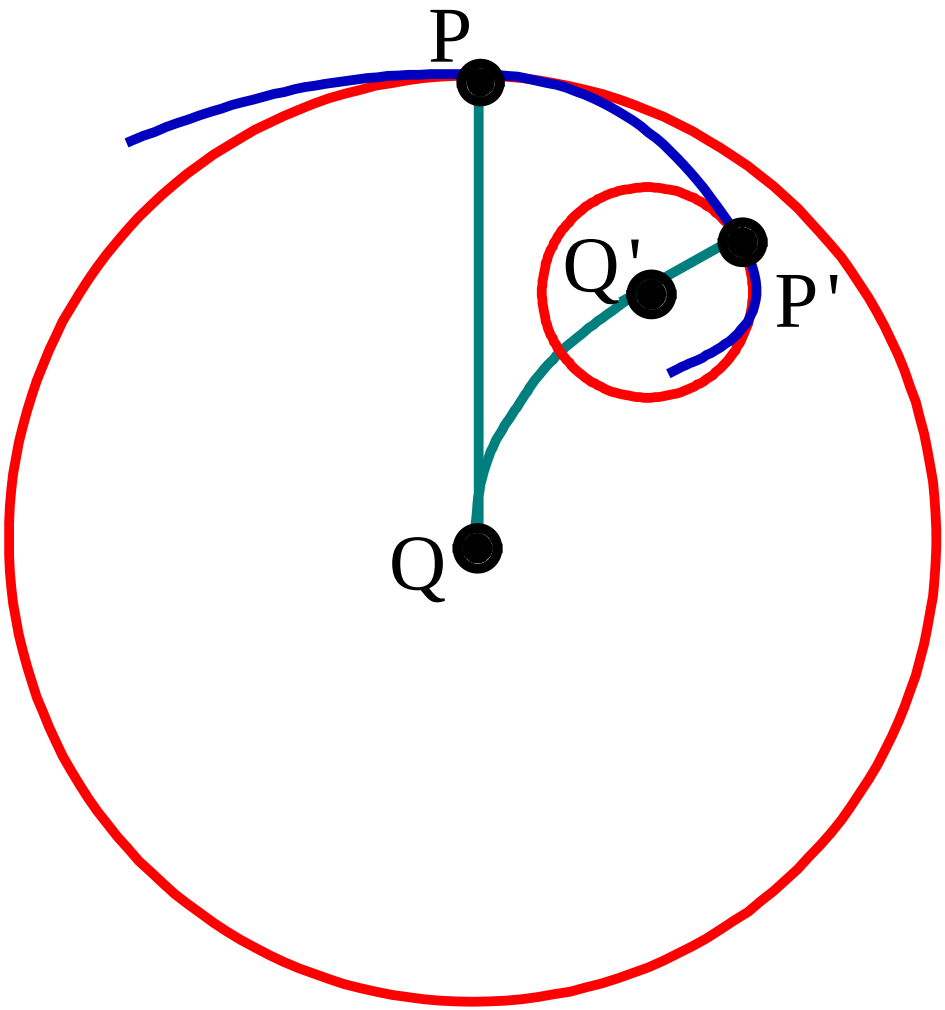
- { Folhas $\subset$ círculos } $\Longrightarrow$ NADA ! (Zeghib)

Prova do teorema de Tait–Kneser



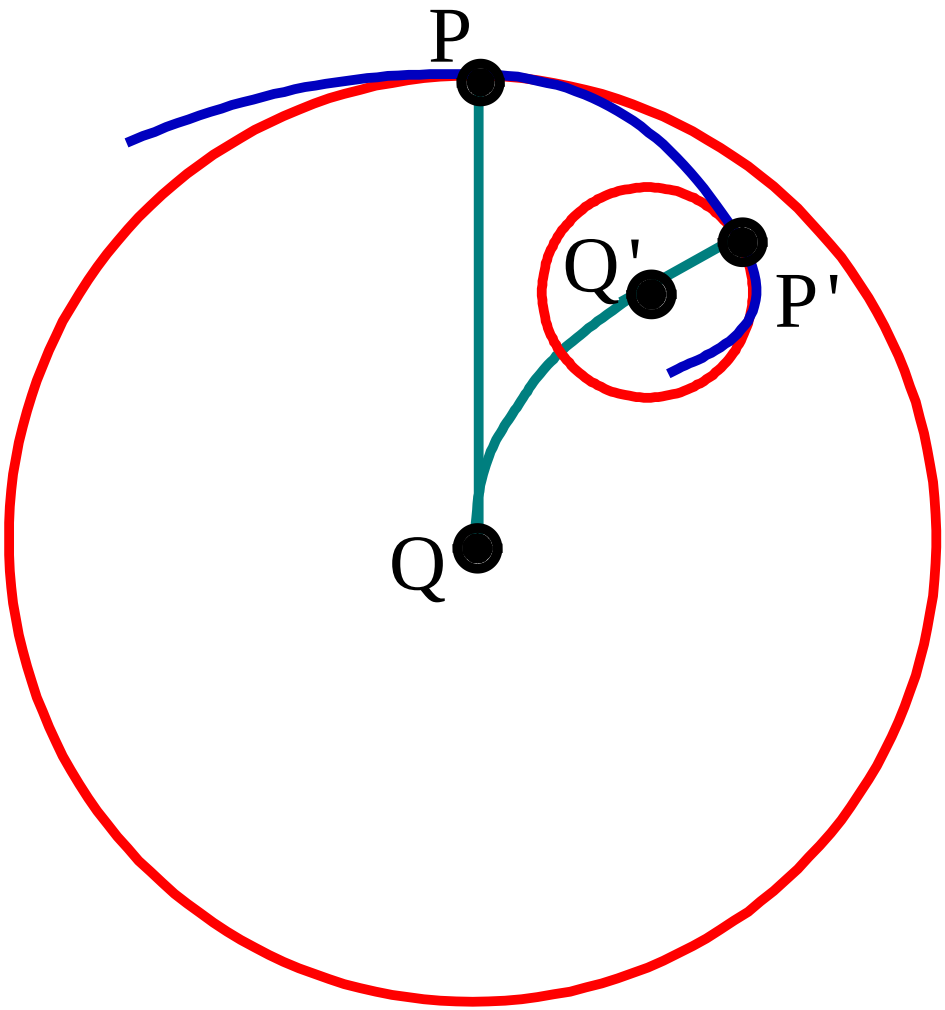
$$\overline{QP} = \overset{\frown}{QQ'} + \overline{Q'P'} \geq \overline{QQ'} + \overline{Q'P'} \quad \square$$

Prova do teorema de Tait–Kneser



$$\overline{QP} = \overset{\frown}{QQ'} + \overline{Q'P'} \geq \overline{QQ'} + \overline{Q'P'} \quad \square$$

Prova do teorema de Tait–Kneser



$$\overline{QP}$$

$$= \overset{\frown}{QQ'} + \overline{Q'P'}$$

$$\geq \overline{QQ'} + \overline{Q'P'} \quad \square$$

Aplicaçoẽs

- As transformaçoẽs de Möbius da esfera de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) levam círculos em círculos, e preservam a ordem de contato entre duas curvas.
- Portanto, as transformações de Möbius levam círculos osculadores em círculos osculadores.
- O módulo do anel definido por dois círculos osculadores é um invariante conforme.
- O anel infinitesimal entre s e $s + ds$ tem módulo $\sqrt{\frac{dk}{ds}}ds$.
- $\Rightarrow$ uma prova simples do teorema dos quatro vertices.

Aplicaçoẽs

- As transformaçoẽs de Möbius da esfera de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) levam círculos em círculos, e preservam a ordem de contato entre duas curvas.
- Portanto, as transformações de Möbius levam círculos osculadores em círculos osculadores.
- O módulo do anel definido por dois círculos osculadores é um invariante conforme.
- O anel infinitesimal entre s e $s + ds$ tem módulo $\sqrt{\frac{dk}{ds}}ds$.
- $\Rightarrow$ uma prova simples do teorema dos quatro vertices.

Aplicaçoẽs

- As transformaçoẽs de Möbius da esfera de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) levam círculos em círculos, e preservam a ordem de contato entre duas curvas.
- Portanto, as transformações de Möbius levam círculos osculadores em círculos osculadores.
- O módulo do anel definido por dois círculos osculadores é um invariante conforme.
- O anel infinitesimal entre s e $s + ds$ tem módulo $\sqrt{\frac{dk}{ds}}ds$.
- $\Rightarrow$ uma prova simples do teorema dos quatro vertices.

Aplicaçoẽs

- As transformaçoẽs de Möbius da esfera de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) levam círculos em círculos, e preservam a ordem de contato entre duas curvas.
- Portanto, as transformações de Möbius levam círculos osculadores em círculos osculadores.
- O módulo do anel definido por dois círculos osculadores é um invariante conforme.
- O anel infinitesimal entre s e $s + ds$ tem módulo $\sqrt{\frac{dk}{ds}}ds$.
- $\Rightarrow$ uma prova simples do teorema dos quatro vertices.

Aplicaçoẽs

- As transformaçoẽs de Möbius da esfera de Riemann ($z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$) levam círculos em círculos, e preservam a ordem de contato entre duas curvas.
- Portanto, as transformações de Möbius levam círculos osculadores em círculos osculadores.
- O módulo do anel definido por dois círculos osculadores é um invariante conforme.
- O anel infinitesimal entre s e $s + ds$ tem módulo $\sqrt{\frac{dk}{ds}}ds$.
- $\Rightarrow$ uma prova simples do teorema dos quatro vertices.

Polinômios de Taylor

- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$

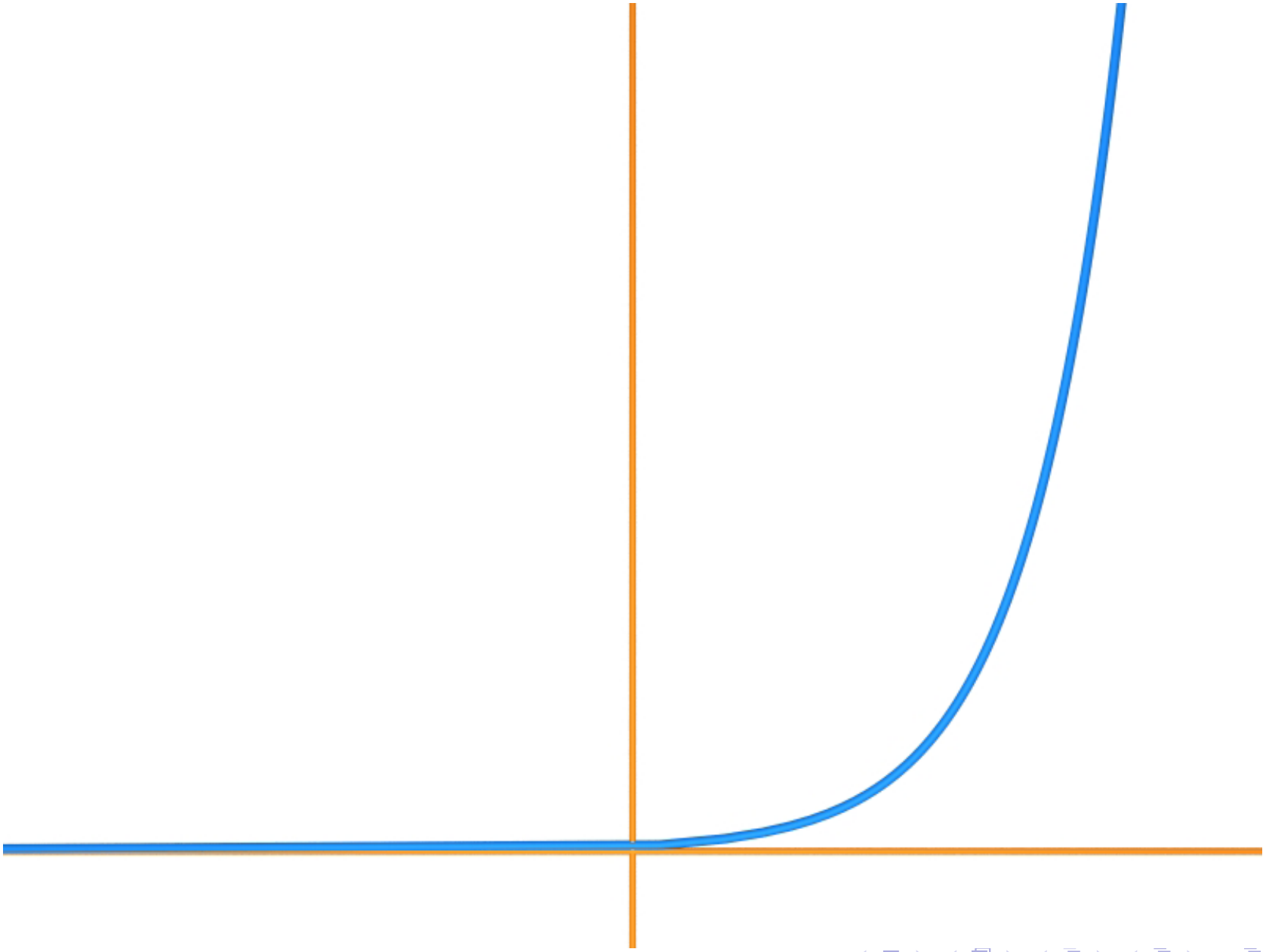
- $T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2} f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$

Polinômios de Taylor

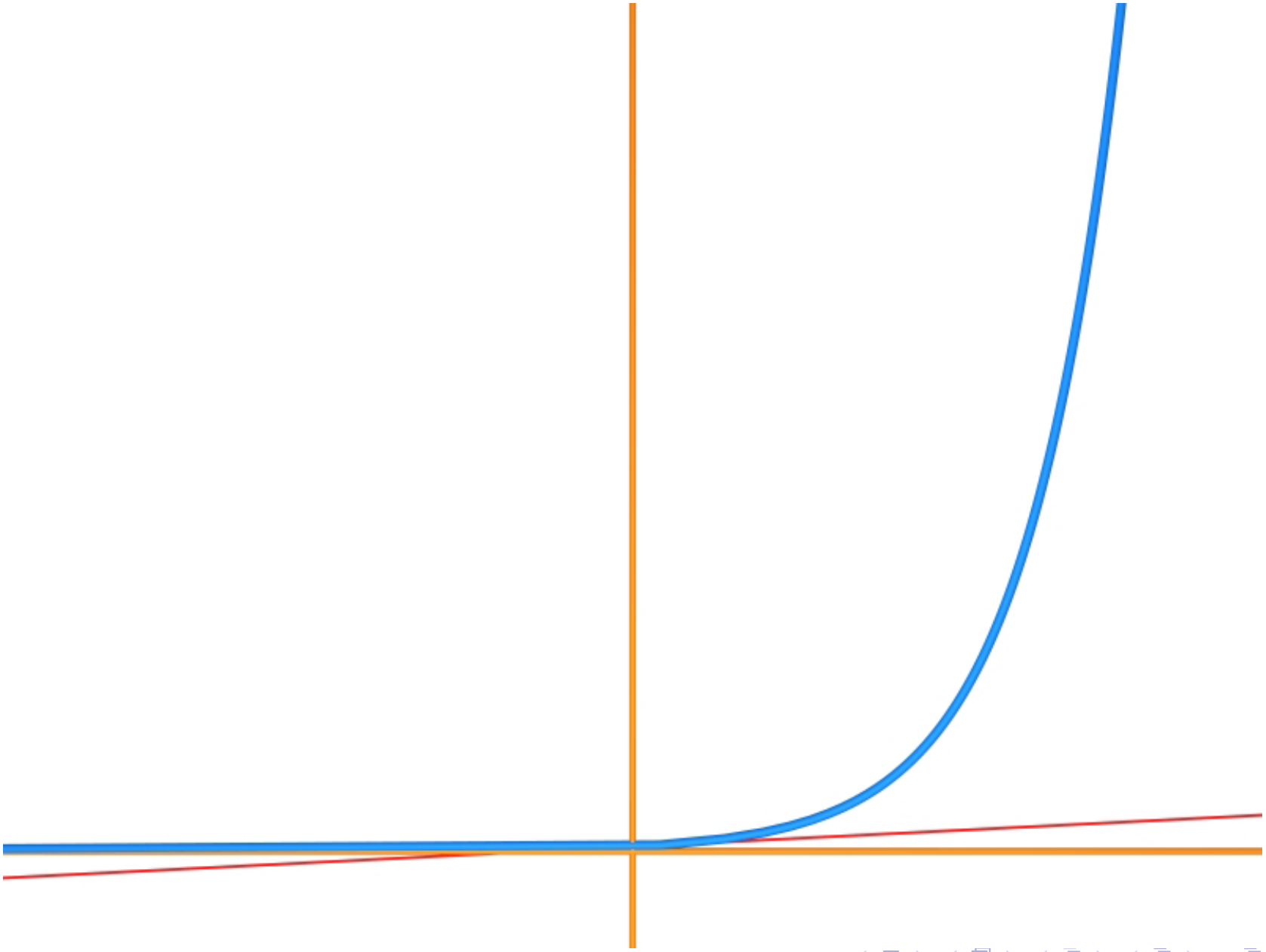
- $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$

- $T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X - t) + \frac{1}{2} f''(t)(X - t)^2 + \cdots + \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(t)(X - t)^{2k}$

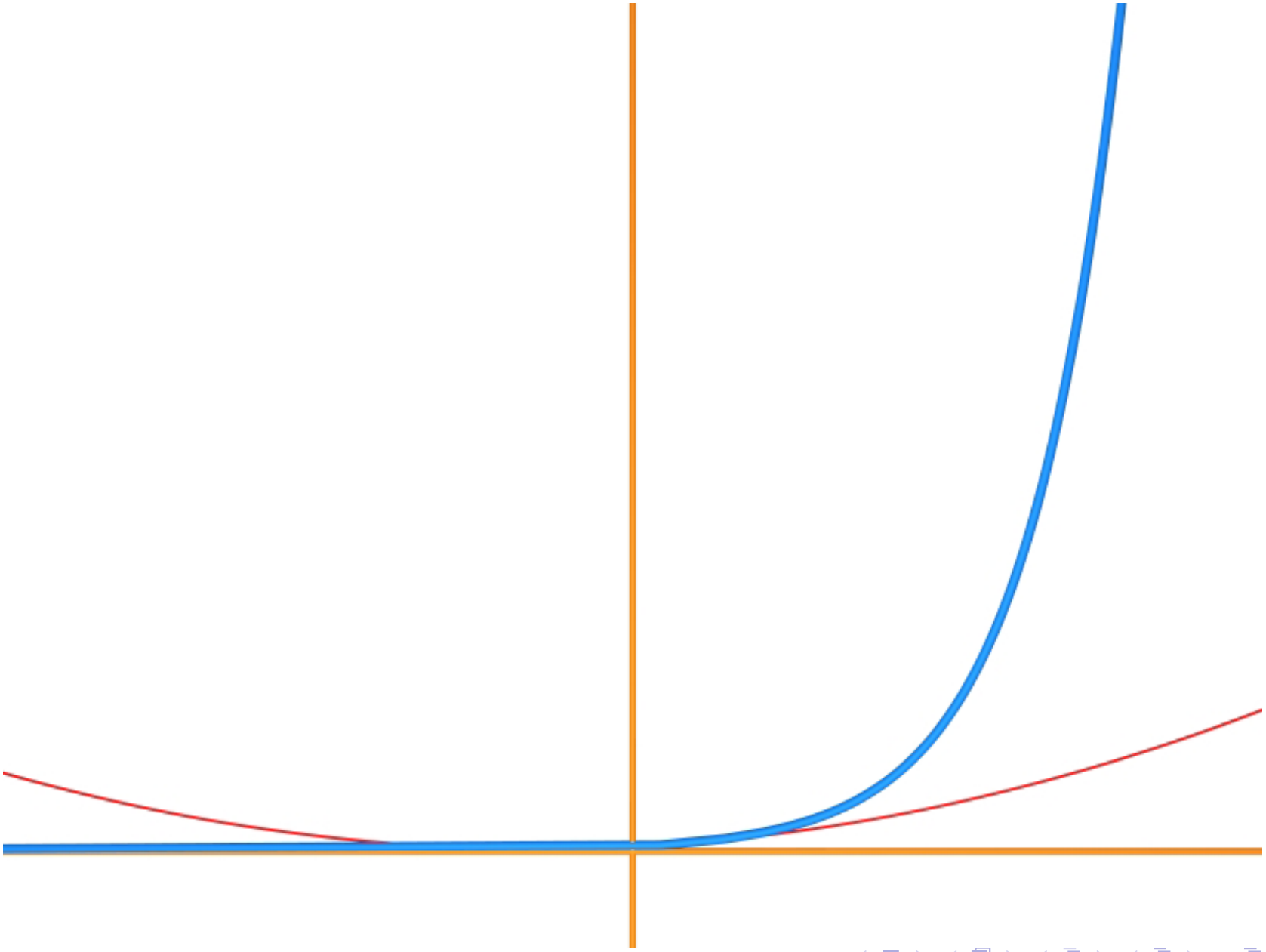
Polinômios de Taylor



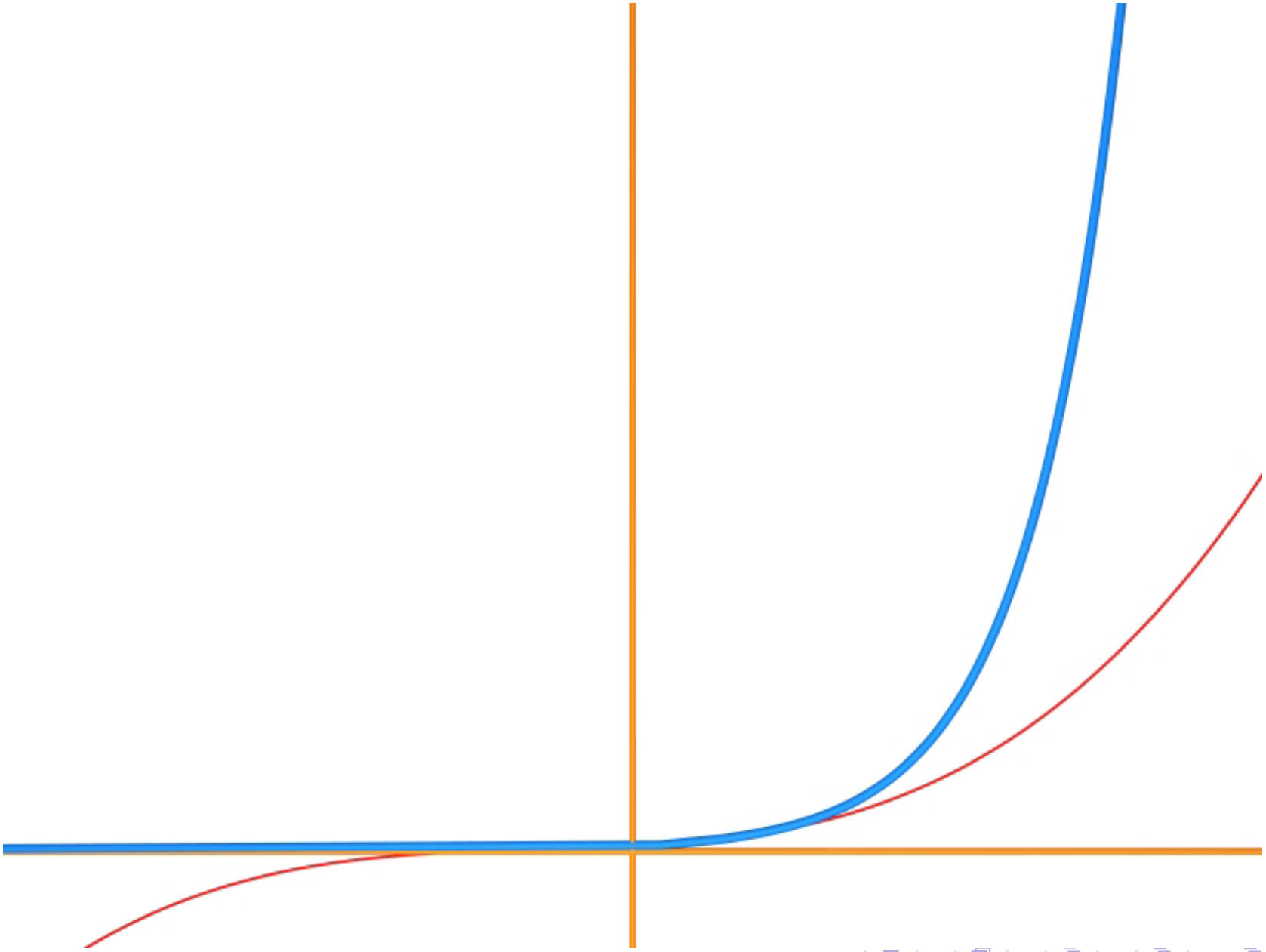
Polinômios de Taylor



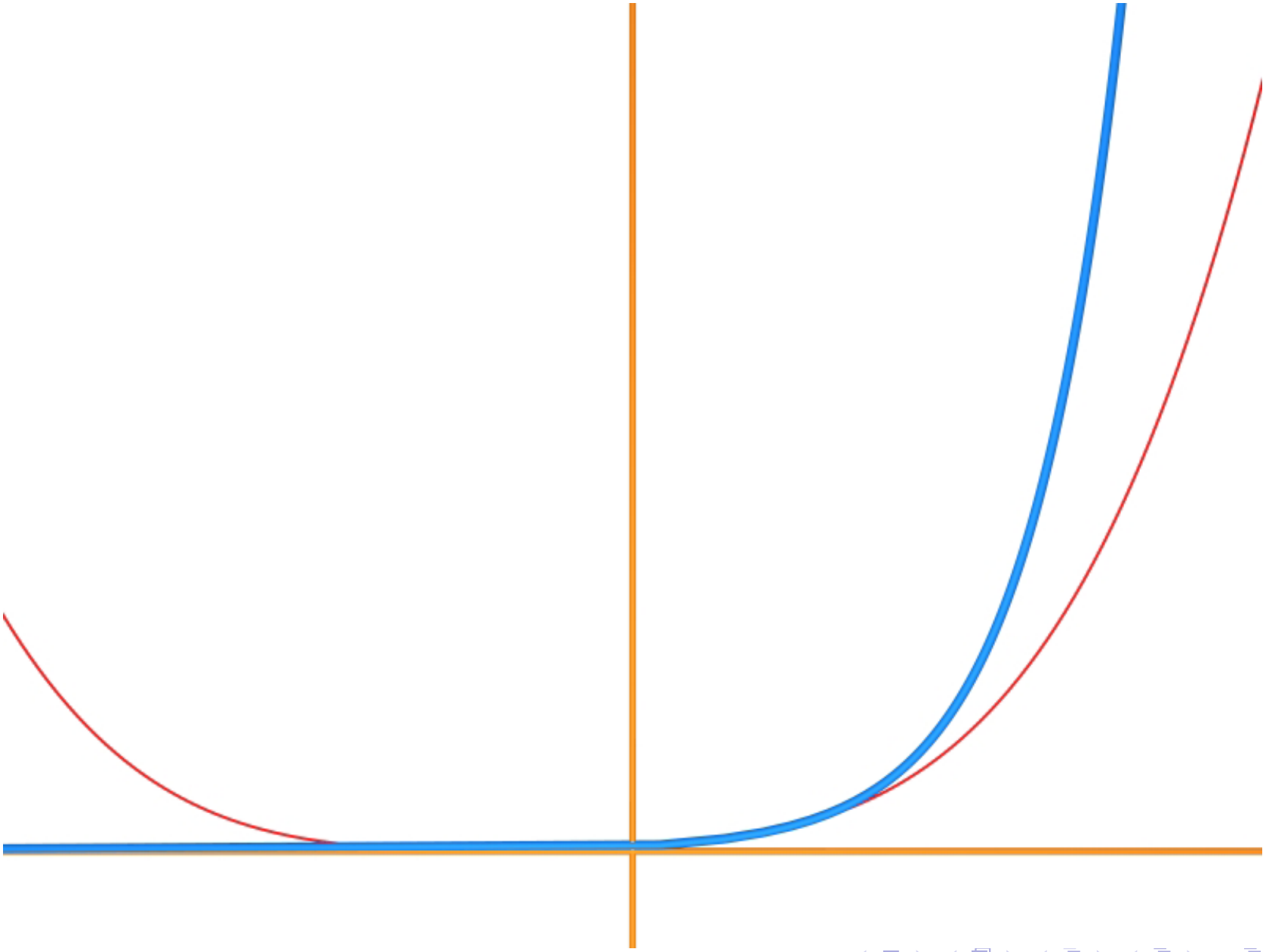
Polinômios de Taylor



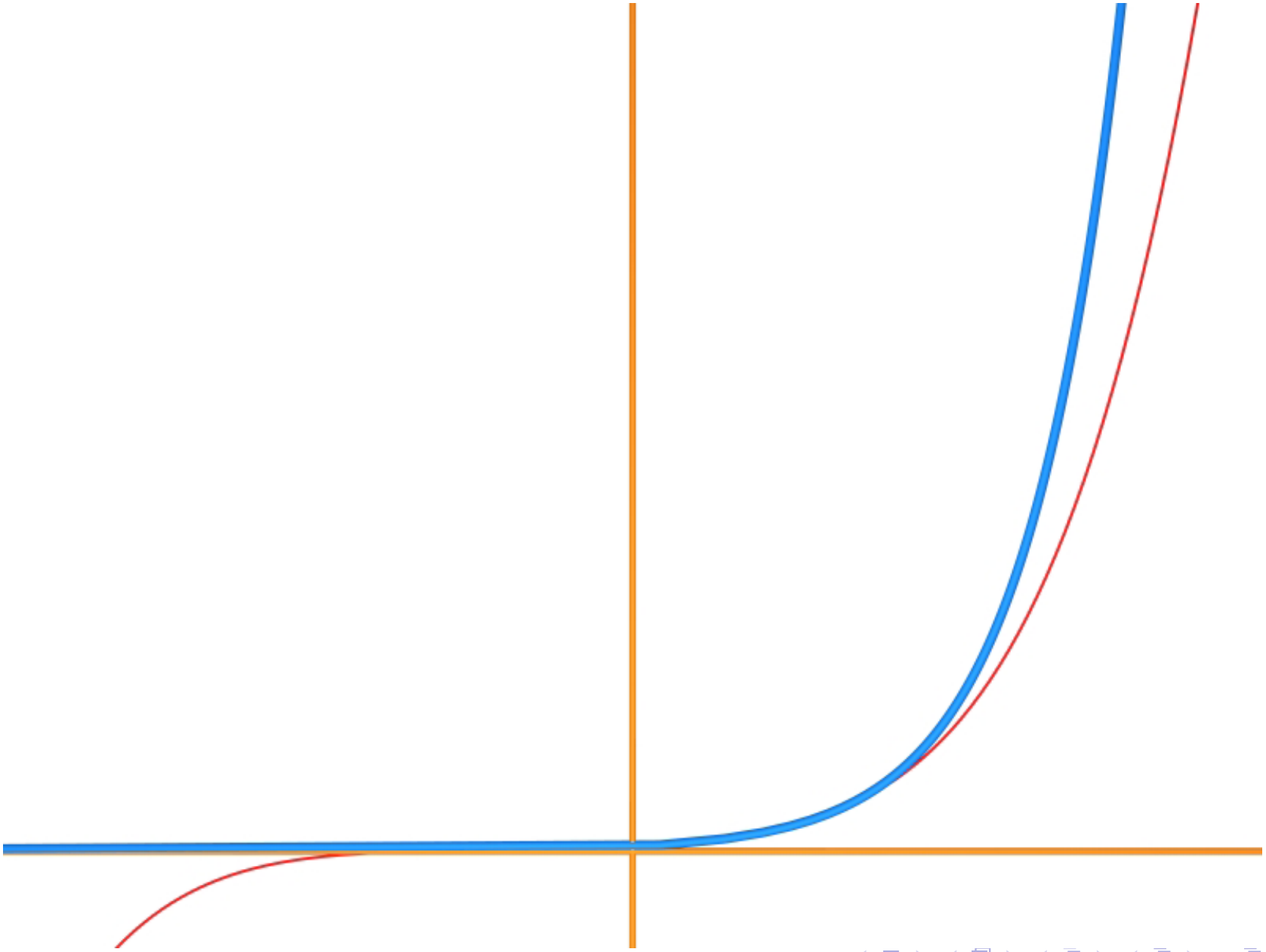
Polinômios de Taylor



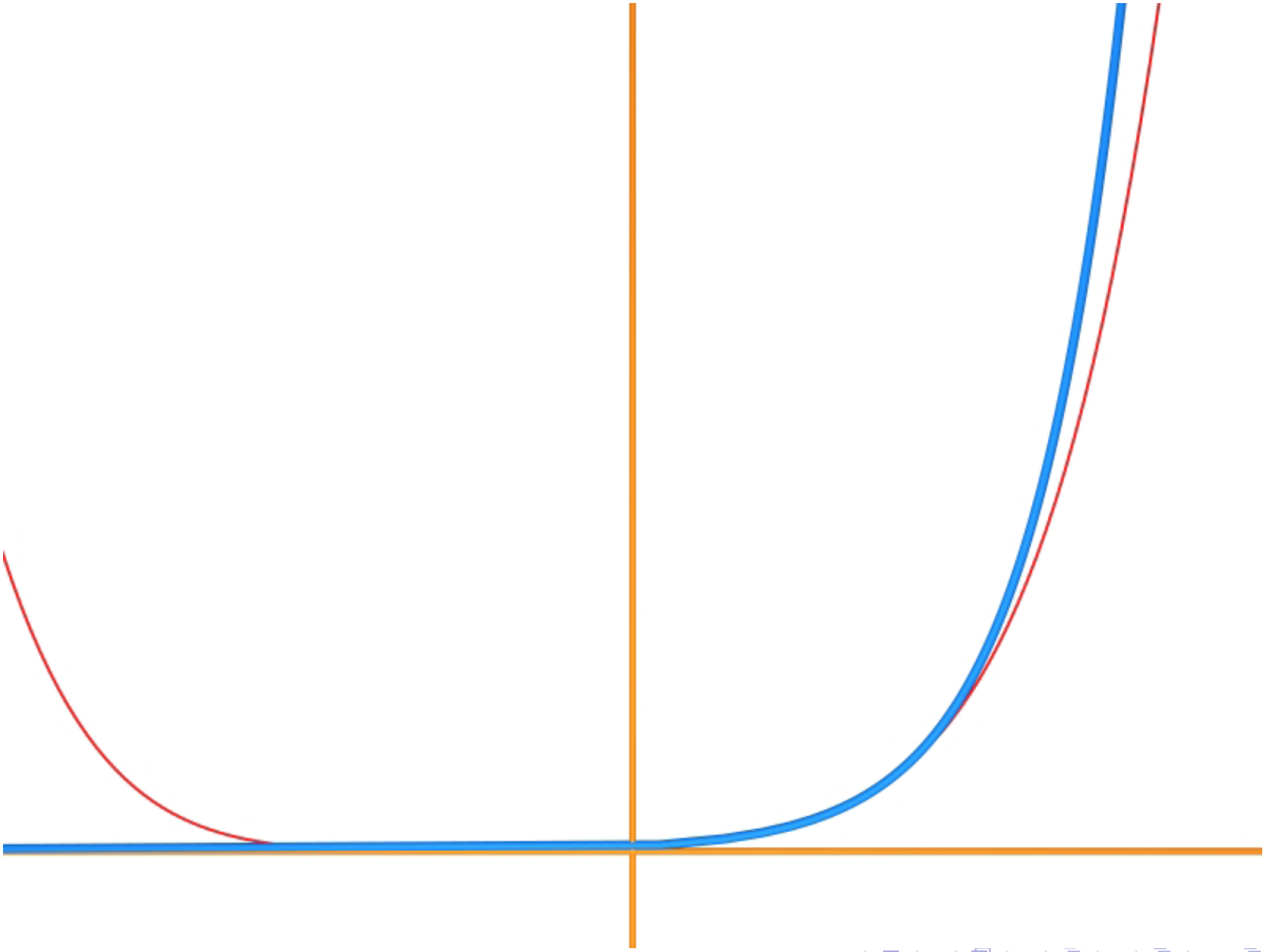
Polinômios de Taylor



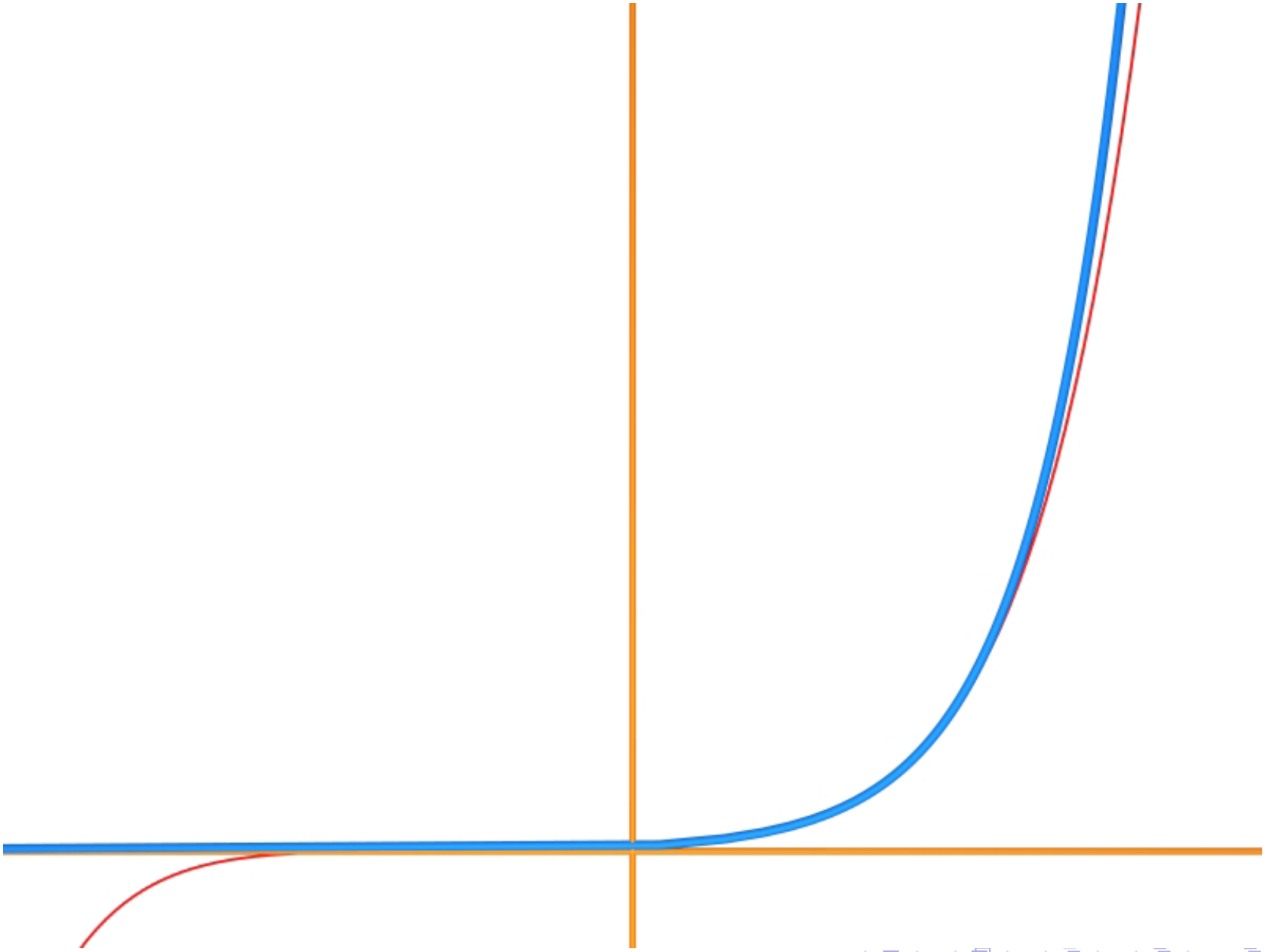
Polinômios de Taylor



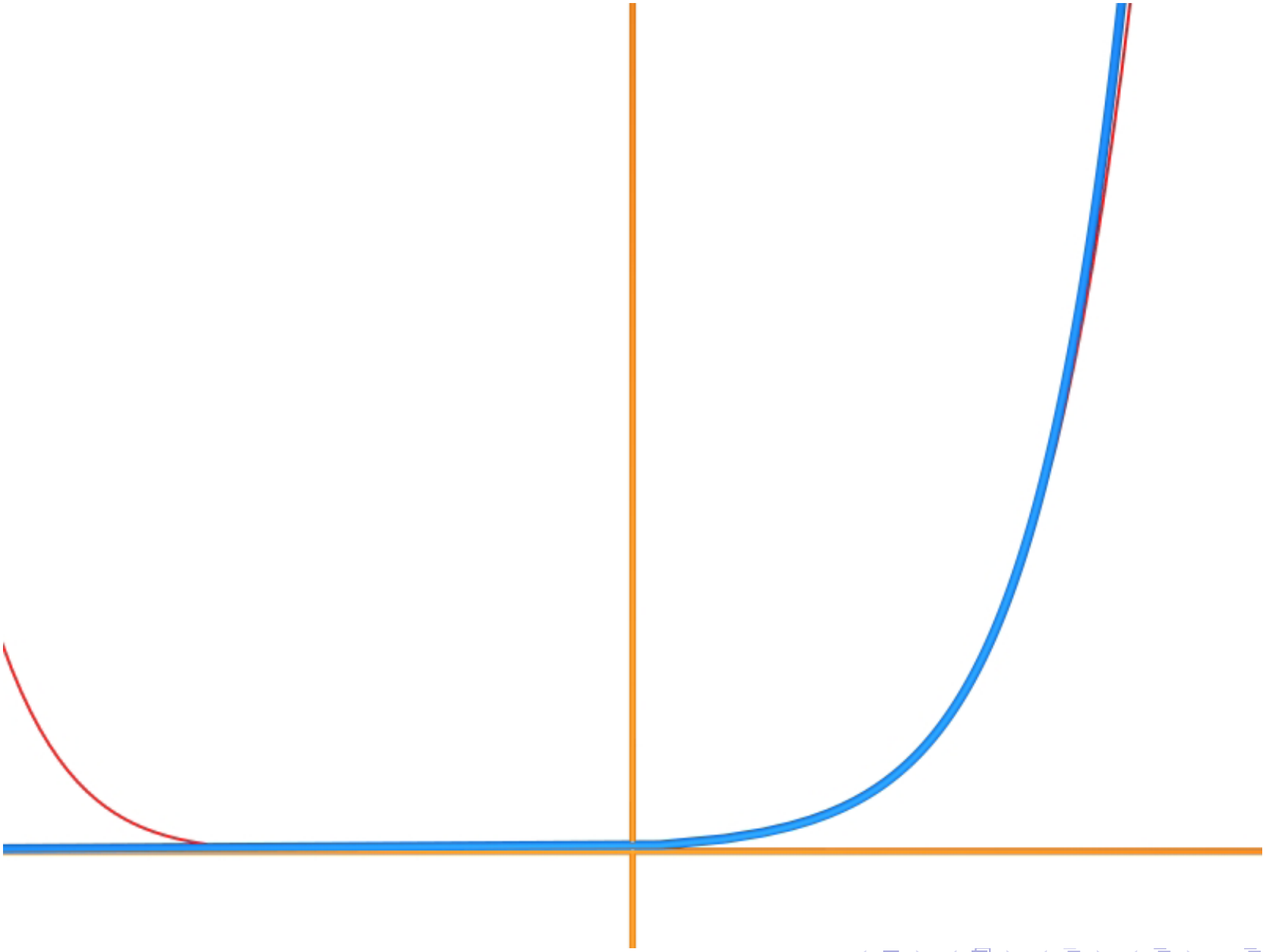
Polinômios de Taylor



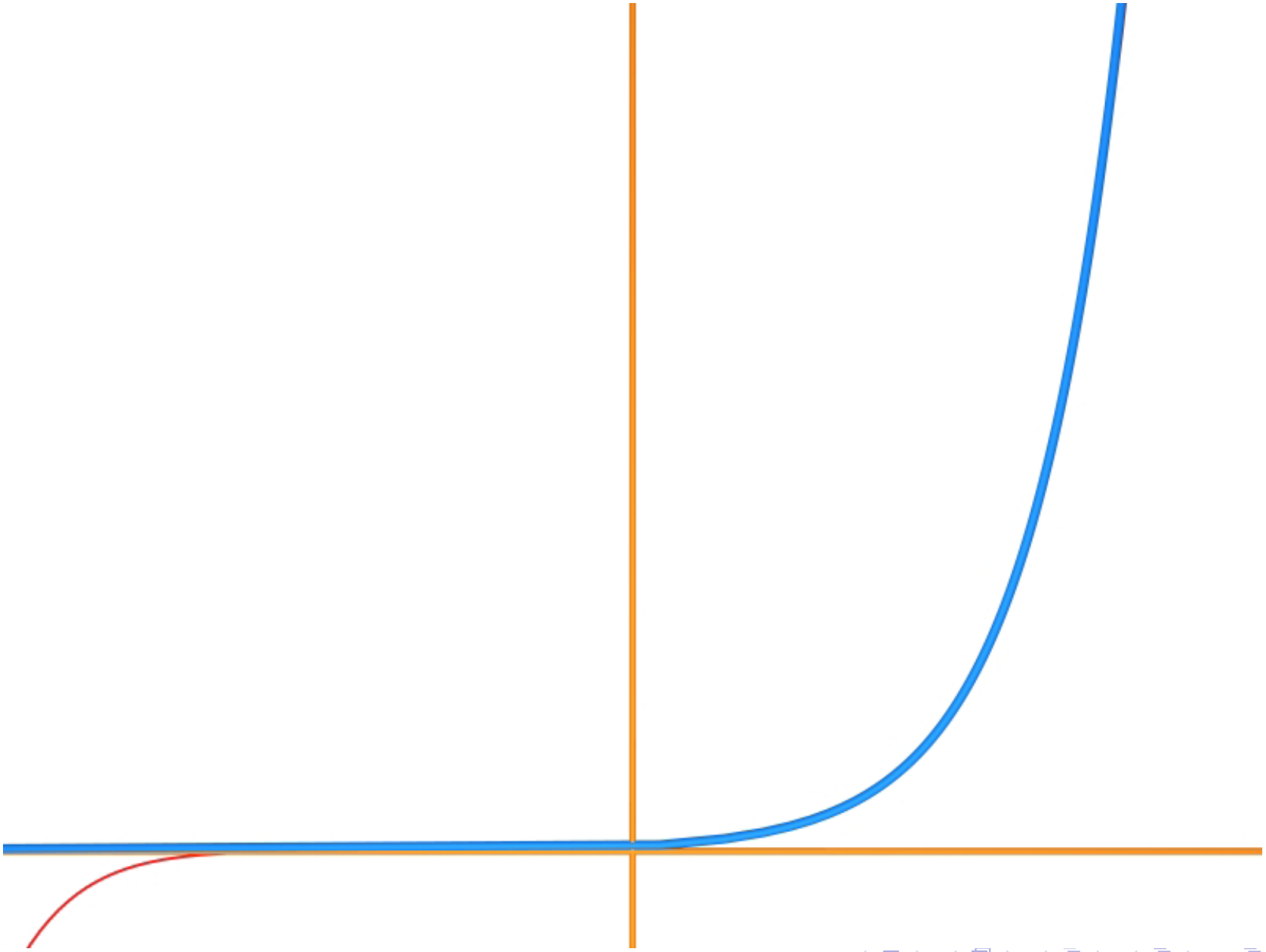
Polinômios de Taylor



Polinômios de Taylor



Polinômios de Taylor



Teorema

Se $f^{(2k+1)}$ não se anula no intervalo $[a, b]$, então os gráficos dos polinômios de Taylor $T_{f,t}^{2k}$ ($t \in [a, b]$) não se interceptam.

Exemplo

Prova

$$t \in [a,b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X-t) + \tfrac{1}{2}f''(t)(X-t)^2 + \cdots + \tfrac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!}f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}\,dt > 0 \qquad \square$$

Prova

$$t \in [a,b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X-t) + \tfrac{1}{2} f''(t)(X-t)^2 + \cdots + \tfrac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \frac{1}{(2k)!} f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!} f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}\, dt > 0 \qquad \square$$

Prova

$$t \in [a,b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X-t) + \tfrac{1}{2} f''(t)(X-t)^2 + \cdots + \tfrac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \frac{1}{(2k)!} f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!} f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}\, dt > 0 \qquad \square$$

Prova

$$t \in [a,b] \mapsto T_{f,t}^{2k} \in \mathbf{R}_{2k}[X]$$

$$T_{f,t}^{2k} = f(t) + f'(t)(X-t) + \tfrac{1}{2} f''(t)(X-t)^2 + \cdots + \tfrac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$\frac{dT_{f,t}^{2k}}{dt}(X) = \tfrac{1}{(2k)!} f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}$$

$$T_{f,b}^{2k}(X) - T_{f,a}^{2k}(X) = \int_a^b \frac{1}{(2k)!} f^{(2k+1)}(t)(X-t)^{2k}\, dt > 0 \qquad \square$$

Equações diferenciais de ordem ímpar

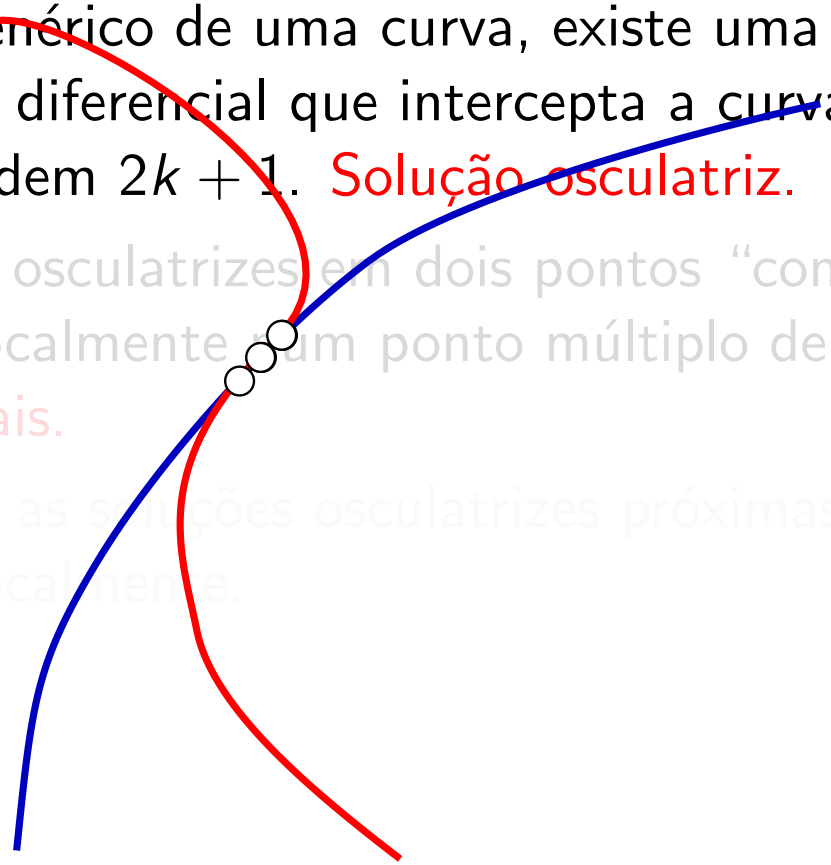
- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k + 1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.

Equações diferenciais de ordem ímpar

- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k + 1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.

Equações diferenciais de ordem ímpar

- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k+1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.

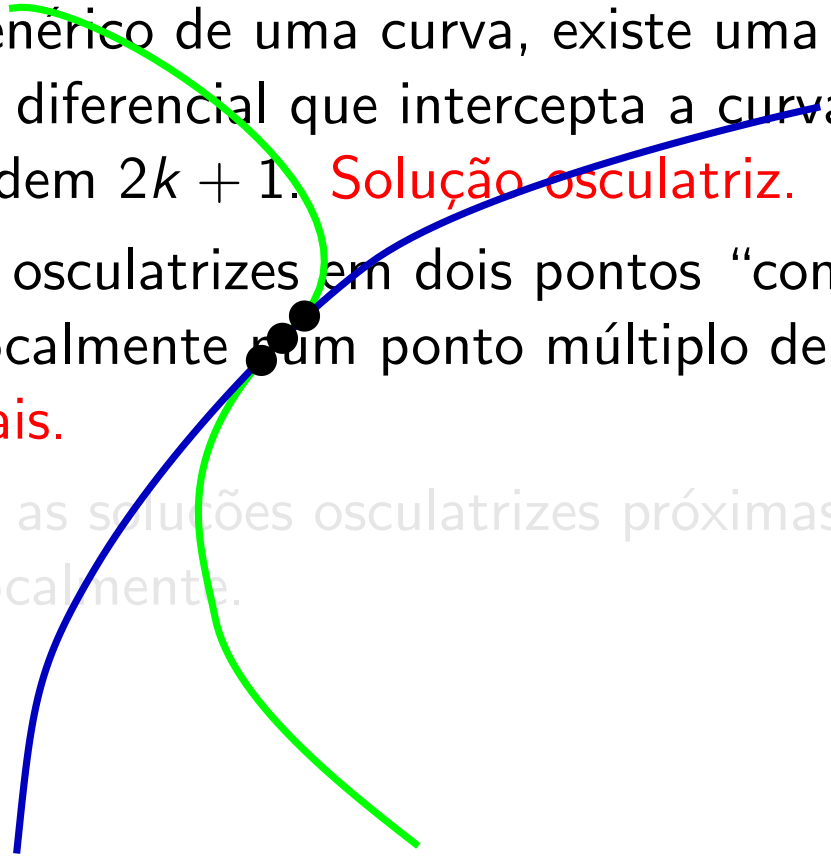


Equações diferenciais de ordem ímpar

- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k + 1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.

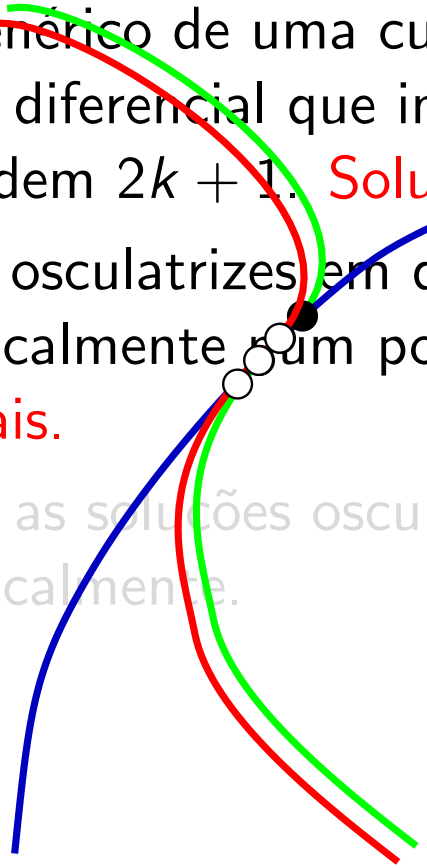
Equações diferenciais de ordem ímpar

- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k + 1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.



Equações diferenciais de ordem ímpar

- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k+1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.

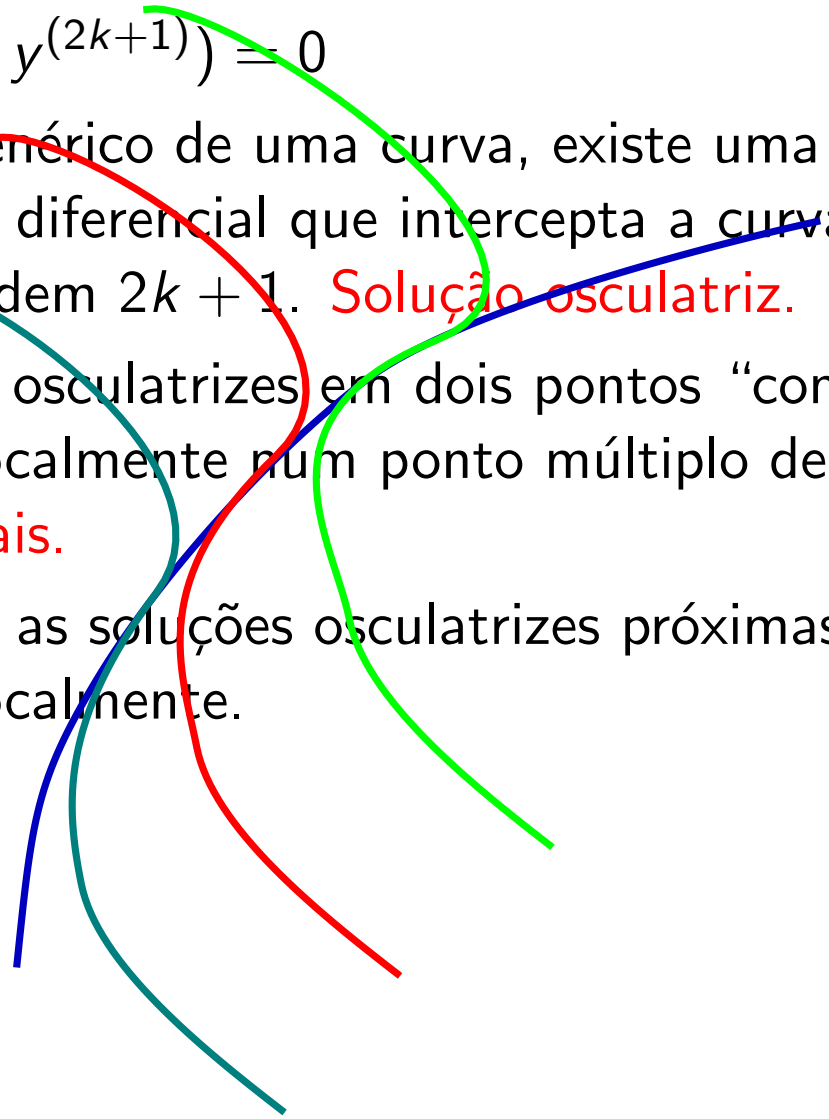


Equações diferenciais de ordem ímpar

- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k + 1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.

Equações diferenciais de ordem ímpar

- $F(x, y, y', \ldots, y^{(2k+1)}) = 0$
- Num ponto genérico de uma curva, existe uma única solucão desta equação diferencial que intercepta a curva num ponto múltiplo de ordem $2k+1$. Solução osculatriz.
- Duas soluções osculatrizes em dois pontos "consecutivos" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem $2k$. Pontos especiais.
- Em particular, as soluções osculatrizes próximas não se interceptam localmente.



Exemplos

- $y^{(2k+1)} = 0$ Polinômios de grau $2k$.
- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$ Círculos.
- $y^{(k)} = \frac{1}{x^{k-1}}$ Curvas tractrizes.

Exemplos

- $y^{(2k+1)} = 0$ Polinômios de grau $2k$.
- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$ Círculos.
- $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = 0$ Curvas de Lissajous.

Exemplos

- $y^{(2k+1)} = 0$ Polinômios de grau $2k$.
- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$ Círculos.
- $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = 0$ Derivada de Schwarz, $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Exemplos

- $y^{(2k+1)} = 0$ Polinômios de grau $2k$.
- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$ Círculos.
- $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = 0$ Derivada de Schwarz, $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Exemplos

- $y^{(2k+1)} = 0$ Polinômios de grau $2k$.
- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$ Círculos.
- $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = 0$ Derivada de Schwarz, $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Exemplos

- $y^{(2k+1)} = 0$ Polinômios de grau $2k$.
- $y''' = \frac{3y'y''^2}{1+y'^2}$ Círculos.
- $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = 0$ Derivada de Schwarz, $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Quatro vértices para difeomorfismos do círculo

Seja $f : [a, b] \to \mathbf{RP}^1$ um difeomorfismo local. Suponhamos que a derivada de Schwarz de f não se anule no intervalo $[a, b]$. Se $x \in [a, b]$, considere a aplicação de Möbius m_x que "oscula" f no ponto x na ordem 3. Então, os gráficos dos m_x em $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ não se interceptam.

Para qualquer difeomorfismo do círculo ($\simeq \mathbf{RP}^1$), a derivada de Schwarz tem pelo menos quatro zeros.

Quatro vértices para difeomorfismos do círculo

Seja $f : [a, b] \to \mathbf{RP}^1$ um difeomorfismo local. Suponhamos que a derivada de Schwarz de f não se anule no intervalo $[a, b]$. Se $x \in [a, b]$, considere a aplicação de Möbius m_x que "oscula" f no ponto x na ordem 3. Então, os gráficos dos m_x em $\mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1$ não se interceptam.

Para qualquer difeomorfismo do círculo ($\simeq \mathbf{RP}^1$), a derivada de Schwarz tem pelo menos quatro zeros.

A equação de Monge

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^{v}/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

A equação de Monge

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^{v}/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

- As cônicas dependem de cinco parâmetros.

A equação de Monge

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^{v}/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

- As cônicas dependem de cinco parâmetros.
- Duas cônicas se interceptam em quatro pontos no máximo.

A equação de Monge

$$\begin{vmatrix} y''/2 & y'''/6 & 0 \\ y'''/6 & y^{iv}/24 & (y''/2)^2 \\ y^{iv}/24 & y^{v}/120 & y''y'''/6 \end{vmatrix} = 0$$

- As cônicas dependem de cinco parâmetros.
- Duas cônicas se interceptam em quatro pontos no máximo.
- Pontos especiais são chamados pontos sextáticos.

Cônicas osculatrizes

Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes não se interceptam.

Duas cônicas osculatrizes "consecutivas" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem 4. Mas duas cônicas se interceptam no máximo em quatro pontos !

Cônicas osculatrizes

Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes não se interceptam.

Duas cônicas osculatrizes "consecutivas" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem 4. Mas duas cônicas se interceptam no máximo em quatro pontos !

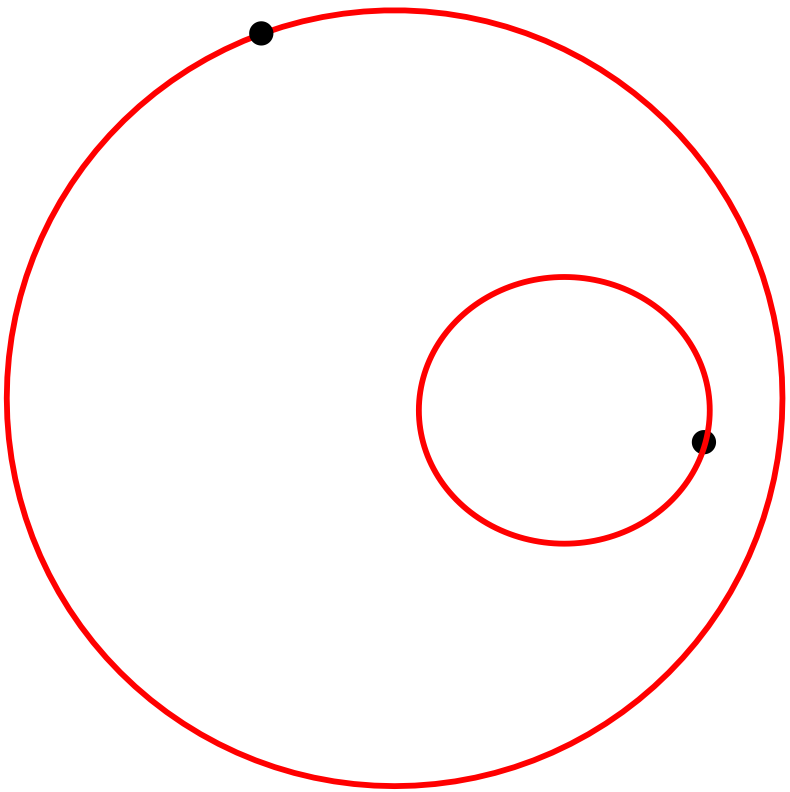
Cônicas osculatrizes

Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes não se interceptam.

Duas cônicas osculatrizes "consecutivas" se interceptam localmente num ponto múltiplo de ordem 4. Mas duas cônicas se interceptam no máximo em quatro pontos !

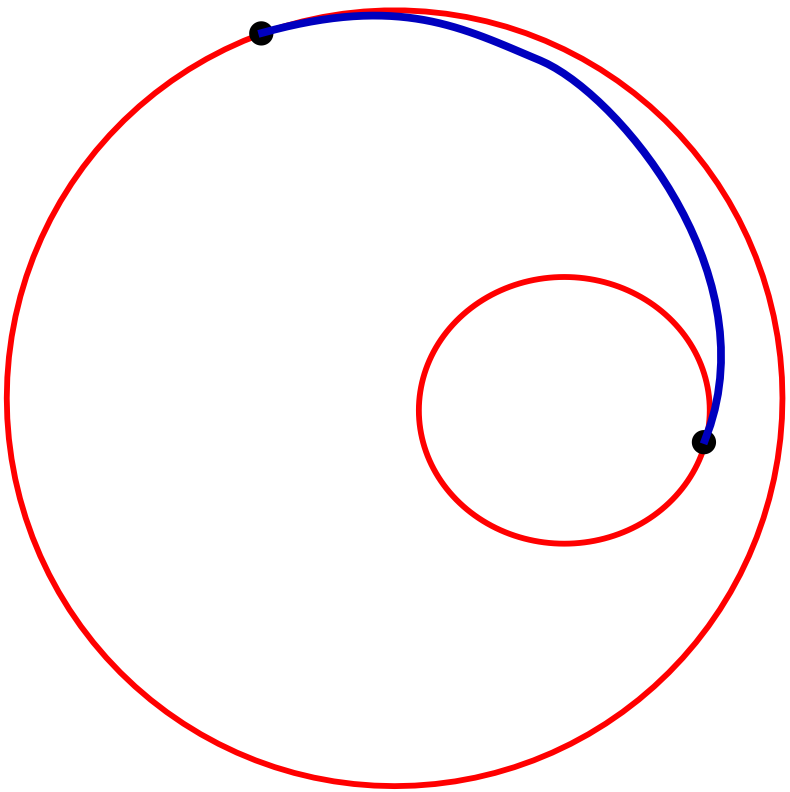
Cônicas osculatrizes

É possível melhorar ?



Existe uma curva sem vértices ?

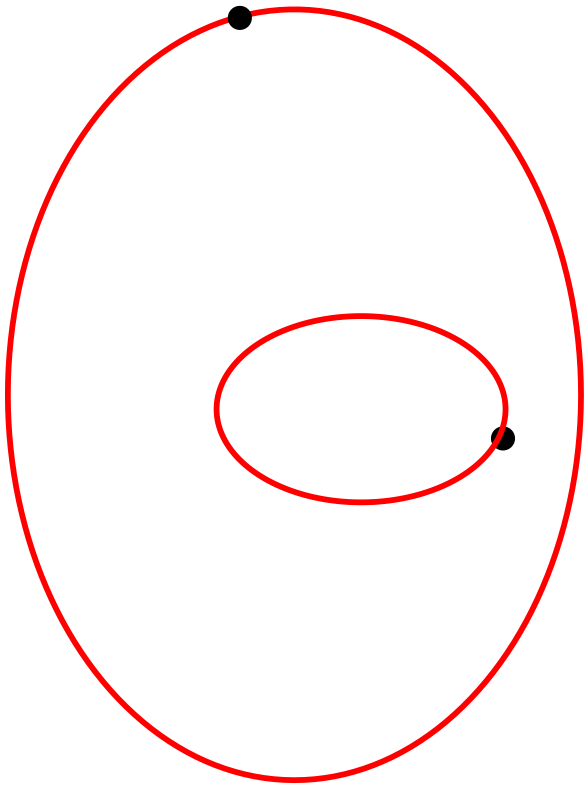
É possível melhorar ?



Existe uma curva sem vértices ?

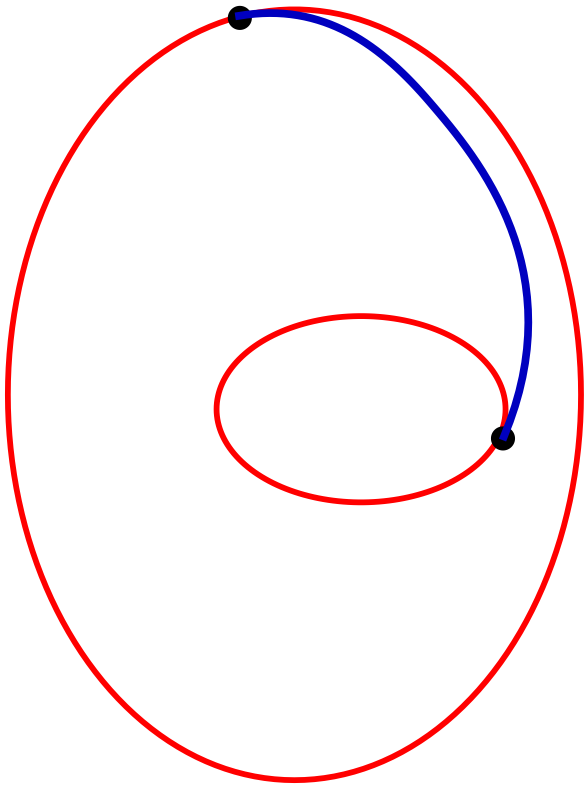
Sim ! (Vogt, 1920)

É possível melhorar ?



Existe uma curva sem pontos sextáticos ?

É possível melhorar ?



Existe uma curva sem pontos sextáticos ?

Em geral, não !

Ordenar as cônicas

Proposição

Existe uma família de relações de ordem $\subset_\lambda$ no conjunto das cônicas não singulares do plano projetivo real $\mathbf{RP}^2$*, dependendo de um parâmetro* $\lambda \in [0,1]$*, tal que :*

- $\subset_\lambda$ *é invariante por transformações projetivas.*
- $C \subset_0 C'$ *significa que o interior de* C *esta no interior de* C'*.*
- *Se* $\lambda \leq \mu$ *e* $C \subset_\mu C'$ *então* $C \subset_\lambda C'$*.*
- *As relações* $\subset_\lambda$ *são as únicas relações de ordem "razoáveis" no conjunto das cônicas.*
- *Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes são ordenadas com respeito a* $\subset_1$*.*
- *Reciprocamente, dadas duas cônicas* $C \subset_1 C'$ *e dois pontos* p, p' *em* C, C'*, existe uma curva sem ponto sextático ligando* p *e* p'*.*

Ordenar as cônicas

Proposição

Existe uma família de relações de ordem $\subset_\lambda$ no conjunto das cônicas não singulares do plano projetivo real $\mathbf{RP}^2$*, dependendo de um parâmetro* $\lambda \in [0,1]$*, tal que :*

- $\subset_\lambda$ *é invariante por transformações projetivas.*
- $C \subset_0 C'$ *significa que o interior de* C *esta no interior de* C'*.*
- *Se* $\lambda \leq \mu$ *e* $C \subset_\mu C'$ *então* $C \subset_\lambda C'$*.*
- *As relações* $\subset_\lambda$ *são as únicas relações de ordem "razoáveis" no conjunto das cônicas.*
- *Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes são ordenadas com respeito a* $\subset_1$*.*
- *Reciprocamente, dadas duas cônicas* $C \subset_1 C'$ *e dois pontos* p, p' *em* C, C'*, existe uma curva sem ponto sextático ligando* p *e* p'*.*

Ordenar as cônicas

Proposição

Existe uma família de relações de ordem $\subset_\lambda$ no conjunto das cônicas não singulares do plano projetivo real $\mathbf{RP}^2$*, dependendo de um parâmetro* $\lambda \in [0,1]$*, tal que :*

- $\subset_\lambda$ *é invariante por transformações projetivas.*
- $C \subset_0 C'$ *significa que o interior de* C *esta no interior de* C'*.*
- *Se* $\lambda \leq \mu$ *e* $C \subset_\mu C'$ *então* $C \subset_\lambda C'$*.*
- *As relações* $\subset_\lambda$ *são as únicas relações de ordem "razoáveis" no conjunto das cônicas.*
- *Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes são ordenadas com respeito a* $\subset_1$*.*
- *Reciprocamente, dadas duas cônicas* $C \subset_1 C'$ *e dois pontos* p, p' *em* C, C'*, existe uma curva sem ponto sextático ligando* p *e* p'*.*

Ordenar as cônicas

Proposição

Existe uma família de relações de ordem $\subset_\lambda$ no conjunto das cônicas não singulares do plano projetivo real $\mathbf{RP}^2$*, dependendo de um parâmetro* $\lambda \in [0,1]$*, tal que :*

- $\subset_\lambda$ *é invariante por transformações projetivas.*
- $C \subset_0 C'$ *significa que o interior de* C *esta no interior de* C'*.*
- *Se* $\lambda \leq \mu$ *e* $C \subset_\mu C'$ *então* $C \subset_\lambda C'$*.*
- *As relações* $\subset_\lambda$ *são as únicas relações de ordem "razoáveis" no conjunto das cônicas.*
- *Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes são ordenadas com respeito a* $\subset_1$*.*
- *Reciprocamente, dadas duas cônicas* $C \subset_1 C'$ *e dois pontos* p, p' *em* C, C'*, existe uma curva sem ponto sextático ligando* p *e* p'*.*

Ordenar as cônicas

Proposição

Existe uma família de relações de ordem $\subset_\lambda$ no conjunto das cônicas não singulares do plano projetivo real $\mathbf{RP}^2$*, dependendo de um parâmetro* $\lambda \in [0,1]$*, tal que :*

- $\subset_\lambda$ *é invariante por transformações projetivas.*
- $C \subset_0 C'$ *significa que o interior de* C *esta no interior de* C'*.*
- *Se* $\lambda \leq \mu$ *e* $C \subset_\mu C'$ *então* $C \subset_\lambda C'$*.*
- *As relações* $\subset_\lambda$ *são as únicas relações de ordem "razoáveis" no conjunto das cônicas.*
- *Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes são ordenadas com respeito a* $\subset_1$*.*
- *Reciprocamente, dadas duas cônicas* $C \subset_1 C'$ *e dois pontos* p, p' *em* C, C'*, existe uma curva sem ponto sextático ligando* p *e* p'*.*

Ordenar as cônicas

Proposição

Existe uma família de relações de ordem $\subset_\lambda$ no conjunto das cônicas não singulares do plano projetivo real $\mathbf{RP}^2$, dependendo de um parâmetro $\lambda \in [0,1]$, tal que :

- *$\subset_\lambda$ é invariante por transformações projetivas.*
- *$C \subset_0 C'$ significa que o interior de C esta no interior de C'.*
- *Se $\lambda \leq \mu$ e $C \subset_\mu C'$ então $C \subset_\lambda C'$.*
- *As relações $\subset_\lambda$ são as únicas relações de ordem "razoáveis" no conjunto das cônicas.*
- *Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes são ordenadas com respeito a $\subset_1$.*
- *Reciprocamente, dadas duas cônicas $C \subset_1 C'$ e dois pontos p, p' em C, C', existe uma curva sem ponto sextático ligando p e p'.*

Ordenar as cônicas

Proposição

Existe uma família de relações de ordem $\subset_\lambda$ no conjunto das cônicas não singulares do plano projetivo real $\mathbf{RP}^2$, dependendo de um parâmetro $\lambda \in [0,1]$, tal que :

- *$\subset_\lambda$ é invariante por transformações projetivas.*
- *$C \subset_0 C'$ significa que o interior de C esta no interior de C'.*
- *Se $\lambda \leq \mu$ e $C \subset_\mu C'$ então $C \subset_\lambda C'$.*
- *As relações $\subset_\lambda$ são as únicas relações de ordem "razoáveis" no conjunto das cônicas.*
- *Se uma curva não contém pontos sextáticos, as cônicas osculatrizes são ordenadas com respeito a $\subset_1$.*
- *Reciprocamente, dadas duas cônicas $C \subset_1 C'$ e dois pontos p, p' em C, C', existe uma curva sem ponto sextático ligando p e p'.*

Definição de $\subset_1$

Definição

Sejam C, C' duas cônicas, definidas por matrizes 3×3 simétricas A, A', com dois autovalores positivos e um negativo.

Normalize de tal maneira que $\det(A) = \det(A')$.

Digamos que $C \subset_1 C'$ se $A' - A$ é positiva definida.

Exemplo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad (C')$$

Definição de $\subset_1$

Definição

Sejam C, C' duas cônicas, definidas por matrizes 3×3 simétricas A, A', com dois autovalores positivos e um negativo.

Normalize de tal maneira que $\det(A) = \det(A')$.

Digamos que $C \subset_1 C'$ se $A' - A$ é positiva definida.

Exemplo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

$$C \subset_0 C' \iff a, b > 1$$

$$C \subset_1 C' \iff a, b \geq 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \leq b < a$$

Definição de $\subset_1$

Definição

Sejam C, C' duas cônicas, definidas por matrizes 3×3 simétricas A, A', com dois autovalores positivos e um negativo.

Normalize de tal maneira que $\det(A) = \det(A')$.

Digamos que $C \subset_1 C'$ se $A' - A$ é positiva definida.

Exemplo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

- $C \subset_0 C' \iff a, b \geq 1$
- $C \subset_1 C' \iff a, b \geq 1$ e $\sqrt{a} \leq b \leq a^2$

Definição de $\subset_1$

Definição

Sejam C, C' duas cônicas, definidas por matrizes 3×3 simétricas A, A', com dois autovalores positivos e um negativo.

Normalize de tal maneira que $\det(A) = \det(A')$.

Digamos que $C \subset_1 C'$ se $A' - A$ é positiva definida.

Exemplo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

- $C \subset_0 C' \iff a, b \geq 1$
- $C \subset_1 C' \iff a, b \geq 1$ e $\sqrt{a} \leq b \leq a^2$

Definição de $\subset_1$

Definição

Sejam C, C' duas cônicas, definidas por matrizes 3×3 simétricas A, A', com dois autovalores positivos e um negativo.

Normalize de tal maneira que $\det(A) = \det(A')$.

Digamos que $C \subset_1 C'$ se $A' - A$ é positiva definida.

Exemplo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

- $C \subset_0 C' \iff a, b \geq 1$
- $C \subset_1 C' \iff a, b \geq 1$ e $\sqrt{a} \leq b \leq a^2$

Definição de $\subset_1$

Definição

Sejam C, C' duas cônicas, definidas por matrizes 3×3 simétricas A, A', com dois autovalores positivos e um negativo.

Normalize de tal maneira que $\det(A) = \det(A')$.

Digamos que $C \subset_1 C'$ se $A' - A$ é positiva definida.

Exemplo

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (C) \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (C')$$

- $C \subset_0 C' \iff a, b \geq 1$
- $C \subset_1 C' \iff a, b \geq 1$ e $\sqrt{a} \leq b \leq a^2$

A equação de Halphen

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_3a_3 + 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 & 0 & a_2^3 & 3a_2^2a_3 & 3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2 & a_3^3 + 6a_2a_2a_4 + 3a_2^2a_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_i := y^{(i)}/i!$$

A equação de Halphen

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_3a_3 + 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 & 0 & a_2^3 & 3a_2^2a_3 & 3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2 & a_3^3 + 6a_2a_2a_4 + 3a_2^2a_5 \end{vmatrix} = 0$$

$a_i := y^{(i)}/i!$

Cúbicas !

O paradoxo de Cramer

- As curvas algébricas de grau d dependem de $d(d+3)/2$ parâmetros.
- Duas curvas de grau d se interceptam (en geral) em d^2 pontos (complexos).
- Se $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), ainda é verdade que as curvas algébricas osculatrizes de grau d não se interceptam *localmente*, mas isto não implica que elas não se interceptam *globalmente* !

O paradoxo de Cramer

- As curvas algébricas de grau d dependem de $d(d+3)/2$ parâmetros.
- Duas curvas de grau d se interceptam (en geral) em d^2 pontos (complexos).
- Se $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), ainda é verdade que as curvas algébricas osculatrizes de grau d não se interceptam *localmente*, mas isto não implica que elas não se interceptam *globalmente* !

O paradoxo de Cramer

- As curvas algébricas de grau d dependem de $d(d+3)/2$ parâmetros.
- Duas curvas de grau d se interceptam (en geral) em d^2 pontos (complexos).
- Se $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), ainda é verdade que as curvas algébricas osculatrizes de grau d não se interceptam *localmente*, mas isto não implica que elas não se interceptam *globalmente* !

O paradoxo de Cramer

- As curvas algébricas de grau d dependem de $d(d+3)/2$ parâmetros.
- Duas curvas de grau d se interceptam (en geral) em d^2 pontos (complexos).
- Se $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), ainda é verdade que as curvas algébricas osculatrizes de grau d não se interceptam *localmente*, mas isto não implica que elas não se interceptam *globalmente* !

$d = 6$

$6(6+3)/2 - 1 = 26$

$6^2 = 36$

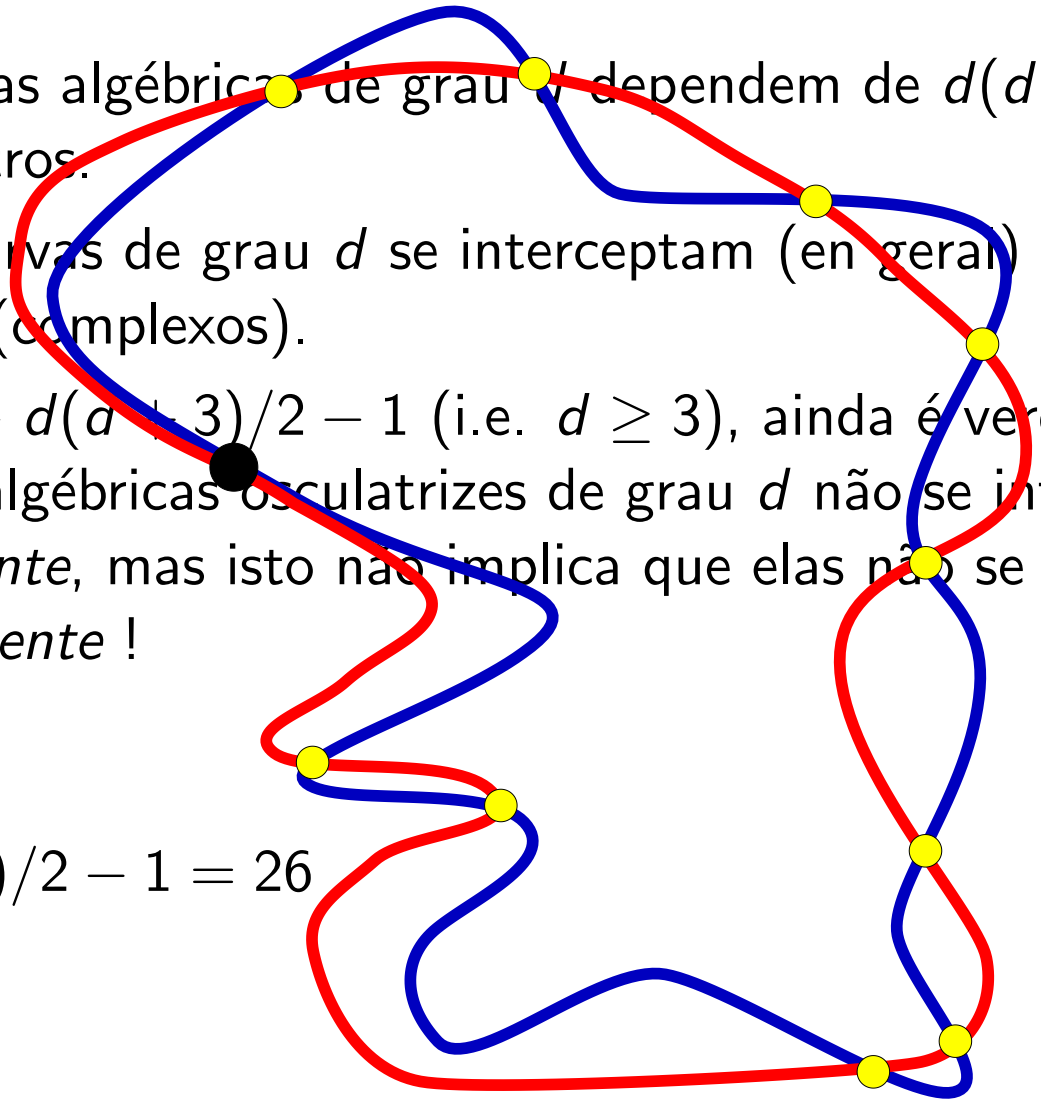
O paradoxo de Cramer

- As curvas algébricas de grau d dependem de $d(d+3)/2$ parâmetros.
- Duas curvas de grau d se interceptam (en geral) em d^2 pontos (complexos).
- Se $d^2 > d(d+3)/2 - 1$ (i.e. $d \geq 3$), ainda é verdade que as curvas algébricas osculatrizes de grau d não se interceptam *localmente*, mas isto não implica que elas não se interceptam *globalmente* !

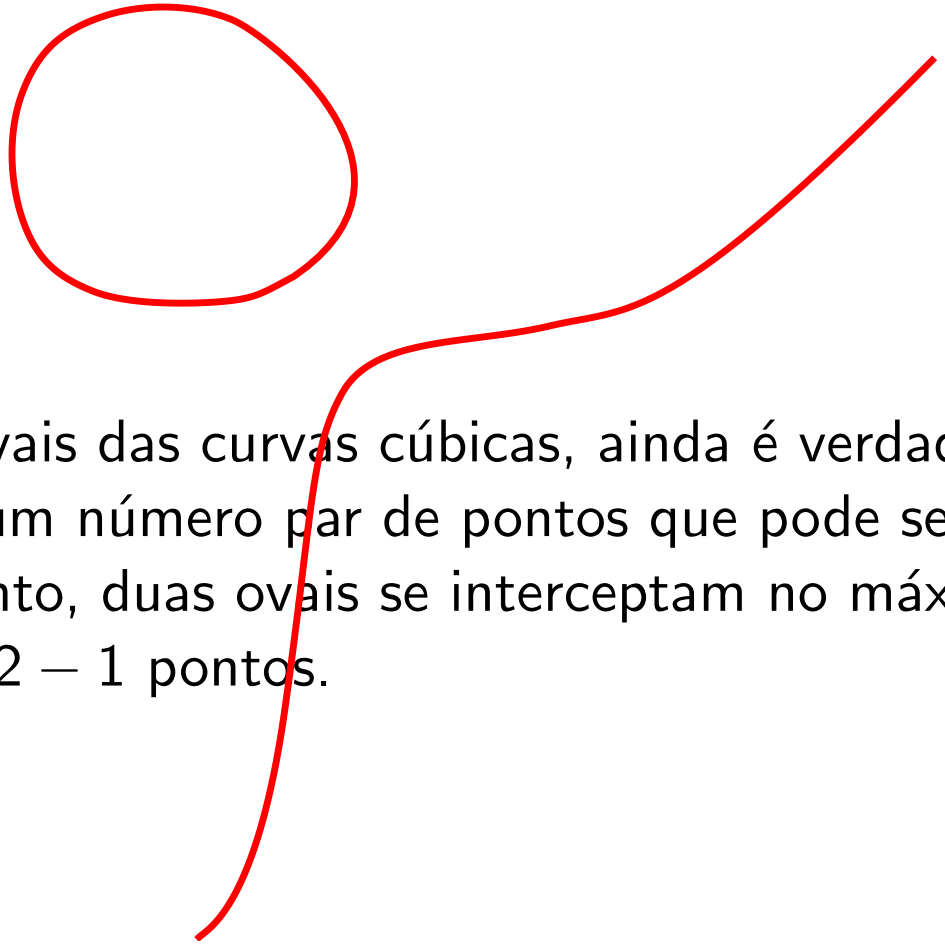
$d = 6$

$6(6+3)/2 - 1 = 26$

$6^2 = 36$

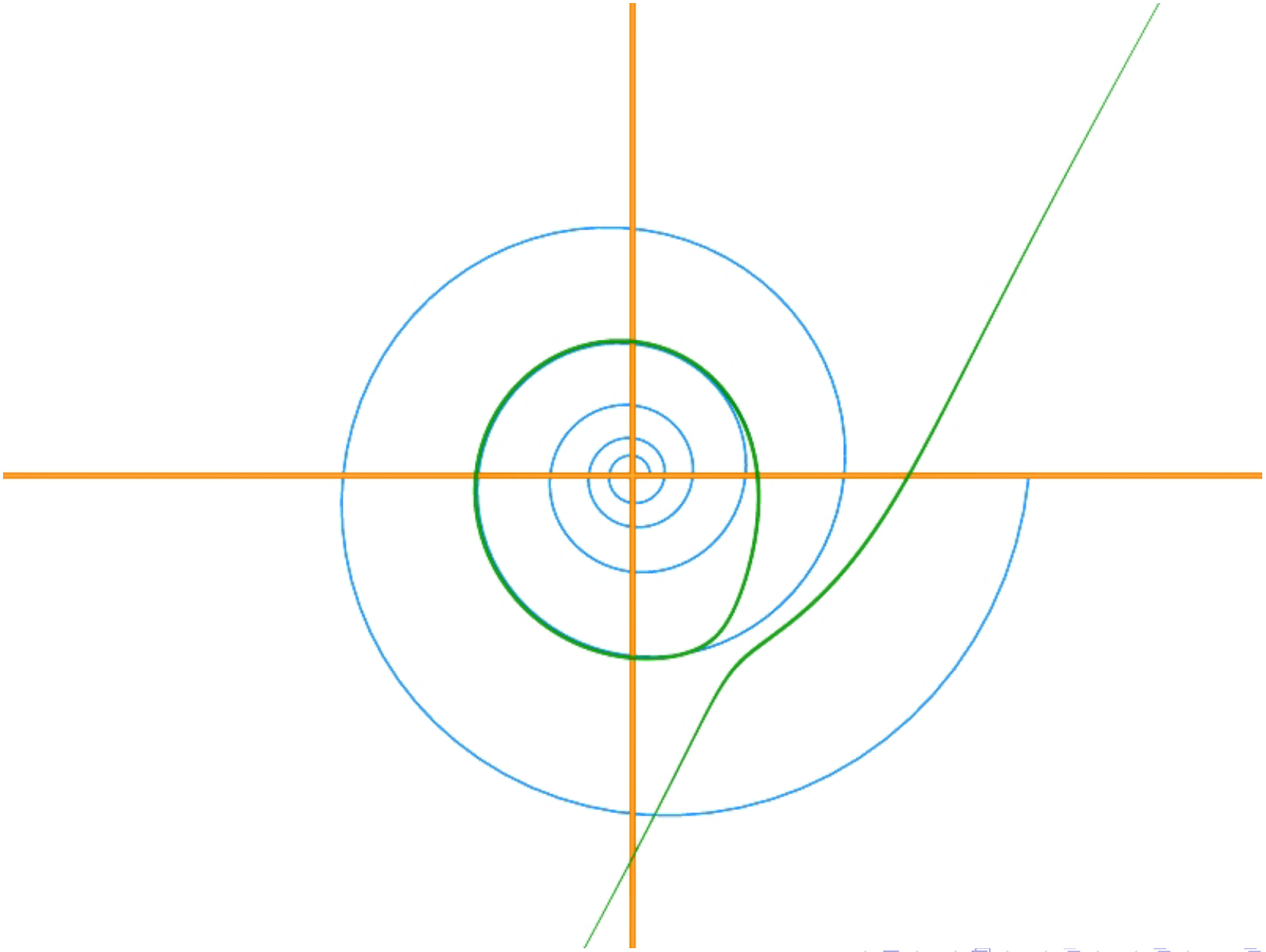


Curvas cúbicas



No caso das ovais das curvas cúbicas, ainda é verdade. Elas se interceptam num número par de pontos que pode ser no máximo $9 = d^2$. Portanto, duas ovais se interceptam no máximo em $8 = d(d+3)/2 - 1$ pontos.

Cúbicas osculatrizes



Cúbicas osculatrizes

Grau maior

Suponha que d é par, e que $d(d+3)/2$ é ímpar (i.e. $d = 4k+2$). Considera o espaço X_d das curvas algébricas de grau d com um ponto base.

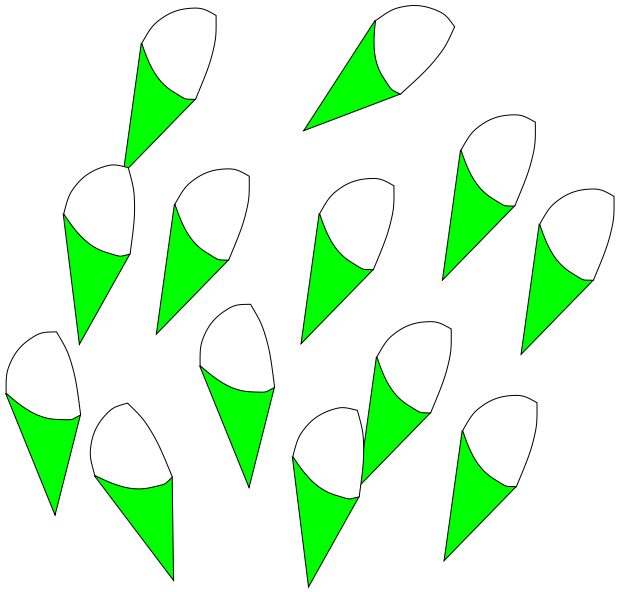
Cada curva no plano, sem "ponto d-tático", define uma curva em X_d que pode ser orientada de tal maneira que os interiores das curvas osculatrizes são "localmente crescentes". Os vetores tangentes a estas curvas de X_d definem um campo de cones convexos em X_d.

Grau maior

Suponha que d é par, e que $d(d+3)/2$ é ímpar (i.e. $d = 4k+2$). Considera o espaço X_d das curvas algébricas de grau d com um ponto base.

Cada curva no plano, sem "ponto d-tático", define uma curva em X_d que pode ser orientada de tal maneira que os interiores das curvas osculatrizes são "localmente crescentes". Os vetores tangentes a estas curvas de X_d definem um campo de cones convexos em X_d.

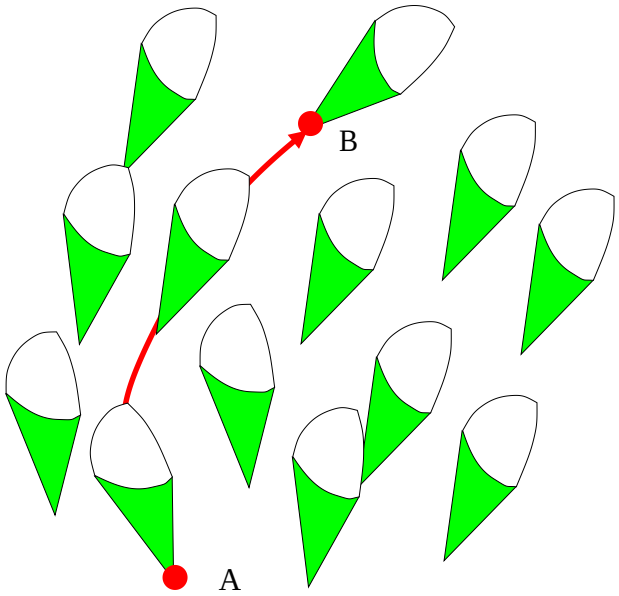
Grau maior



Pergunta

Este campo de cones convexos em X_d define uma relação de ordem em X_d?

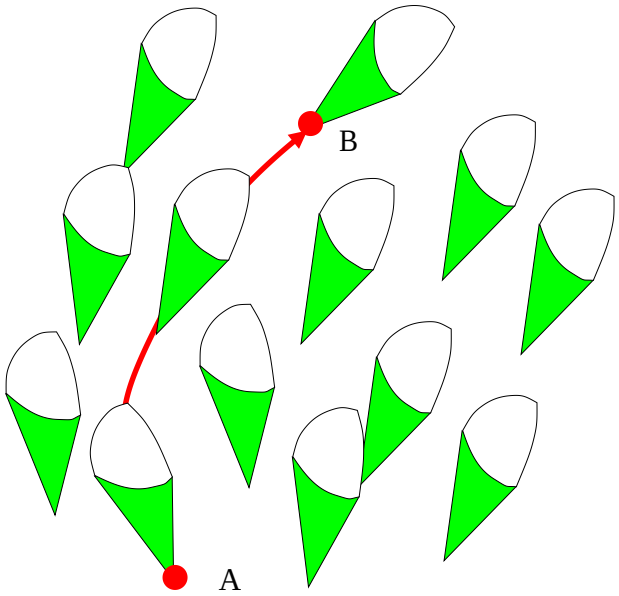
Grau maior

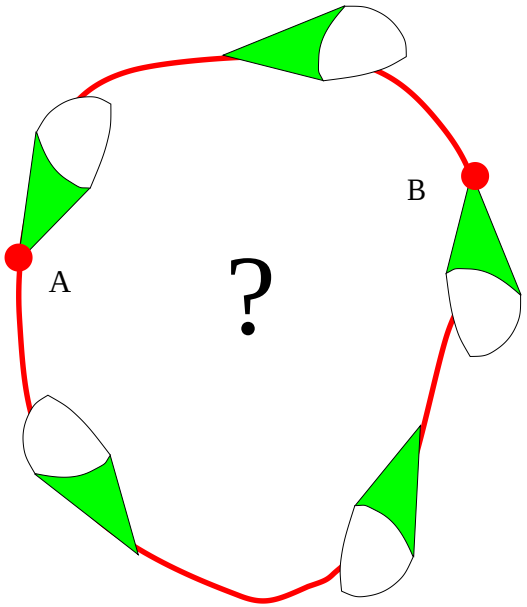


Pergunta

Este campo de cones convexos em X_d define uma relação de ordem em X_d?

Grau maior





Pergunta

Este campo de cones convexos em X_d define uma relação de ordem em X_d?

Curvas de grau 6

- As curvas de grau 6 dependem de $27 = d(d+3)/2$ parâmetros e se interceptam no máximo em $36 = 6^2$ pontos.

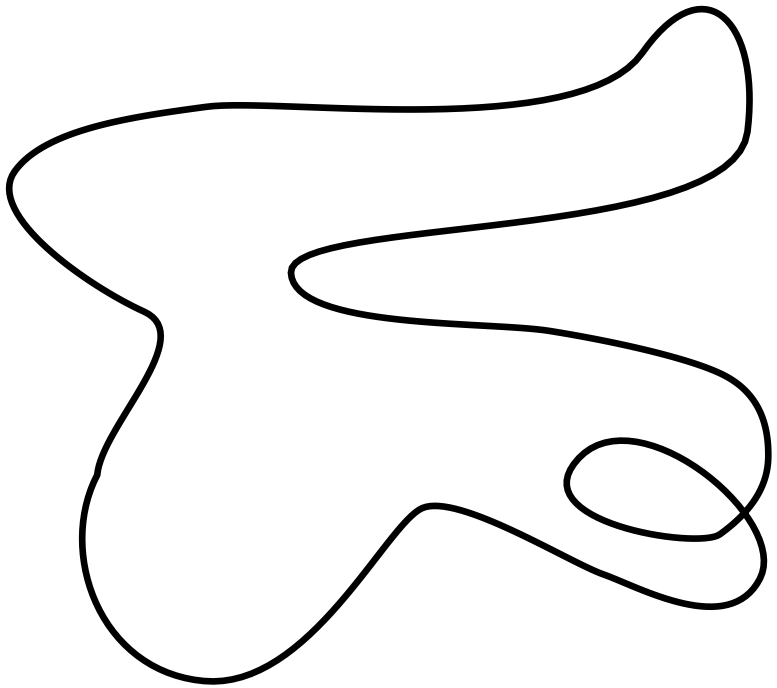
- Existe uma curva imersa fechada no plano projetivo que não contém ponto 6-tático ?

Curvas de grau 6

- As curvas de grau 6 dependem de $27 = d(d+3)/2$ parâmetros e se interceptam no máximo em $36 = 6^2$ pontos.

- Existe uma curva imersa fechada no plano projetivo que não contém ponto 6-tático ?

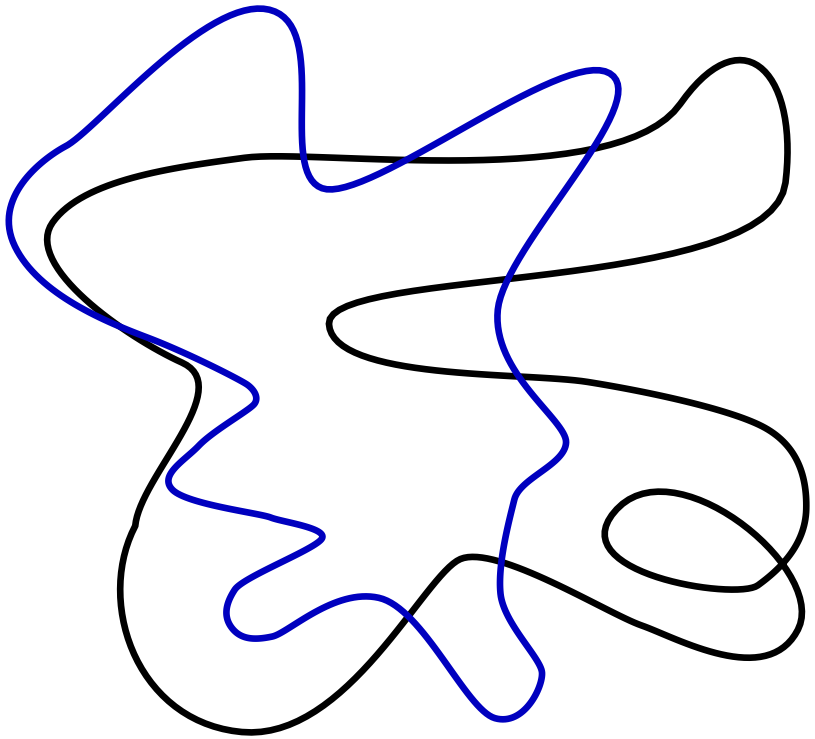
Curvas de grau 6



c

f

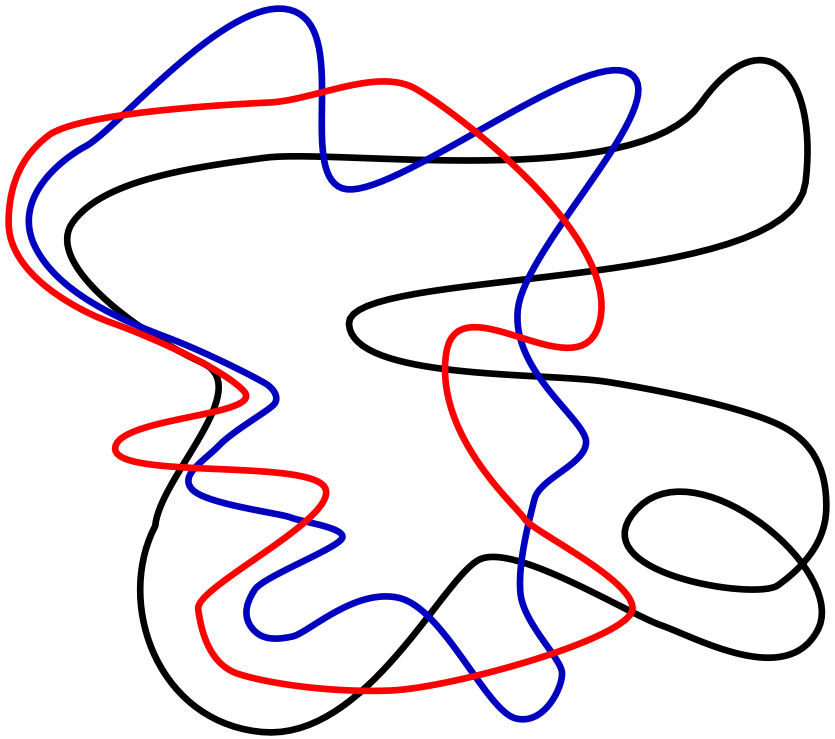
Curvas de grau 6



c

f

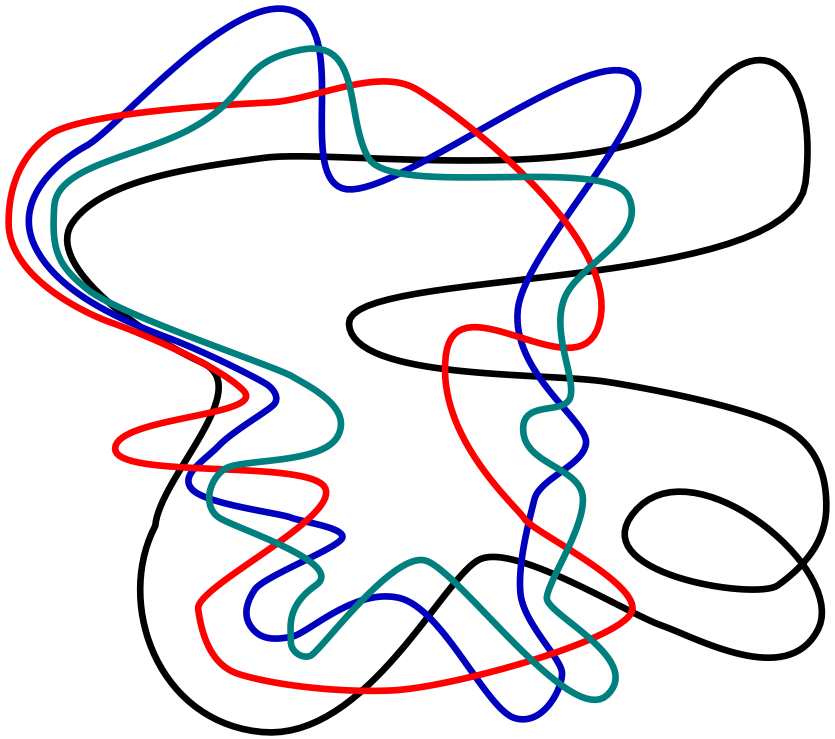
Curvas de grau 6



c

f

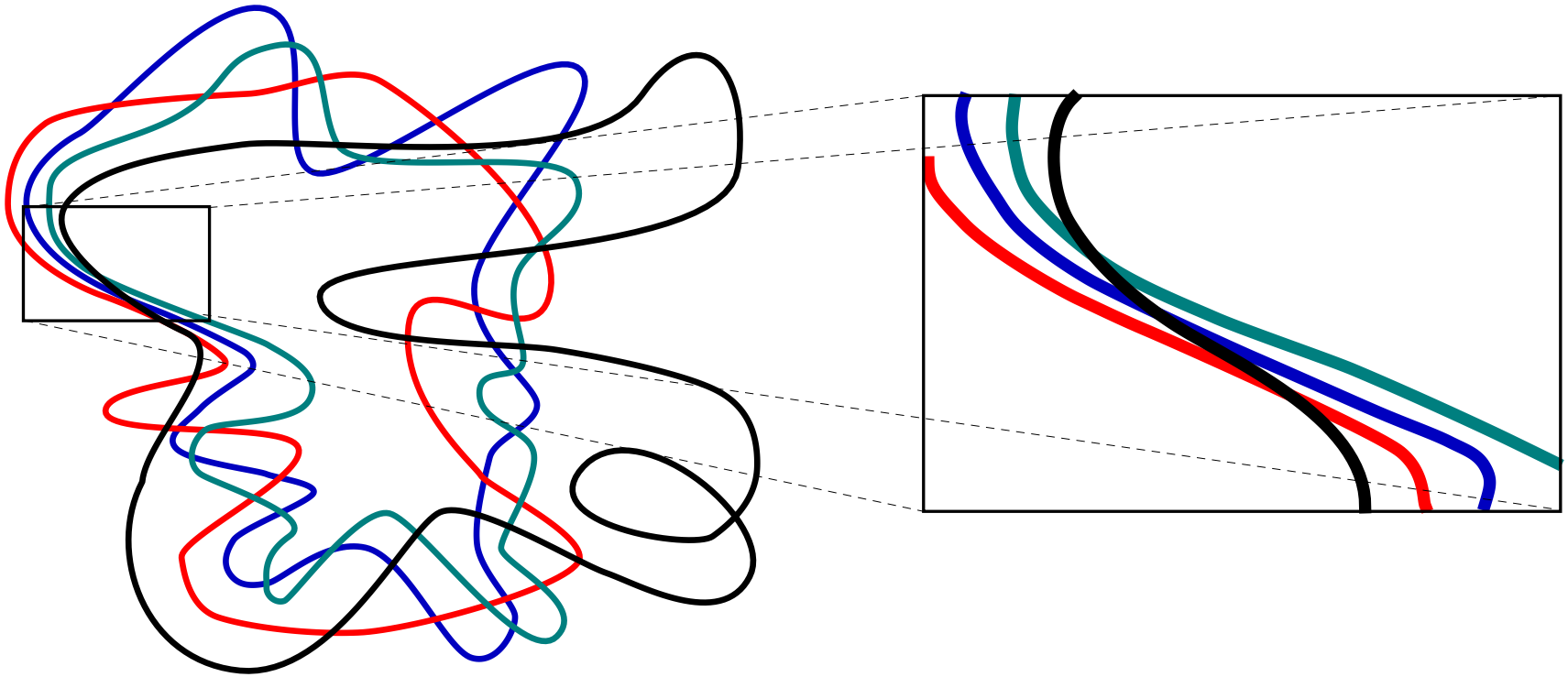
Curvas de grau 6



c

f

Curvas de grau 6



c

f

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Uma álgebra de Lie simples $\mathcal{G}$ contém um cone convexo não trivial invariante pela representação adjunta se e somente se o espaço simétrico associado G/K é um espaço simétrico **hermitiano**.

Exemplos

- $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$: disco de Poincaré.
- $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$: domínio de Siegel.
- $\mathrm{PU}(2, 1)$: bola hiperbólica complexa.

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Uma álgebra de Lie simples $\mathcal{G}$ contém um cone convexo não trivial invariante pela representação adjunta se e somente se o espaço simétrico associado G/K é um espaço simétrico **hermitiano**.

Exemplos

- $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$: disco de Poincaré.
- $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$: domínio de Siegel.
- $\mathrm{PU}(2, 1)$: bola hiperbólica complexa.

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Uma álgebra de Lie simples $\mathcal{G}$ contém um cone convexo não trivial invariante pela representação adjunta se e somente se o espaço simétrico associado G/K é um espaço simétrico **hermitiano**.

Exemplos

- $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$: disco de Poincaré.
- $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$: domínio de Siegel.
- $\mathrm{PU}(2, 1)$: bola hiperbólica complexa.

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Uma álgebra de Lie simples $\mathcal{G}$ contém um cone convexo não trivial invariante pela representação adjunta se e somente se o espaço simétrico associado G/K é um espaço simétrico **hermitiano**.

Exemplos

- $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$: disco de Poincaré.
- $\mathrm{Sp}(2n, \mathbf{R})$: domínio de Siegel.
- $\mathrm{PU}(2, 1)$: bola hiperbólica complexa.

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Se G/K é hermitiano, existe um único cone convexo maximal (resp. minimal) na álgebra de Lie de G, invariante pela representação adjunta.

Exemplos

No grupo simplético, existe um "único" cone convexo invariante.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, existe uma família com um parâmetro.

Pergunta

Um campo de cones convexos define uma relação de ordem local no grupo de Lie, invariante por translações à esquerda.
É uma relação global ?

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Se G/K é hermitiano, existe um único cone convexo maximal (resp. minimal) na álgebra de Lie de G, invariante pela representação adjunta.

Exemplos

No grupo simplético, existe um "único" cone convexo invariante.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, existe uma família com um parâmetro.

Pergunta

Um campo de cones convexos define uma relação de ordem local no grupo de Lie, invariante por translações à esquerda.
É uma relação global ?

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Se G/K é hermitiano, existe um único cone convexo maximal (resp. minimal) na álgebra de Lie de G, invariante pela representação adjunta.

Exemplos

No grupo simplético, existe um "único" cone convexo invariante.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, existe uma família com um parâmetro.

Pergunta

Um campo de cones convexos define uma relação de ordem local no grupo de Lie, invariante por translações à esquerda.
É uma relação global ?

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

Se G/K é hermitiano, existe um único cone convexo maximal (resp. minimal) na álgebra de Lie de G, invariante pela representação adjunta.

Exemplos

No grupo simplético, existe um "único" cone convexo invariante.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, existe uma família com um parâmetro.

Pergunta

Um campo de cones convexos define uma relação de ordem local no grupo de Lie, invariante por translações à esquerda.
É uma relação global ?

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

O cone **minimal** C_{min} *sempre define uma relação de ordem* **global** *no recobrimento universal dos grupos de Lie simples.*

Teorema (Olshanskii)

Descrição explícita dos cones invariantes que definem uma ordem global : contidos num cone explícito C_{ord}.

Exemplos

No grupo simplético, $C_{min} = C_{ord} = C_{max}$.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, $C_{min} = C_{ord} \neq C_{max}$.

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

O cone **minimal** C_{min} *sempre define uma relação de ordem* **global** *no recobrimento universal dos grupos de Lie simples.*

Teorema (Olshanskii)

Descrição explícita dos cones invariantes que definem uma ordem global : contidos num cone explícito C_{ord}.

Exemplos

No grupo simplético, $C_{min} = C_{ord} = C_{max}$.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, $C_{min} = C_{ord} \neq C_{max}$.

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

O cone **minimal** C_{min} *sempre define uma relação de ordem* **global** *no recobrimento universal dos grupos de Lie simples.*

Teorema (Olshanskii)

Descrição explícita dos cones invariantes que definem uma ordem global : contidos num cone explícito C_{ord}.

Exemplos

No grupo simplético, $C_{min} = C_{ord} = C_{max}$.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, $C_{min} = C_{ord} \neq C_{max}$.

Ordenar os grupos de Lie

Teorema (Vinberg)

O cone **minimal** C_{min} *sempre define uma relação de ordem* **global** *no recobrimento universal dos grupos de Lie simples.*

Teorema (Olshanskii)

Descrição explícita dos cones invariantes que definem uma ordem global : contidos num cone explícito C_{ord}.

Exemplos

No grupo simplético, $C_{min} = C_{ord} = C_{max}$.

No grupo de isometrias da bola hiperbólica complexa, $C_{min} = C_{ord} \neq C_{max}$.

Mais geralmente ?

- Descrever os campos de cones convexos G-invariantes nos espaços homogêneos G/H.
- Descrever os espaços homogêneos ordenáveis.
- A dimensão infinita ?

Mais geralmente ?

- Descrever os campos de cones convexos G-invariantes nos espaços homogêneos G/H.
- Descrever os espaços homogêneos ordenáveis.
- A dimensão infinita ?

Mais geralmente ?

- Descrever os campos de cones convexos G-invariantes nos espaços homogêneos G/H.
- Descrever os espaços homogêneos ordenáveis.
- A dimensão infinita ?

Contactomorfismos. . .

Eliashberg-Kim-Polterovich

O grupo dos contactomorfismos da esfera de contato padrão de dimensão 3 possui uma um campo de convexos invariante.

Este campo de convexos **não** define uma relação de ordem.

Problema

Estender os resultados de Vinberg-Ol'shankii aos grupos de difeomorfismos de dimensão infinita !

Contactomorfismos. . .

Eliashberg-Kim-Polterovich

O grupo dos contactomorfismos da esfera de contato padrão de dimensão 3 possui uma um campo de convexos invariante.

Este campo de convexos **não** define uma relação de ordem.

Problema

Estender os resultados de Vinberg-Ol'shankii aos grupos de difeomorfismos de dimensão infinita !

Contactomorfismos. . .

Eliashberg-Kim-Polterovich

O grupo dos contactomorfismos da esfera de contato padrão de dimensão 3 possui uma um campo de convexos invariante.

Este campo de convexos **não** define uma relação de ordem.

Problema

Estender os resultados de Vinberg-Ol'shankii aos grupos de difeomorfismos de dimensão infinita !

Novo Dicionário Aurélio

Oscular. [Do lat. *osculare.*] *V.t.d.* Dar ósculo(s) em; beijar. [Pres. ind.: *osculo*, etc. Cf. *ósculo.*]

Ósculo. [Do lat. *osculu*, 'boquinha'.] *S.m.* **1.** Beijo (1). **2.** Beijo de paz e amizade. **3.** Pequena abertura na superfície das esponjas. [Cf. *osculo* do v. *oscular*]

Osculação. [Do lat. *osculatione.*] *S.f.* **1.** Ato ou efeito de oscular. **2.** *Geom.* Contato de duas curvas; cruzamento de dois ramos da mesma curva.

Osculador (ô) *Adj.* **1.** Que oscula. ∼ V. *círculo* – e *plano* –. • *S.m.* **2.** Aquele que oscula.

Círculo. [Do lat. *circulu.*] *S.m.* [...] **Círculo osculador.** *Geom Anal.* Círculo que passa por três pontos consecutivos de uma curva; círculo que tangencia uma curva e tem no ponto de tangência a mesma derivada secunda que a curva [Sin.: *círculo de curvatura, circunferência osculatriz.*]

Perspectivas

- Descrever os campos de cones convexos G-invariantes nos espaços homogêneos G/H.
- Descrever os espaços homogêneos ordenáveis.
- A dimensão infinita ? Grupos de difeomorfismos (Kim-Eliashberg-Polterovich)

Perspectivas

- Descrever os campos de cones convexos G-invariantes nos espaços homogêneos G/H.
- Descrever os espaços homogêneos ordenáveis.
- A dimensão infinita ? Grupos de difeomorfismos (Kim-Eliashberg-Polterovich)

Perspectivas

- Descrever os campos de cones convexos G-invariantes nos espaços homogêneos G/H.
- Descrever os espaços homogêneos ordenáveis.
- A dimensão infinita ? Grupos de difeomorfismos (Kim-Eliashberg-Polterovich)