

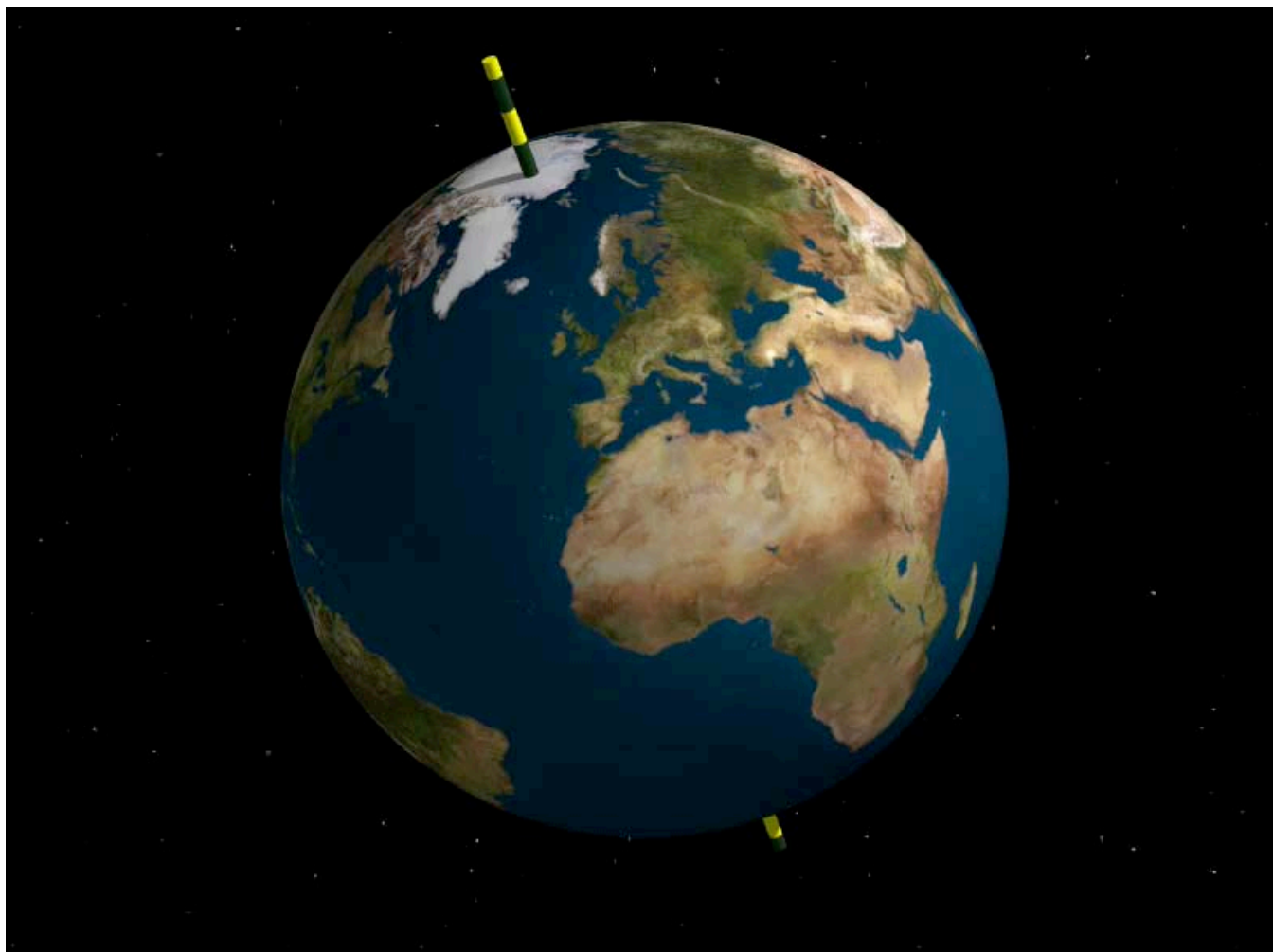
La forme de la Terre : un problème mathématique ?



Etienne Ghys

CNRS/ENS Lyon

Eppur si muove





Newton

1642-1727 (1689)



Huygens 1690



J. Cassini 1701



Maupertuis 1732



Euler 1740



Clairaut 1733

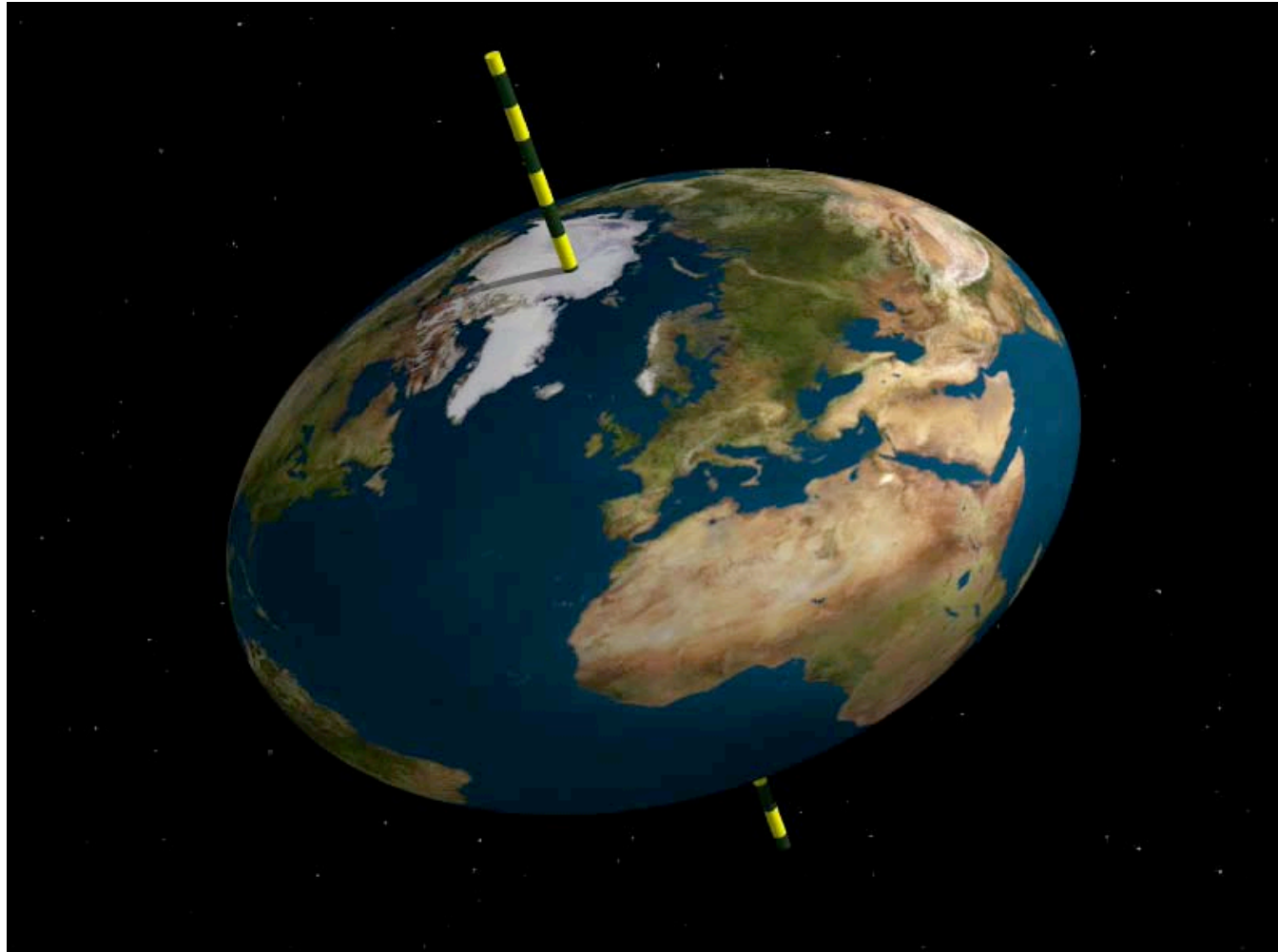


D'Alembert 1756



MacLaurin (1742)

Ellipsoïde de MacLaurin





Lagrange 1759



Laplace 1772



Legendre 1784



Monge 1787



Gauss 1813



Cauchy 1815

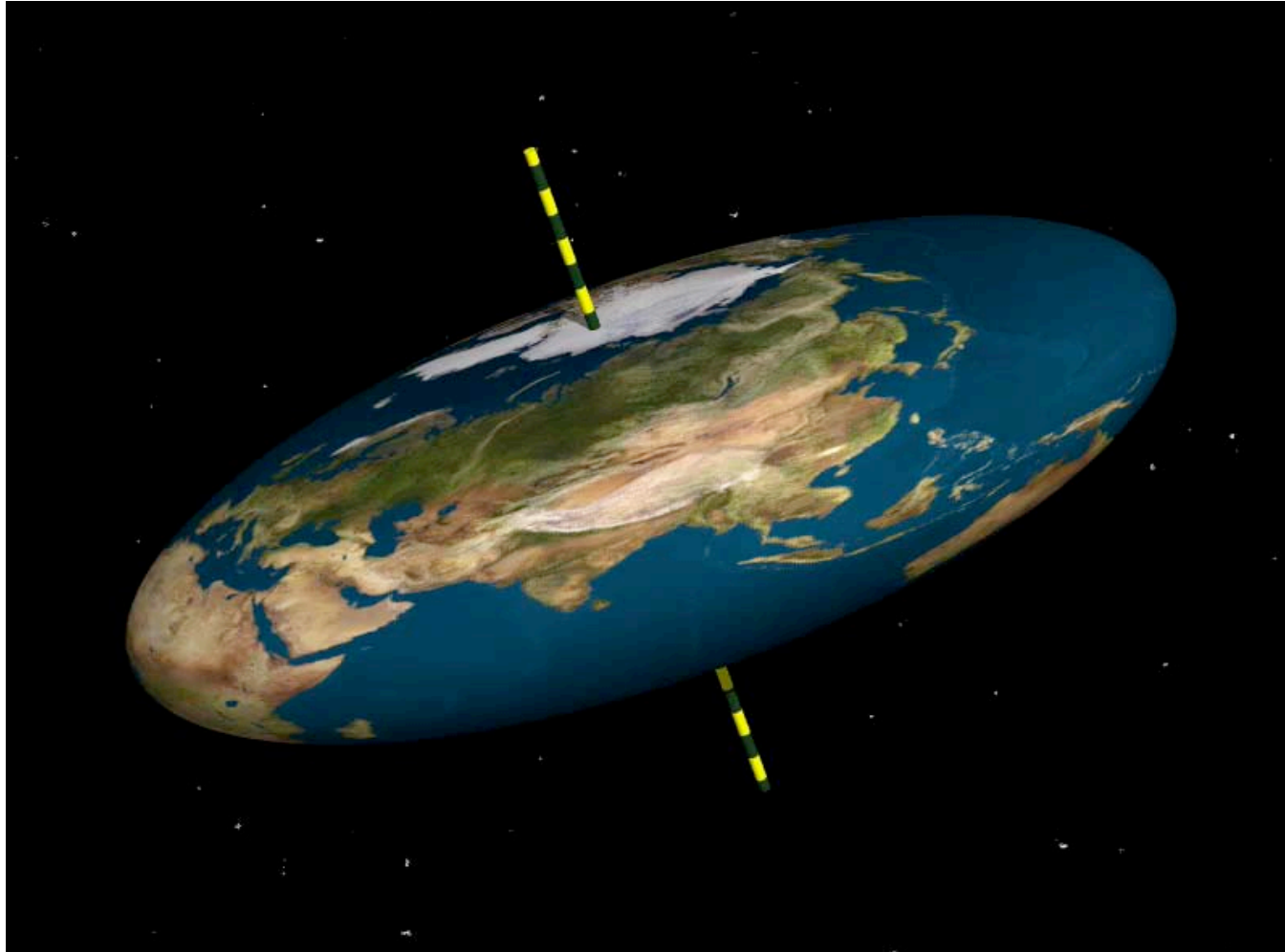


Poisson 1811



Jacobi (1834)

Ellipsoïde de Jacobi





Dirichlet 1857



Dedekind 1860



Riemann 1860



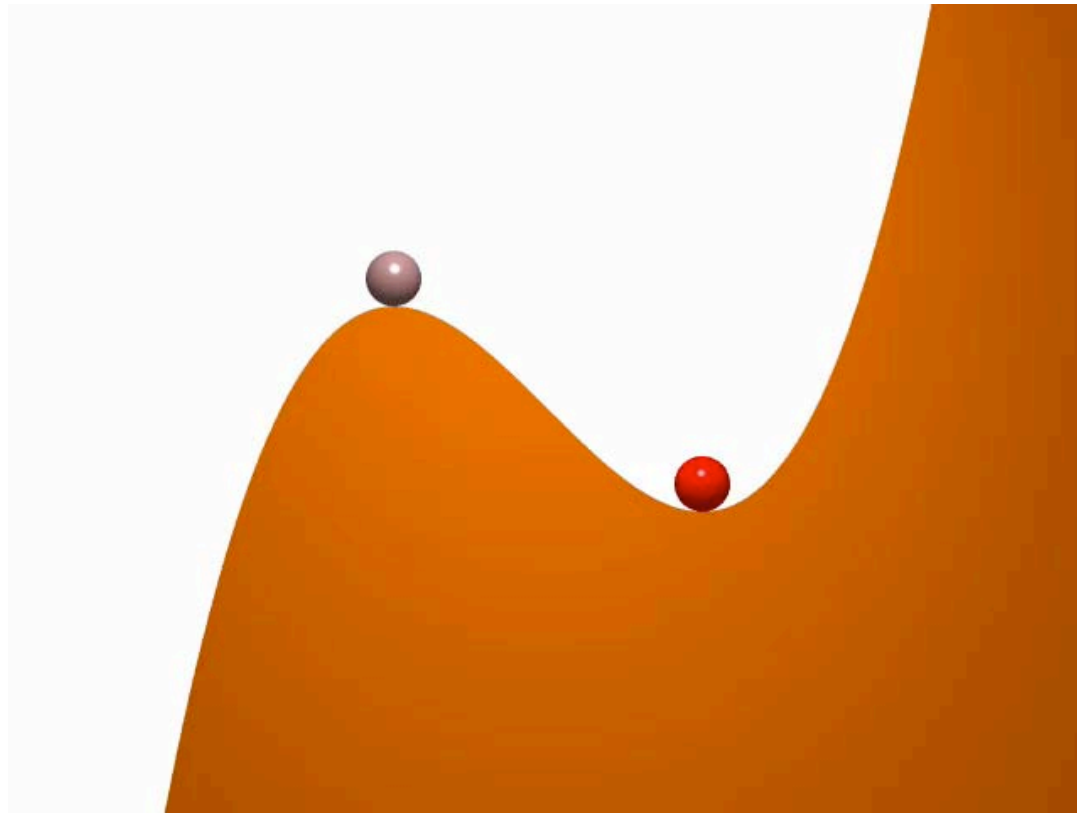
Sur l'équilibre d'une masse fluide
animée d'un mouvement de rotation,
Acta Mathematica 7 (1885), 259-380.

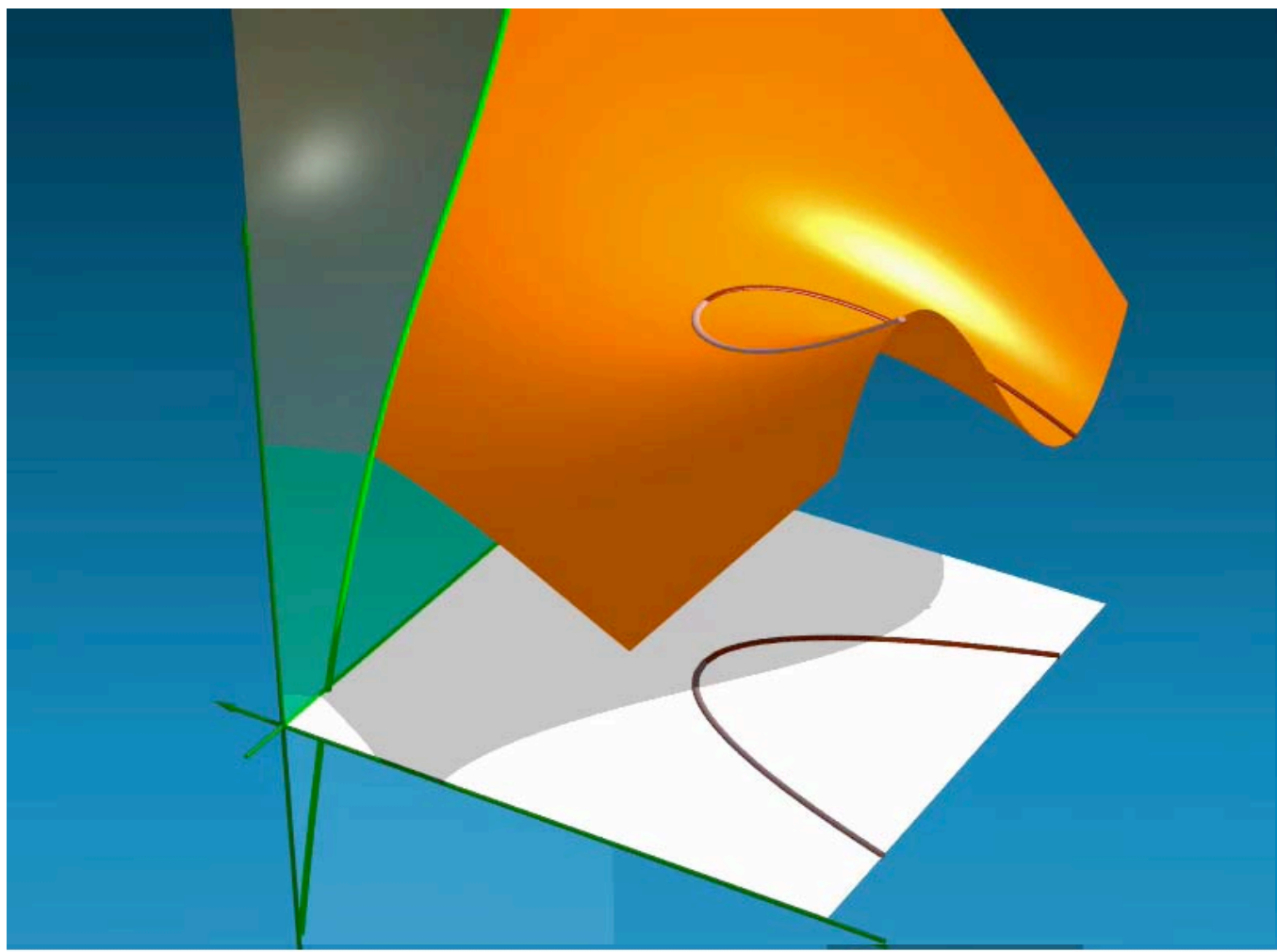
Poincaré (1854-1912)

La famille des MacLaurin dépendant d'un paramètre

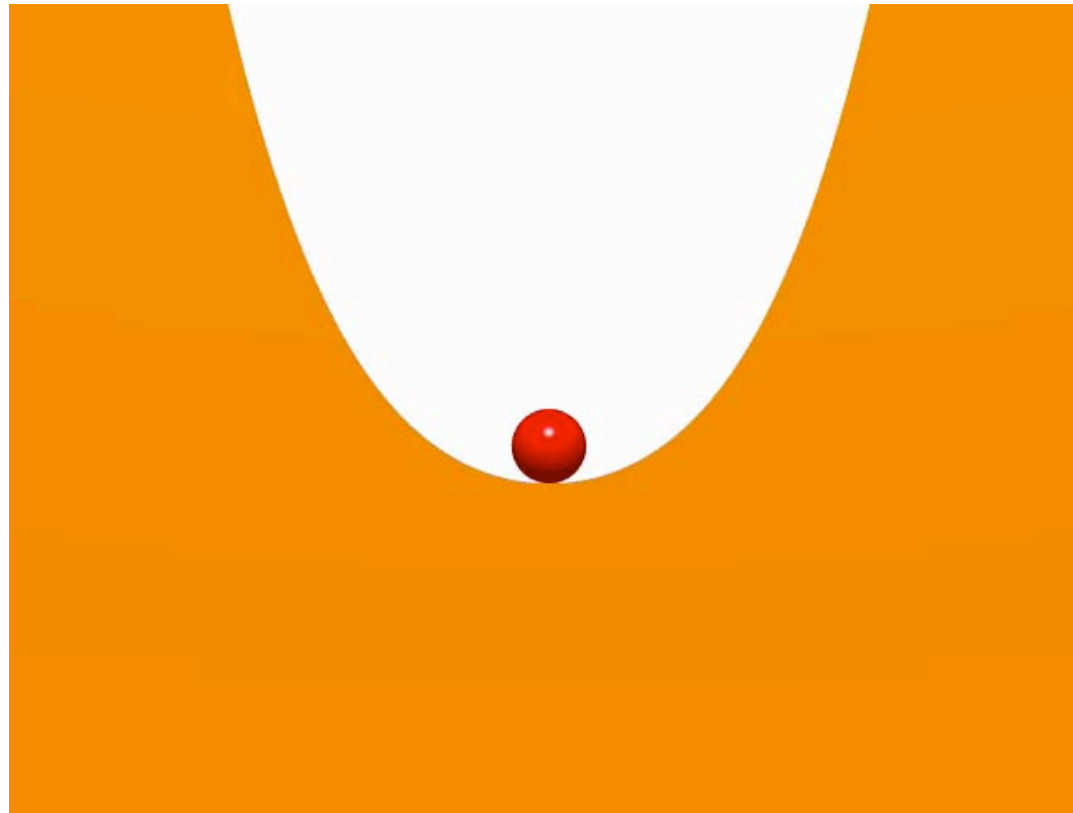


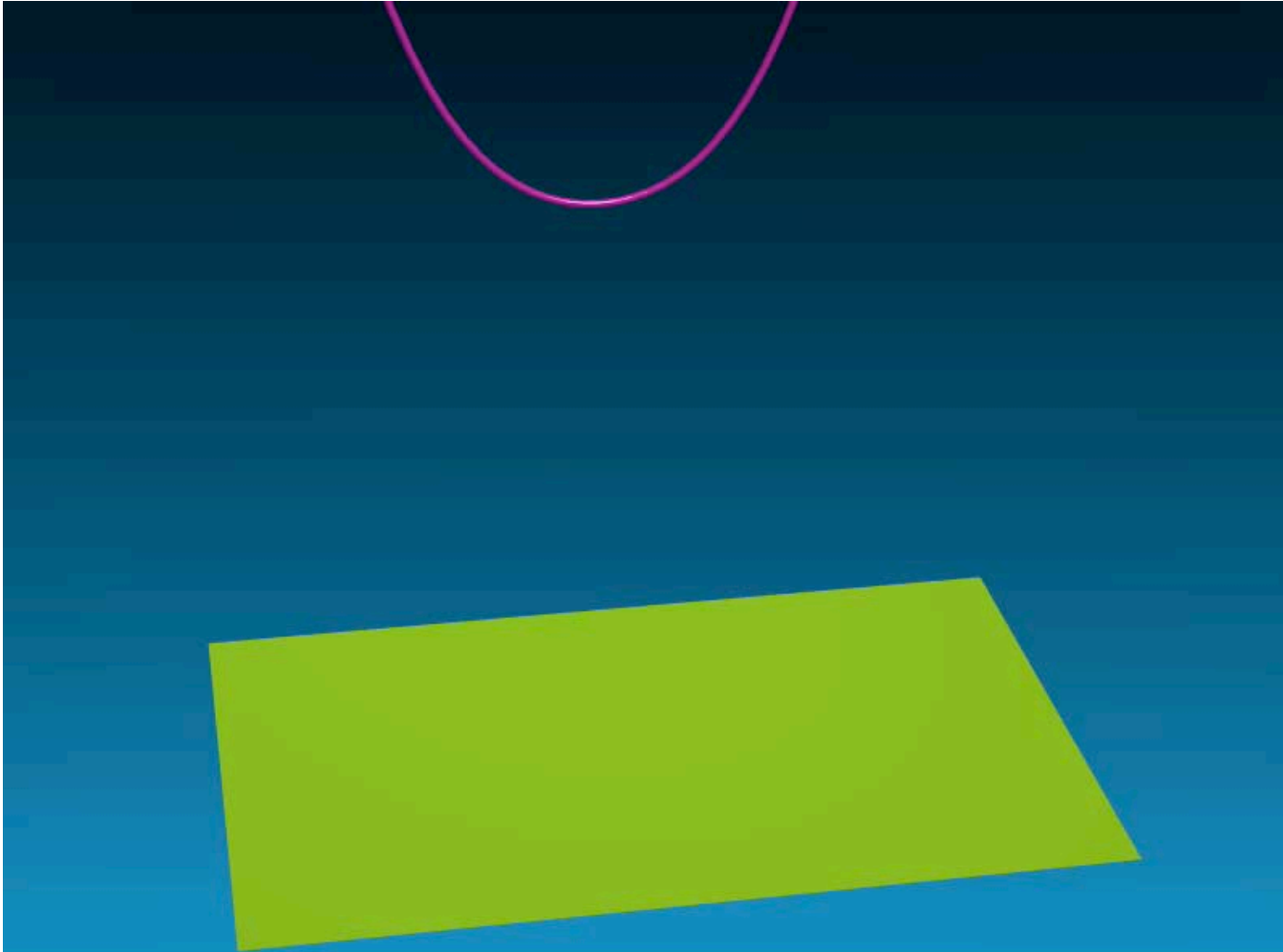
Bifurcation





Bifurcation en présence de symétrie





$\mathcal{F}$ = l'espace des formes concevables pour la terre.

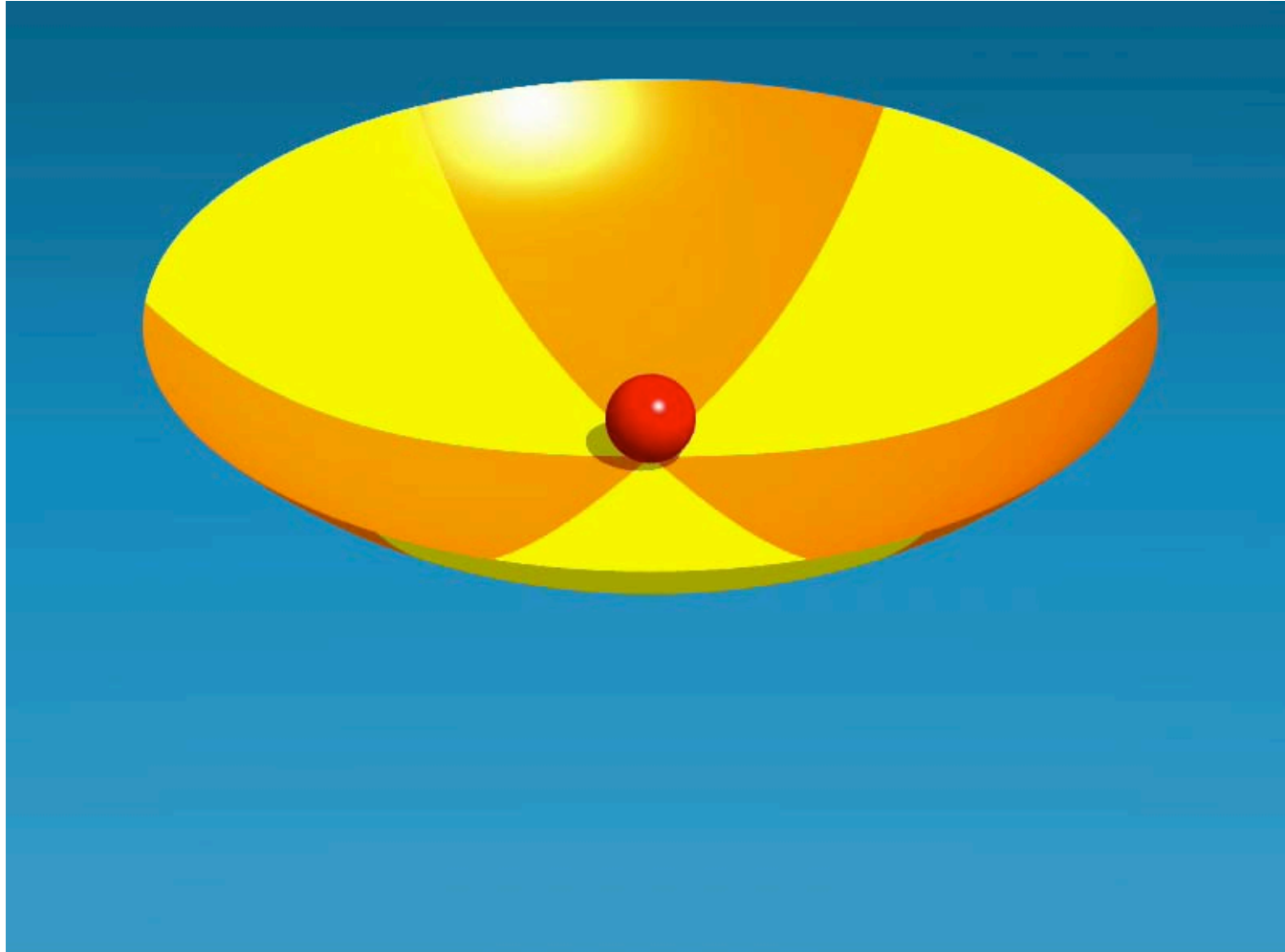
U = énergie totale (gravitationnelle + cinétique) de la terre tournant à vitesse constante avec un moment d'inertie L

On cherche les « points critiques » de la fonction U définie sur l'espace $\mathcal{F}$ (de dimension infinie), dépendant d'un paramètre L .

Les solutions dépendent de L et subissent des « bifurcations » lorsque la dérivée seconde de U présente des valeurs propres nulles.

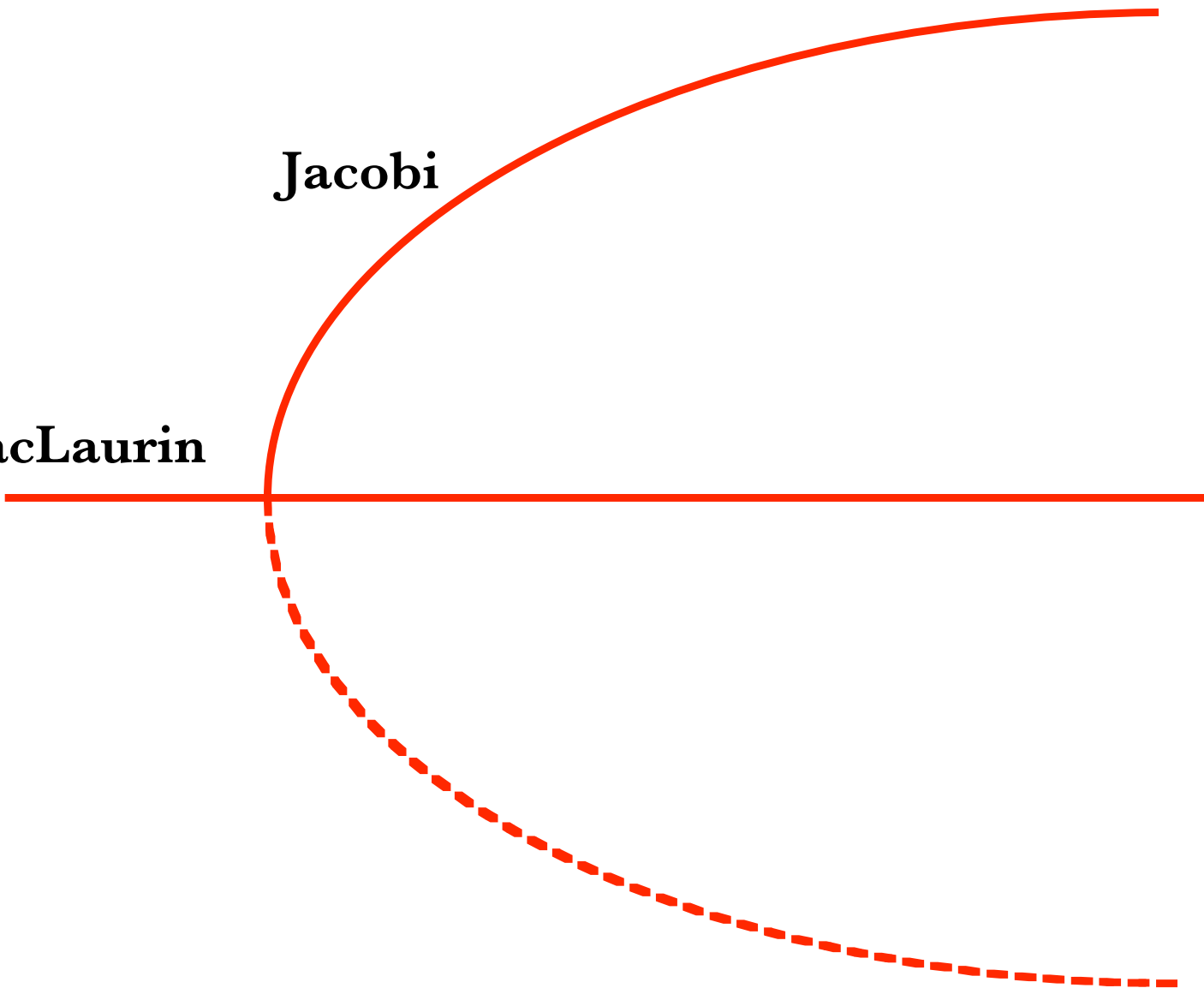
La fonctionnelle U est symétrique : invariance par les rotations

Le chapeau mexicain

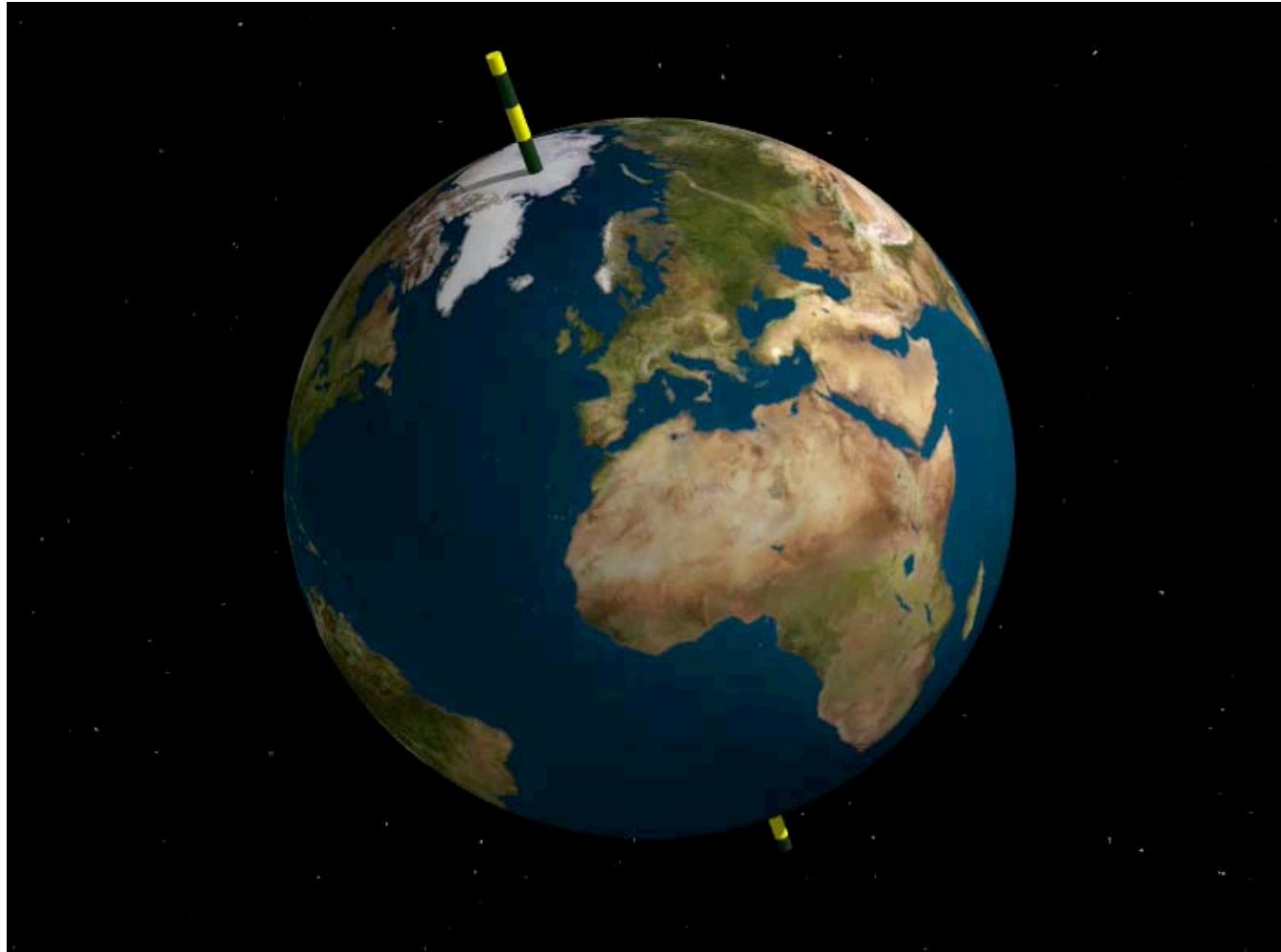


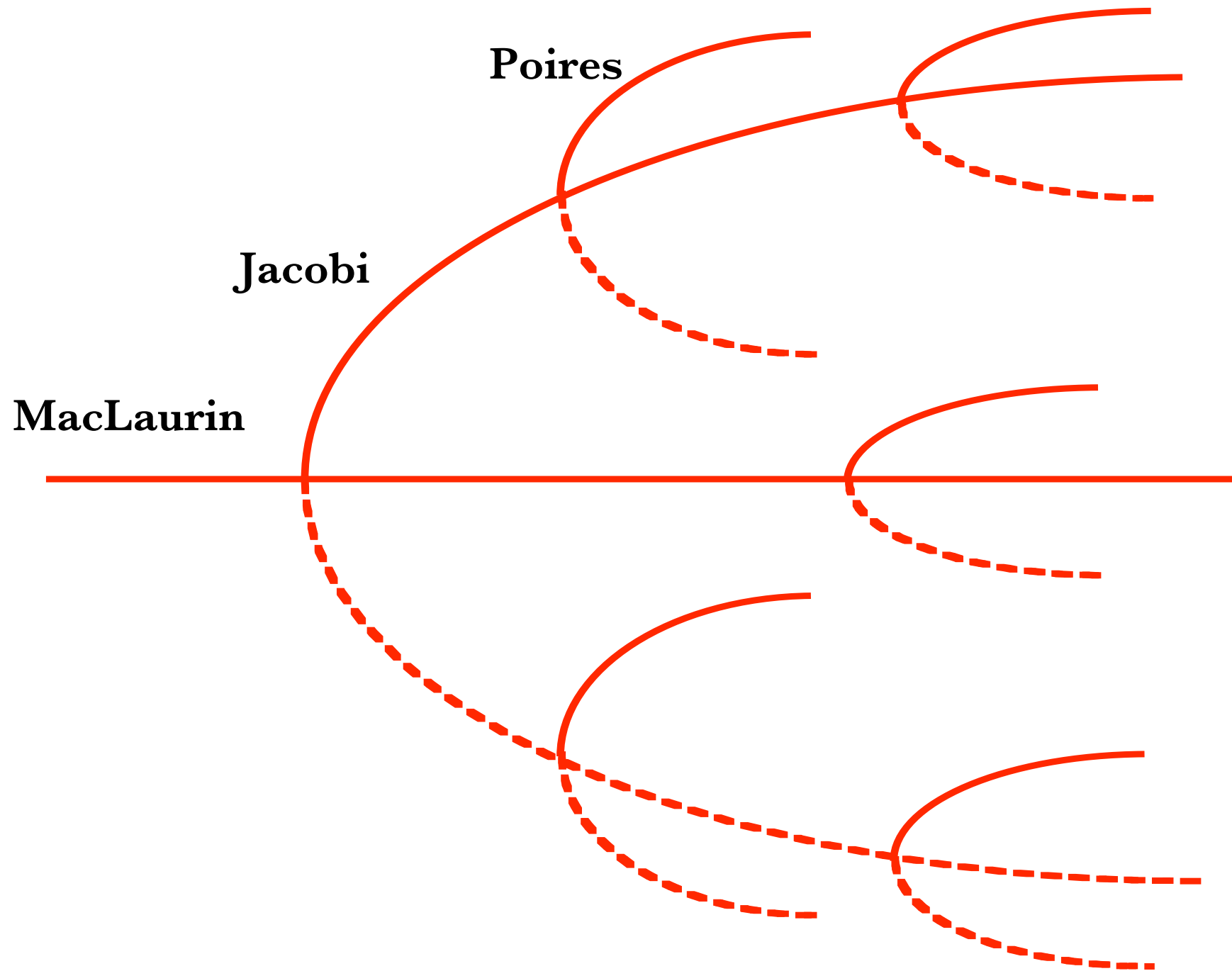
MacLaurin

Jacobi

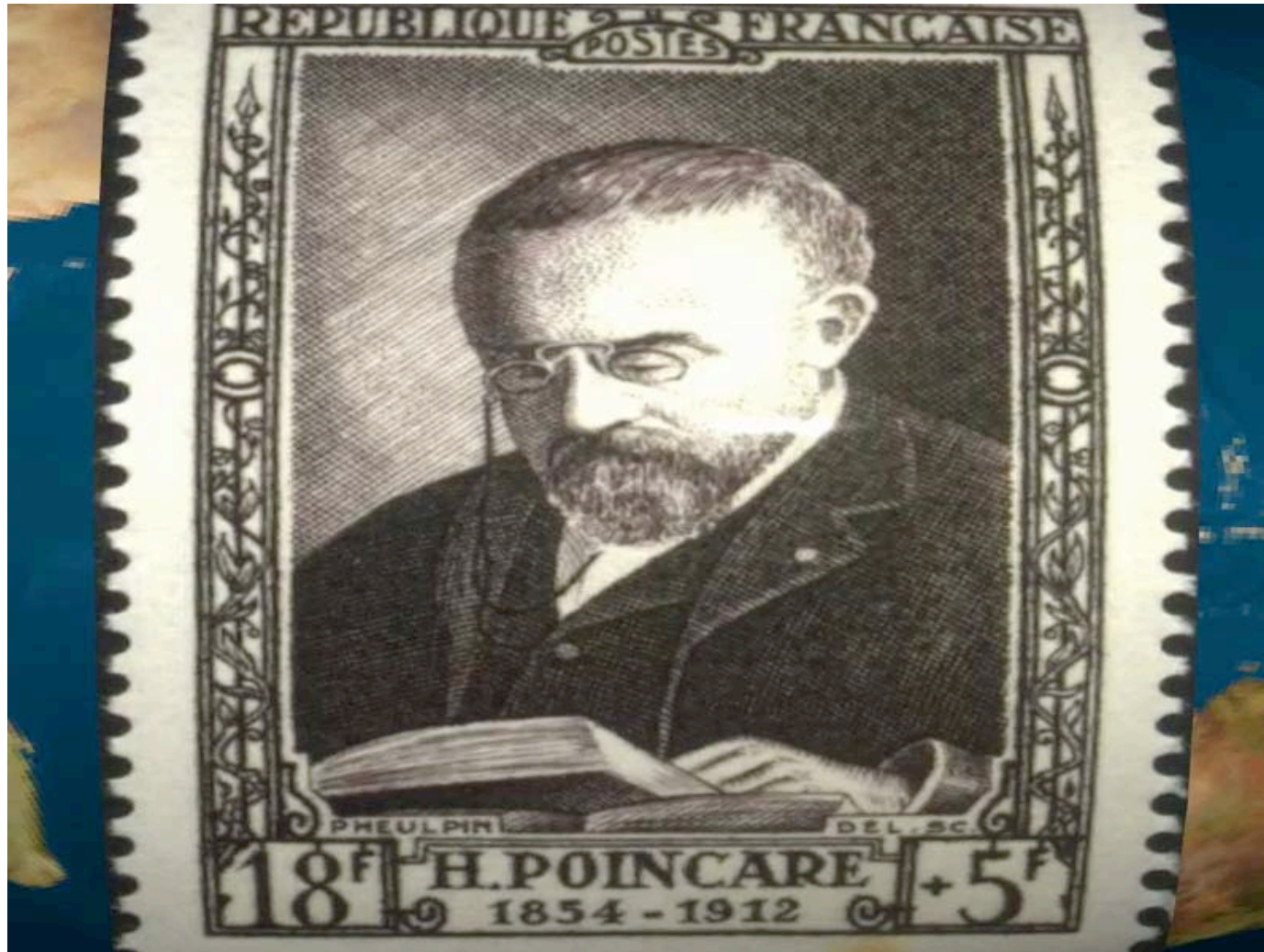


La bifurcation MacLaurin-Jacobi





Bifurcations MacLaurin-Jacobi-Poires



Étant donné un ellipsoïde de Jacobi de moment L , il faut calculer la dérivée seconde de l'énergie dans l'espace des formes possibles, voisines de l'ellipsoïde.

Une telle forme est décrite par une fonction sur l'ellipsoïde : la « hauteur » par rapport à l'ellipsoïde.

Il faut donc faire de « l'analyse harmonique » sur l'ellipsoïde :

Fonctions de Lamé, analogues aux harmoniques sphériques.

Quadriques homofocales et coordonnées elliptiques

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$$

$$0 < a < b < c$$

$$\lambda < a$$

ellipsoïde

$$a < \lambda < b$$

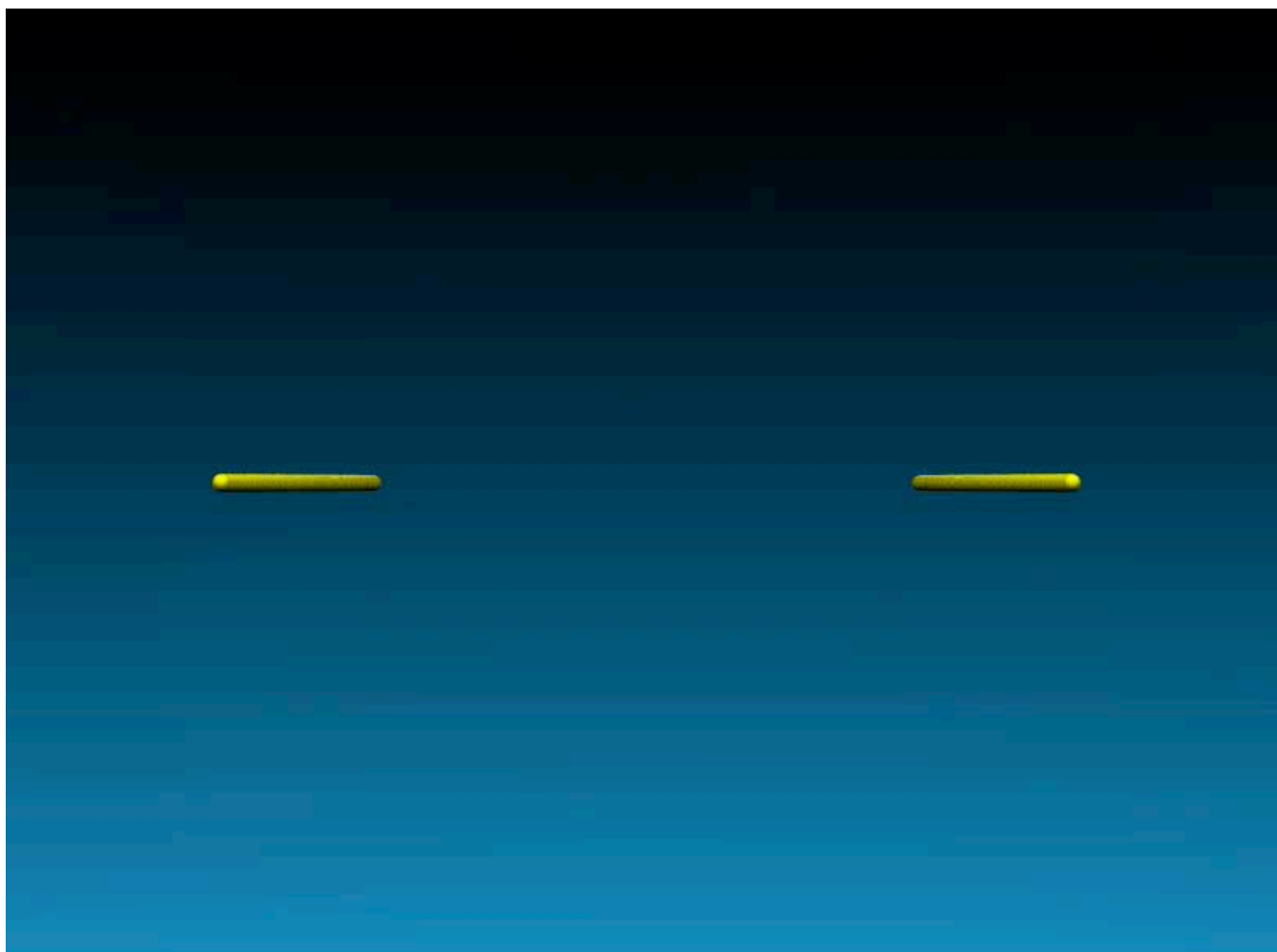
Hyperboloïde à une nappe

$$b < \lambda < c$$

Hyperboloïde à deux nappes

$$c < \lambda$$

vide



La suite...



Darwin 1906



Jeans 1917



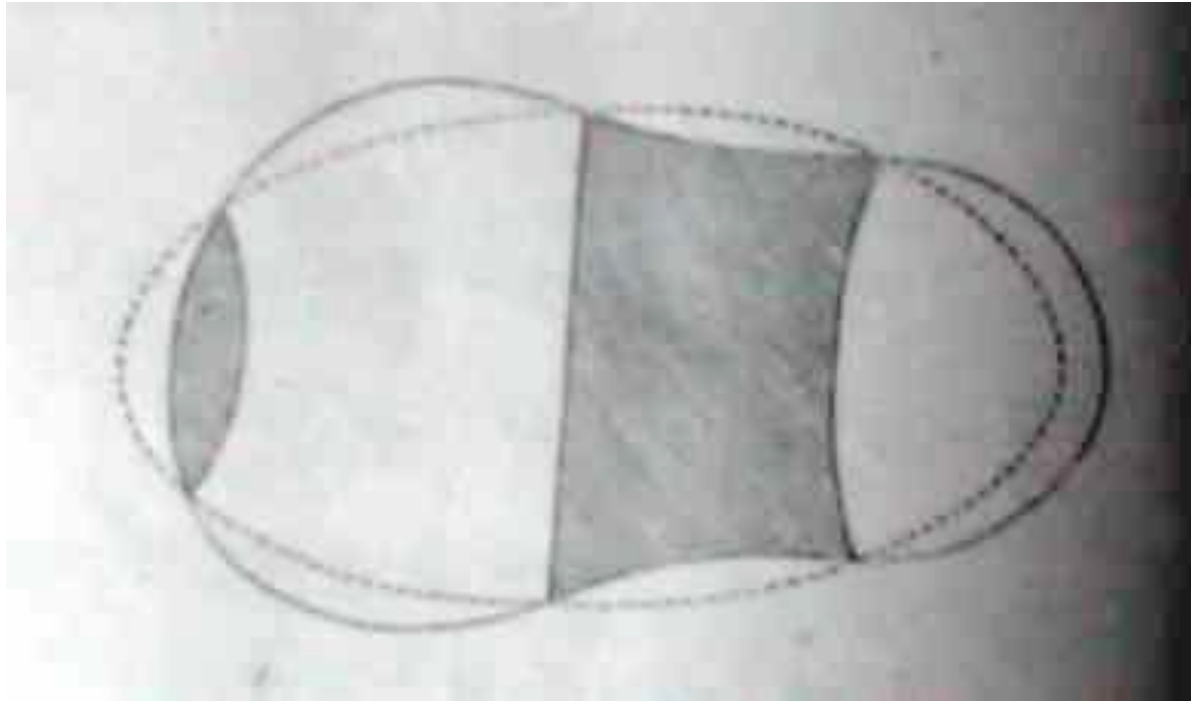
E. Cartan 1924

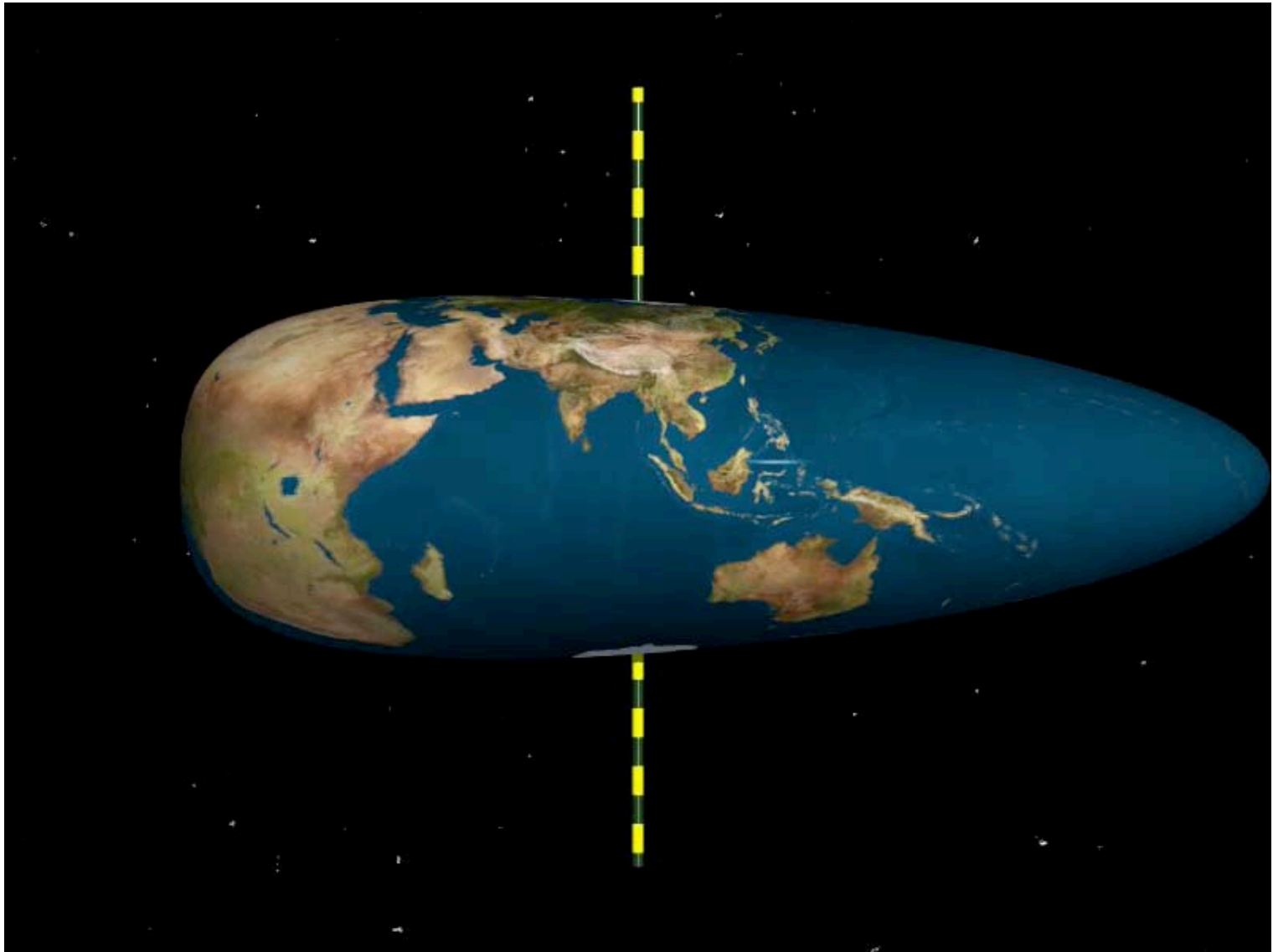


Chandrasekhar 1960

**La « poire » de Poincaré...
origine des satellites ???**

le rôle de l'image.





« The grand mental panorama that was thus created was so intoxicating that those following Poincaré were not to recover from its pursuit. »

« And at this point the subject quietly went to a coma. »

(Chandrasekar)

La « vraie » suite ?

Le concept de bifurcation est devenu un concept central en sciences

- **Théorie des catastrophes (Thom 1960)**
- **Développement de l'analyse fonctionnelle pour comprendre les problèmes en dimension infinie.**
- **Théorie des bifurcations en systèmes dynamiques, transition vers le chaos.**
- **Brisures de symétries en physique.**

Théorème de Thom

Lorsqu'un système dépend de moins de 4 paramètres, il ne rencontre en général que 7 types de catastrophes:

Le pli

La fonce

La queue d'aronde

Le papillon

L'ombilic elliptique

L'ombilic hyperbolique

L'ombilic parabolique

Les sept catastrophes élémentaires de Thom

$$x^3 + ux$$

$$x^4 + ux^2 + vx$$

$$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$$

$$x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$$

$$x^3/3 - xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy$$

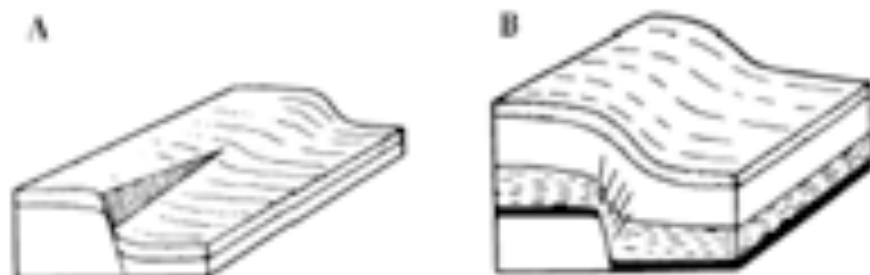
$$x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$$

$$x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$$

Cliché 5

La fronce (catastrophe de Riemann-Hugoniot) en géologie : naissance d'une faille (voir figure 5-3).

D'après E. Scherbon Hills, *Elements of Structural Geology*, Methuen, London, 1963.



Cliché 5

Cliché 25

Nébuleuse plus ancienne en déferlement équatorial : NGC 4594.

D'après S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York, 1960.



Cliché 25

Cliché 6, [1968]

La queue d'aronde en optique géométrique. La singularité ponctuelle ébauchée en C1 se déploie en C2 (voir figure 5-7).



Cliché 6a

Cliché 29 [1975]

The hyperbolic umbilic in hydrodynamics : a wave breaking.



Cliché 29

Henri Poincaré :

Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation

Revue générale des Sciences, (3), 809-815 (1892).

« Mais je m'arrête là, il est inutile de multiplier les hypothèses puisque toutes ces questions doivent rester provisoirement indécises. »

Un grand merci à Jos Leys !

Mathematical Imagery :
<http://www.josleys.com/>